大阪府立大手前高等学校　数学科

Math OSSH

OSAKA SUPER SCIENCE HIGH SCHOOL

2011年度
コアSSH「数学」

研究報告書

マス・フェスタ
数学生徒研究発表会

●指導助言

大阪大学大学院理学研究科教授　臼井三平 様
奈良女子大学理学部教授　小林　毅 様
大阪大学大学院理学研究科教授　伊吹山知義 様
大阪市立大学数学研究所所長　河内明夫 様
大阪府立大学大学院理学系研究科教授　入江幸右衛門 様
中央大学理工学部教授　藤田岳彦 様
大阪大学大学院理学研究科准教授　高橋篤史 様
神戸大学大学院理学研究科教授　中西康剛 様
京都大学大学院理学研究科教授　並河 良典 様
大阪府立大学高等教育推進機構教授　山口　睦 様
大阪府教育センター情報・技術研究室室長　坂井啓祐 様
大阪府教育センターカリキュラム研究室指導主事　木下伝二 様

マスフェスタ風景


コアSSH 数学生徒研究発表会
マス・フェスタ
Aが勝つ組み合わせ
万華鏡の研究
考察
ガモフの宝探し問題に対する
アプローチ

●発表校一覧

第１会場（４Ｆ　第１会議室）

①明治学園中学高等学校　「誕生日は何曜日」
②大阪府立千里高等学校　「巴戦」
③西大和学園高等学校　「三角立方数・四面立方数について」
④大阪府立大手前高等学校　「正六面体の可視面数について」
⑤名城大学附属高等学校　「万華鏡の研究」
⑥石川県立七尾高等学校　「あみだくじは本当に公平か」
⑦茨城県立日立第一高等学校　「実験で円周率（π）を発見しよう」
⑧市川学園市川中学・高等学校　「ゲームの必勝法」

第２会場（４Ｆ　第３会議室）

①福岡県立小倉高等学校　「 F. L. T. の人物史」
②立命館高校　「塩山幾何学を用いたボロノイ図の解析」
③大阪府立天王寺高等学校　「ファレイ数列について」
④名古屋市立向陽高等学校　「結び目理論」
⑤大阪府立大手前高等学校　「２１ゲームとその発展」
⑥岐阜県立岐山高等学校　「代数方程式の解法に関する研究」
⑦大阪府立生野高等学校　「ゲーム理論とその応用」
⑧長野県飯山北高等学校　「和算・算額」
⑨栃木県宇都宮女子高等学校　「フラクタル集合」

第３会場（７Ｆ　大ホール）

①愛媛県立松山南高等学校　「『ガモフの宝探し問題』に対するアプローチ」
②広島大学附属高等学校　「ヒマワリの種子配列の数理モデルによる再現と解析」
③大教大附属高校天王寺校舎　「歪み絵の発展における数学の貢献について」
④愛知県岡崎高等学校　「のりしろ問題」
⑤静岡県立磐田南高等学校　「カオスとアトラクト」
⑥東海大学付属高輪台高等学校　「様々な場合におけるポーカーの確率」
⑦茨城県清真学園高等学校　「月の満ち欠けの形を表す数式」
⑧青森県立三本木高等学校附属中学校　「数学を活用したもの作り
～グラフ電卓を用いたグラフアート～」
⑨大阪府立大手前高等学校　「線の交わりと幾何学的確率」

誕生日は何曜日

明治学園中学３年　佐々木実咲

要旨

私はＳＳ数学研究会で「数の余り」をテーマに研究をしました。その中で、７で割った余りに注目して曜日の計算法を考えました。平成から始めて、昭和、大正、西暦（の一部）に拡張しました。

１．目的

平成Ａ年Ｂ月Ｄ日は何曜日かを計算する。

２．方法

ルール１．１月、２月は前年の 13 月、14 月とする。

ルール２．Ｂに対して次のＣを対応させる：

B	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	6	2

ルール３．$N=A+[A/4]+C+D$　（[　]はガウス記号）を計算する。

ルール４．Ｎを７で割った余りによって曜日が計算できる。

余り	0	1	2	3	4	5	6
曜日	日	月	火	水	木	金	土

３．結果

例．平成 23 年８月 27 日の曜日計算

$A=23$, $B=8$ より $C=0$, $D=27$ より $N=23+[23/4]+8+27=55$.

