連続する整数の積で表せる階乗について

１．目的
階乗の掛け算が別の階乗になる数の組み合わせが
$(a!-1)!\times a!=(a!)!$以外で存在するかどうかを考えたい。

２．方法
$nPk=m!$を満たす整数(n、k、m)が存在するかどうかを考える。
・素因数分解した表を使う。
・ある(n、k)の組に対し m が存在するかを考える。
・変数を減らして考える（例えば k=2）
→連続する整数は互いに素であることを使って素因数 2 の個数に注目して考える。
・ある m に対して(n、k)の組が存在するかを考える。
・m!に含まれる最大の素数 p を nPk で回収したい。
→nPk は素数 p の倍数になる。

３．結果
8 × 9 ×10＝6!つまり、(n、k、m)=（10、3、6）

4.考察
ある階乗を連続する整数の積で表せるか考えたときに「①階乗に含まれる素数以外の素数を持たない。②それぞれの素因数の個数が階乗と一致する。」と、条件を二段階でクリアする整数を見つけなければならず、そのような連続する整数は稀であると考えられる。特に②ではすべての素数の個数が一致しなければならないので厳しい。
そのため、整数 l(n、k、m)は一通りしかないと推測される。
k＝2 の場合は、ある数の階乗に含まれる 2 種塁のべき乗とそれ以外の
奇数の積が、連続する整数の積にはなりえない）（奇数の積が大きくなりすぎる）事を証明することで存在しない事を示せそうだと考えた。

４．結論
(n、k、m)の組が 1 パターンしか存在しないことを証明することができなかった。
ただ、1 パターンしかないと考える。

三角比の和と積の関係性

1.目的

$k, n(1 \leqq k \leqq n, k \in N, n \in N)$、$\sum_{k=1}^{n} cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi = \frac{1}{2}$ ・・・①、$\prod_{k=1}^{n} cos\frac{k}{2n+1}\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ・・・②と予想しこの 2 式を証明する。

2.方法

①の証明について、ベクトルで考える方法と、複素数平面で考える方法の 2 つのアプローチで考えた。また②の証明について、積和の公式を元に考えた。

3.結果

余弦の総和の式について、直交座標系において、x 軸からの角度 2πを 2n+1 等分する。2n+1 本の直線をベクトルで結び、正 2n+1 角形を作る方法、複素数平面において偏角$\frac{2l-1}{2n+1}\pi\left(0 \leqq \frac{2l-1}{2n+1}\pi < 2\pi\right)$を満たす極形式を全て足し合わせ、$\cos\theta = cos(2\pi\text{-}\theta)$であることを利用する方法、アプローチでそれぞれ①の式を証明し、更に$\sum_{k=1}^{n} cos\frac{2k}{2n+1}\pi = -\frac{1}{2}$ ・・・③であることを証明した。

また余弦の総積の式について、n にいくつかの自然数を代入し、それらの式に積和の公式と先ほど求めた余弦の総和の式を用いると、結果として出てくる$cos\pi$の個数に規則性があることが分かった。

4.考察

①を奇数和、③を偶数和とする。第一、第二象限において、原点と結んだ線分と始線の為す角が$\frac{m}{2n+1}\pi(m \in N, 0 \leqq m \leqq 2n+1)$を満たす単位円上の点を全て取り出し、それらを要素 A とする。そのとき、奇数和が取り出す点は要素 A のうち第一象限に近づいた点であり、要素 A の余弦の総和と奇数和を比べると奇数和は正の数にズレが生じる。ここで、そのズレが$\frac{1}{2}$になるだろうと考える。また偶数和も同じことが言え、偶数和が取り出す点は第二象限に近づいた点であり、要素 A の余弦の総和と比べると負の数にズレが生じ、そのズレが$-\frac{1}{2}$だと考えられる。

5.結論

$\sum_{k=1}^{n} cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi = \frac{1}{2}, \sum_{k=1}^{n} cos\frac{2k}{2n+1}\pi = -\frac{1}{2}$を示した。また$\prod_{k=1}^{n} cos\frac{k}{2n+1}\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^n$の証明には$cos\pi$の個数の規則性から証明ができそうだと考えた。