55 を７で割った余りは６なので土曜日。

４．考察

毎年の３月１日の曜日を基準に考える。平年は１つ、閏年は２つずつ曜日が進む。７で割った余りが０のとき日曜日になるようにＢとＣを対応させた。

５．結論

平成 23 年は西暦 2011 年でその差 1988 は７でも４でも割り切れる。したがって２の方法は西暦に対しても成り立つ。ただし、1900 年と 2100 年は４で割り切れても閏年ではないので、1900 年と 2100 年の間の年に対して成り立つ。

６．キーワード

ガウス記号　７で割った余り

2221　大阪府立千里高等学校

巴戦の条件を変えたときの確率の変動

加藤　周平　　網浦　奏論　　林　貴光

要旨

相撲の優勝決定法の巴戦。通常２連勝したものが勝者とされ、その場合は始めに戦った側が 5/14(=35.7%)、戦わなかった側が 4/14(=28.6%)の確率で勝者となる。勝者となる条件を三連勝とすると、始めに戦った側が約 35%、戦わなかった側が約 30 %の確率で勝者となることがわかった。これは三連勝のほうがより公平ということである。

１．目的

二連勝の確率の偏りが大きかったので、もっと偏りを減らせる方法があるか調べるため。

２．方法

始めに戦う二人を A, B、残りの一人を C とする
n 回目に A が勝つパターンに AA, AC, BB, BC をある法則で付けるということを考え、漸化式を立てた。
同様に n 回目に C が勝つパターンに AA, AC, BB, BC をある法則で付けるということを考え、漸化式を立てた。

	BB	A	BC	AA	合計
4	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	2
6	0	2	0	0	2
7	0	0	1	2	3
8	2	1	2	0	5
9	2	4	3	1	10
10	1	5	3	4	13
11	5	4	8	5	22
12	9	13	12	4	38

３．結果

どちらの漸化式も解くことができなかった。そこで、漸化式をプログラムで組み、近似値を求めることにした。十進 BASIC でプログラムを組んだところどちらも 200 回ほどで数値が動かなかった。結果、A, B が勝者となるときの確率が約 35.2%、C が勝者となるときの確率が約 29.6%となることがわかった。

４．考察

二連勝のときの確率と比べると A, B の勝者となる確率は約 0.5%減少し, C の勝者となる確率は約 0.9%増加した。このことから、勝者となるための連勝数を増やすことで、三人の勝者となる確率が均等になっていくと考えた。

５．結論

２連勝で勝者を決めるよりも３連勝で勝者を決めた場合のほうが確率に偏りがなくなっていく。

６．参考文献

神戸大学　入試問題

７．キーワード

巴戦　相撲　確率　プログラム　漸化式　10 進 BASIC

1924　西大和学園高等学校

三角立方数・四面立方数について

清水一慶　　友澤啓太　　最上伸一

要旨

三角立方数・四面立方数を導出することを目的とした，“3 次の Pell 方程式”の解の存在についての研究

1. **目的**

昨年小倉で開催された数学コンソーシアムでも発表した前共同研究報告``On Triangular-Square Numbers”を奈良先端科学技術大学(NAIST)でも発表した際に，私達によせられた質問に対して答えが出せなかった。これをきっかけとして研究対象とした。

2. **方法**

三角数・立方数･四面数について碁石をその形に並べたものと考えることで導かれる一般項から，それぞれ関係式を導き出した。えられた条件の方程式が Fermat の最終定理の n=3 のものと似ていたため，この定理の証明を理解することにし，それを参考にすることで，結論を得ることにした。

3. **結果**

三角立方数・四面立方数ともに 1 しか存在しないことがわかった。

4. **考察**

Pell 方程式において 2 次のものと 3 次のものでは大分様相が違っていた。

考えてみると，Fermat の定理も「2 つの立方体形に並べた碁石を並び替えて 1 つの立方体形にすることはできない」というように読み替えることができる。

ともすれば，証明方法に共通な部分があるのも合点がいく。

5. **結論**

非常に面白い問題だった。これからも研究を続けたい。

なお，今回の研究報告の詳細は(補題・本題の証明等)は西大和学園 HP 上で

「トップ＞学校生活＞豊かな人間形成＞部活動＞数学研究」

と移動していただき，「三角立方数・四面立方数について」をクリックしていただければ，閲覧することが可能です。

6. **参考文献**

「代数系入門」松坂和夫著

MATHEMATICS.PDF (http://mathematics.web.infoseek.co.jp/) 掲載の

『n=3 における Fermat の定理』

7. **キーワード**

環論，Eisenstein 整数，Fermat の最終定理

2010　大阪府立大手前高等学校

正六面体の可視面数

駒井瑞樹　谷河杏介　宮堺陽一

概要

ルービックキューブを眺めているときに５面以上は同時に眺めることができないということに気づき、この理由を数学的に考察した。

１．準備

上で述べた問題を数学的に表現すると、「座標空間上に原点が中心で一辺の長さが1の正六面体をおく。そして右目・左目の位置$R(p,q,0)$、$L(p,-q,0)$を設定する。このときそれぞれの視線のベクトルを$\vec{S}_R,\vec{S}_L$とする。ただし、目の焦点は原点に合わせているものとする。」

２．見えることの定義

ある面が見えていることは次の（ⅰ）（ⅱ）を同時に満たしていることである。ただし、ある面F_1の法線ベクトルを$\vec{n}$とする。

（ⅰ）$\vec{S}$と$\vec{n}$がなす角αが$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$、つまり$\vec{S}\cdot\vec{n}<0$

（ⅱ）面F_1の任意の点と、点Rまたは点Lの線分がF_1以外の面と交点を持たない。

また、右目または左目のどちらかで見えているとき、その面は見えているとする。

３．考察

概要で述べた問題は、「正六面体において条件（ⅰ）（ⅱ）を満たす法線ベクトルは４本以下である」と言い改めることができる。

正六面体が回転するとき縦回転の角度をθ、横回転の角度をϕとし、物体の回転を縦方向と横方向だけに限定する。この回転で立方体の可視面数を考察する。

４．結果

（Ⅰ）目の幅の長さが正方形の一辺の長さ以下であるとき、正六面体の可視面数は３面が最大である。

（Ⅱ）目の幅の長さが正方形の一辺の長さより長く、面の対角線の長さより短いとき、正六面体の可視面数は４面が最大である。

（Ⅲ）目の幅の長さが面の対角線の長さより長いとき、正六面体の可視面数は５面が最大である。

2322　名城大学附属高等学校

万華鏡の研究

神戸 利彩　鈴木 結雅　村永 亘　吉田 有輝

要旨

私たちは万華鏡の形と中に映る多面体がどのように関係しているのか調べている。多面体の外側に着目し、入射角とテーパー角を文字でおくと、一部の光が自分の方に戻ってくるという公式を完成させた。今後は、光の角度幅について探求していく。

1. 目的

万華鏡の形と中に映る多面体との関係を調べる。

2. 方法

① 覗き穴から入る光の反射の仕方を見る。

② スリー・ミラー・システムで見られる光の角度幅を調べる。

3. 結果

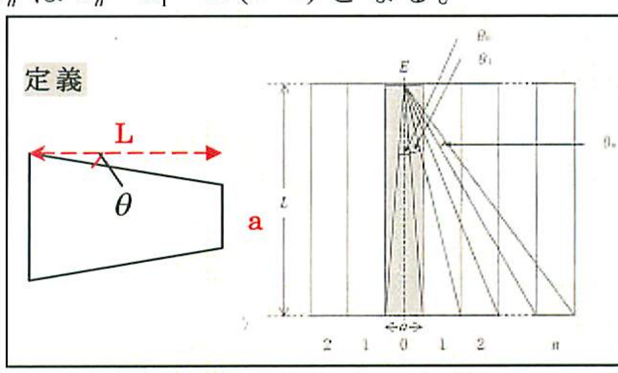
① 覗き穴から入る光の n 回目入射角λ_n は $\lambda_n = \lambda_1 - 2\theta(n-1)$ となる。

② スリー・ミラー・システムの時

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) = \frac{\frac{a}{2} + na}{L}$$

テーパード・ミラー・システムの時

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) = \frac{\frac{a}{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta\right)}{1 + \frac{a}{L}\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\theta}$$



4. 考察

結果①よりテーパー角が小さいほど反射回数が多い。

結果②より $\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) < \tan\frac{\theta_0}{2}$ のとき像ができなくなるのではないか。

5. 結論・展望

入射角とテーパー角から反射回数が求められる。今後は、

$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) < \tan\frac{\theta_0}{2}$ が成り立つことを証明する。

6. 参考文献

ジオメトリック・アート　カスパー・シュアーベ＋石黒敦彦　著

7. キーワード

万華鏡　テーパード・ミラー・システム　テーパー角

1911　石川県立七尾高等学校

あみだくじは公平か

橋孝典　岡田拓馬　松浦哲

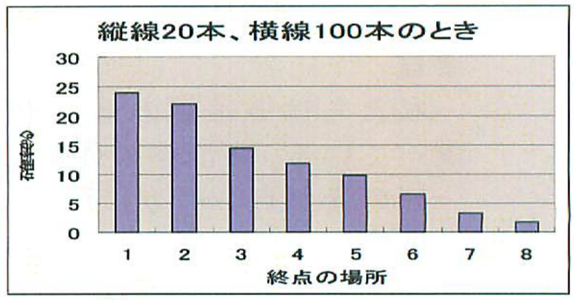
要旨

コンピュータシミュレーションを使ってあみだくじは公平なのか調べた。始点の真下に来る確率が一番多くなり、あみだくじは本当に不公平なのかと疑問に思った。縦線が 3 本の場合でそれぞれにたどり着く確率を考えた。

目的

横線、縦線の数を決めてシミュレーション実験を行った。なお、横線の場所は試行毎にコンピュータがランダムに設定した。また、始点の場所は、左端とした。1 度にコンピュータは 1000 回の試行を行う。シミュレーションでは 5 度、つまり 5000 回同じ条件のもとであみだくじを行った。（※9 本以降の確率は 0 であった。）

この実験から、あみだくじは本当に公平ではないのかを理論的に計算で導けないかを考えた。



方法

縦線が 3 本のときの確率を考える。また、横線は必ず今ある横線下に引くとする。終点の確率を左から、a_n, b_n, c_n とする。横線の数を n 本とし、横線を 1 本足して $n+1$（本）としたとき $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ は、それぞれ①のようになる。これらの式を行列で表すと、その下のようになる。これを変形したものが②である。右側の (a_0, b_0, c_0) とは、横線の数が 0 本のときの確率を表す。例えば、始点を左端に置いたとき、横線が 0 本なので、(a_0, b_0, c_0) の値は、それぞれ、1、0、0 となる。このときのそれぞれにたどり着く確率は左側の縦 3 つになる。このことから始点の位置を変えてもこの式で計算できることが分かる。$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ を行列 X とし、n に $n = 1,2,3,4,\cdots$ を代入して計算すると、③の行列が得られた。詳しく見てみると、n が奇数のとき、左上の数字だけを取り出し、数列 $\{p_k\}$ を考えた。この数列 $\{p_k\}$ は漸化式で表すと、$p_{k+1} = 4p_k - 1$ であり、$p_k = \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1} + \frac{1}{3}$ となる。同様に、n が偶数のときの計算をした。左上の数字だけを取り出し、数列 $\{q_k\}$ を考えた。この数列 $\{q_k\}$ は漸化式で表すと、$q_{k+1} = 4q_k - 2$ であり、$q_k = \frac{4}{3} \cdot 4^{k-1} + \frac{2}{3}$ となる。そして、それらの結果から、行列 X は奇数の場合と、偶数の場合とにわけて表すと④のようになる。grapes というソフトを使って奇数のときの 2 つの式のグラフを書いたところ、$k = 7$ あたりで 2 つの値が $\frac{1}{3}$ でほぼ一致することが読み取れた。このことから $k \geq 7$、つまり $n \geq 13$ のときに、どの確率もほぼ $\frac{1}{3}$ になることがわかった。同様に、偶数のときのグラフも考えた。$k = 6.5$ あたりで 2 つの値が $\frac{1}{3}$ でほぼ一致することが読み取れた。このことから $k \geq 7$、つまり $n \geq 14$ のときに、どの確率もほぼ $\frac{1}{3}$ になることがわかった。

よって、縦線が 3 本のときは横線が 13 本以上あれば理論上公平になる。ということがわかった。

①

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

②

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

③

●n=1のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　●n=2のとき $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

●n=3のとき $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　●n=4のとき $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

●n=5のとき $\begin{pmatrix} 11 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 11 \end{pmatrix}$　●n=6のとき $\begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

④

$n = 2k-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \end{pmatrix}$$

$n = 2k$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \end{pmatrix}$$

結果

縦線が 3 本のときは横線が 13 本以上のとき理論上公平になることがわかった。

考察

横線を一定以上の本数にするとほぼ公平できる。

結論

シミュレーション実験で、あみだくじの結果が不公平になったのは横線の本数が足りなかったからだと考えられる。ある一定の本数以上の横線を引けば、公平になり得る。

参考文献

パソコンで遊ぶ数学実験

キーワード

あみだくじ

1902　茨城県立日立第一高等学校

実験で円周率を求めてみよう

白木尚武　　梅原茉穂　　川島亮一

要旨

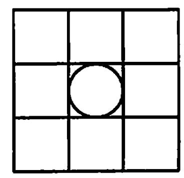
数学の面白さを伝える為に、視覚化する事で伝わりやすくなるのではと思い、その術を探していると模擬実験により数学や物理の計算を行う「モンテカルロ法」を知り、その中に「ビュフォンの針」という π を求められる問題があるのだが、高校の知識では理解する事が難しかったので、他のモンテカルロ法を用いる術を探ったのだが、視覚化には適さなかった為、改良を加えた結果このような研究に至った。

1．目的

コインと紙さえあれば何処でも誰でも簡単な計算によって円周率を求める事が出来るようにする。

2．方法

コインの直径と同じ幅の格子状の用紙を作成し、その用紙にコインを何枚か投げる。その投げたコインの中で格子点に触れるものの割合を数え、その四倍が円周率となる。



3．結果

これまでの実験では 3.14 を上回ることは殆どないが、3.14 から遠ざかる事はない。

4．考察

手に入れ易いコインとして今回は十円玉を用いた。しかし使用済みのものに関しては、直径が 23.5mm を下回るものが殆どである為、3.14 を下回っていると予想される。また、格子点に「触れる」「触れない」の判定基準が曖昧になることが多い。

5．結論

手に入れ易い円盤で十円玉以上に直径に誤差のないものを採用したり、格子の幅を変えることによって、より 3.14 に近づく場合がある。そこで当初の目的を達成するために、今後も検討を重ねていきたい。

6．参考文献

モンテカルロ法による円周率の計算

http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/montecalro.html

7．キーワード

モンテカルロ法　円周率　ビュフォンの針

2103　市川学園市川高等学校

ゲームの必勝法

木内寛允　齊藤優貴子　原田翔悟　八木橋遥

要旨

１×１のマスから構成される長方形の板チョコを二人のプレイヤーで次のルールに従って交互に食べていくチョンプというゲームについて研究した.

ルール ： 自分の手番で必ず１マス選択し，それとその右側または上側にあるすべてのマスを食べる．左下の 1 マスには毒が入っていて，それを食べたプレイヤーが負けとなる.

長方形チョンプにおいては先手必勝であることが知られている．我々は長方形以外の盤面に対するチョンプを考え，以下のような結果を得た.

1 行目に c 個, 2 行目に b 個, 3 行目に a 個のマスをもつ盤面を(a,b,c)と表記することにする．このとき(2,a+1,a+3)チョンプは後手必勝であることを証明した.

1 行目に a 個, 2 行目に b 個, 1 列目に x 個のマスをもつ盤面を(a,b;x)と表記することにする. (a,b;x)チョンプに関しては E.R.Berlekamp らが 1980 年に示した次のような定理がある.

定理　(E.R.Berlekamp et al , 1980)

(a,b;x)チョンプにおいて後手必勝の盤面は以下のようなものである.

$$\text{a+b:even} \Rightarrow x=\left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor$$

$$\text{a+b:odd} \Rightarrow x=\min\left\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\right\}$$

この定理に対する部分的な証明を与えた.

参考文献

[1] Xinyu Sun, Improvements on Chomp, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2 (2002), G1.

キーワード

チョンプ(chomp)，ゲームの必勝法

2232　福岡県立小倉高等学校

F. L. T. の人物史

砂川 友里恵　　中山 万莉

要旨

F.L.T.（フェルマーの最終定理）は 1995 年に A.ワイルズによって完全に証明された。問題提起から 350 年以上の後のことである。この間、多くの数学者がこの証明に挑み、多くの数学が生まれた。証明の本質的な理解はできないが、解決に至る歴史もまた興味深い。この証明に関わった偉大な数学者達を紹介する。

1．目的

数学的な知識を深めて、フェルマーの最終定理に挑むのではなく、証明に挑戦した数学者達の歴史を学び、より広い意味で数学的な知的好奇心の高揚につなげて行きたい。天才と呼ばれる数学者達の、興味深い人物像について理解を深めることによって、数学に対する思いを深めたい。

2．方法

フェルマーの最終定理に関わった数学者達について、その数学的な業績だけにとらわれず、書籍やインターネットなどを用いて様々なエピソードや名言を集めてみた。特に数学者本人の人物画や写真も入手でき、数学的な内容とは違った本人の人となりも想像できる。

3．結論

社会事象のあらゆる場面で数学は判断や分析の基礎となっている。数学の応用的な側面はその魅力の一つであるが、一方でその実際的な価値が問われることなく、数学者の明晰な頭脳と数学論文の蓄積によって発展してきた数学があることが良く分かった。数学者の偉大なる知的生産活動を知り、今までとは違う数学の魅力を感じることができた。

4．参考文献

「フェルマーの最終定理」　サイモン・シン（新潮文庫）

5．キーワード

フェルマー、オイラー、ソフィー・ジェルマン、クンマー、谷山豊、志村五郎、ワイルズ

2219　立命館高校

塩山幾何学を用いたボロノイ図の解析

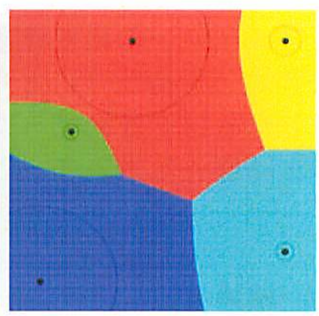
三村 知洋　宮崎 航輔　村田 航大

要旨
平面上の任意の図形の上に塩を振りかけたときにできる稜線で、平面幾何における様々な性質を表現できる。こうした塩山による幾何学を用いて生物モデルのボロノイ図に応用した。特に重み付きのボロノイ図モデルにおいて、細胞核の大きさを図形の穴の大きさに見立てて、その大きさを変えることで再現できることがわかった。

1．目的
平面上の任意の図形を切り抜いた板上に塩を振りかけると、塩山が描く稜線ができる。この塩山の描く稜線を用いて、生物モデルであるボロノイ図を塩山で再現する。

2．方法
平面上の任意の図形を切り抜いた板状に塩をかけて、そこにできる稜線を調べる。そしてその後、コンピューターによるシミュレーション結果と合致するかを検証する。

3．結果
半径の大きさが等距離の場合領域は直線で分けられボロノイ図と一致し、半径の大きさを変えてそれを重みと見立てると曲線の稜線がでてきて加法的重みつきのボロノイ図と一致した。



4．考察
加法的重みつきのボロノイ図と塩山が一致することから、半径の大きさとボロノイズの重さは同じことが考えられる。

5．結論
塩山とボロノイ図が一致したことから、ボロノイ図の応用である生物の棲み分けや最適配置問題に応用できることがわかった。

6．参考文献

・　折り紙と塩山で学ぶなわばりの幾何　加藤 渾一
・　塩が教える幾何学　黒田 俊郎

7．キーワード
塩山　稜線　ボロノイ図

1921　大阪府立天王寺高校

ファレイ数列

荒木ちさと　達川雄貴　加藤貴之　楠本賢太　山下卓人　田口勝弥

要旨

While studying Farey Sequence, we found that it has a property and that a different sequence also has the property. We thought about laws in the sequence similar to Farey Sequence and tried to find its general terms.

目的

ファレイ数列に興味を感じ、そこから派生する、新たな数列について考察する。

考察

n以下の分母を持つ0以上1以下の全ての既約分数を小さなものから順にならべたものをファレイ数列とする。

また、E_1を 0/1,1/1 の数列とし、E_nはE_{n-1}において、隣り合う分数の分母どうし、分子どうしを足して得られる分数をその２分数の間にいれたものについて、漸化式を用いて分子の一般項を求めた。

$$F_1\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{1}$$
$$F_2\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$$
$$F_3\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$$
$$F_4\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$$
$$F_5\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

$$E_1\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{1}$$
$$E_2\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$$
$$E_3\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$$
$$E_4\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$$
$$E_5\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

参考

大阪市立大学の授業

キーワード

ファレイ数列　漸化式　既約分数　基本三角形　Minkowski's ? Function

フィボナッチ数列　連分数展開　大阪市立大学理学部　Stern's diatomic series

1814　名古屋市立向陽高等学校

結び目理論

河田 智明　　湯澤 佑介　　樋口 実乃莉

要旨

階数は結び目の不変量の一種であるため，特定の法の値に対し、ある結び目の階数が法の値と異なる場合その結び目は自明でないと分かる。しかし与えられた法の値が 2 の累乗である場合、階数が常に法の値と等しくなるため、そのような法の値を結び目の非自明性を証明するのに用いることができない。我々は階数がこのような挙動を示す理由を解明した。

1．目的

結び目の不変量の一つ階数が 2 の累乗の法の値において、常にその法の値と等しいことを証明する。

2．方法

結び目の射影図の交点では下の線が分断されるが、この分断された各部分を弧と呼ぶ。この弧には「重み」が付与され、結び目の各交点には下の弧の重みを y, z、上の弧の重みを x としたとき、$2x \equiv y + z \pmod{p}$ という交点条件によって重みは制約される。p は法の値であり、重みは $0 \leqq w < p$ であるが、これらを全て満たす重みの組み合わせ数が階数である。

ここで重みから計算されるある不変量を考えると交点の下の 2 つの弧においてこれが常に等しいとき、すべての弧において等しいことが分かっている。

これを利用すると、法 $p = 2^!$ において，階数= 法の値となることを、重みを二進数に変換しその各桁が各要素と対応する数列を考えることにより数学的帰納法を用いて証明することができる。

3．結果

法 $p = 2^!$ が与えられると、結び目のすべての重みが等しい値となるため、重みは p 通りとなり、階数=法が証明される。

4．考察

結び目が「解けない」ことを証明するのに際し重みと階数を用いる場合、法の値を $p= 2^!$ として階数を計算した場合、いかなる解けない結び目においても階数≠法となることが無いため、それが解けない結び目であるということを証明することはできない。

5．結論

結び目が「解けない」ことを証明する際には、法の値は $p\neq 2^!$ とするべきである。

6．参考文献

村上 斉.（1990）.『結び目のはなし』. 遊星社.

7．キーワード

結び目理論，結び目，不変量，自明な結び目，階数

2010　大阪府立大手前高等学校

２１ゲームとその発展

木田智子　　佐田美帆

要旨

２１ゲームの必勝法を考える。また、数字を変えた場合の○○ゲームや、一回に言える数字の個数を変えた場合の先手後手の優劣についての研究。そして、ルールを反対にした２１ゲームをチーム制で行った場合の先手後手の優劣の研究。

１．目的

２１ゲームにおいての必勝法を見つけること。また、２１ゲームだけでなく、○○ゲームにした場合について、一回に言える数字の個数を変えた場合の先手後手の優劣や、ゲームをチーム制で行った場合の勝敗の変化を調べ、どうやったら絶対に勝つことができるのか、必勝法を見つけ出すことにした。

２．方法

ゲームの最終地点から、順に繰り下がっていき、スタート地点に戻るまでを考える。

３．結果

２１ゲームの必勝法や、２１ゲームは後手必勝のゲームであることが分かった。また、○○ゲームについては、一回に言える数字の個数を多くしていけばしていくほど、先手が有利になるということが分かった。そして、ルールを反対にした２１ゲームをチーム制にした場合、先手必勝であることが分かった。

４．考察

いろいろな数字において、先手後手どちらが勝つのか調べていった結果、先手の方が勝つことが多かったので、何か規則性があるのではないかと考え、上に示した結果が得られた。

５．結論

２１ゲームは後手必勝のゲームであり、必勝法が存在する。ルールを反対にした２１ゲームにおいて、チーム制で行った場合は先手が勝つ。また、○○ゲームでは一回に言える数字の個数を多くしていけばしていくほど、先手が有利になる。

６．参考文献

http://www.geocities.jp/takitaatu/N1.html

７．キーワード

２１ゲーム

1812 岐阜県立岐山高等学校

代数方程式について

鷲見 拳　羽賀 隆太

要旨

代数的という意味を確かめた上で、三次方程式の解の公式を求めた。また、四次方程式の解の公式を求めた。そして五次方程式が代数的に解けないことの証明を試みた。尚、n 次方程式について、x^n の係数が1の場合を考える。

1. 目的

・代数方程式の仕組みを知り、知識をつけるため。
・研究する力、まとめる力をつけるため。
・知的好奇心と探求欲を満たすため。

2. 方法

・三次方程式の解の公式

チルンハウス変換から、$l^3+m^3+n^3-3lmn=(l+m+n)(l^2+m^2+n^2-lm-mn-nl)$ の形を適用する。

・四次方程式の解の公式

チルンハウス変換から、$(y^2+l)^2=(my+n)^2$ の形へ変形する。

・五次方程式が代数的に解けないことの証明

四次までがなぜ解けたかを冪根に注目して解析し、五次になると使われる冪根が限られることを証明する。

3. 結果

次数が四次までの代数方程式は一般に、代数的に解ける。しかし、次数が五次以上の代数方程式は一般に、代数的に解けない。

また、三次方程式の解法が四次方程式を解く際に使うことができ、三次方程式、四次方程式の解は、平方根、三乗根、四則演算で表すことができることも分かった。

4. 参考文献

共立出版　Jean-Pierre Tignol /著　新妻弘 /訳「代数方程式のガロア理論」
講談社　木村俊一著「天才数学者はこう解いた、こう生きた 方程式四千年の歴史」

5. キーワード

代数方程式　代数的解法　対称性

2220　生野高等学校

ゲーム理論とその応用

大北健太郎　佐田憲昭　田端澄矢　肥下祐輔　藤本愛　藤原玄　望月優也　守屋夏樹

要旨

相手が存在するゲームにおいて、その勝ち方を論理的に考察するのがゲーム理論である。本発表においては、そのゲーム理論を具体的な事例を出しながら考察し、「囚人のジレンマ」、「ナッシュ均衡」といったゲーム理論における重要概念を理解し、それを自らの生活のどのような場面で活用できるかを考える。

１．目的

現在、ゲーム理論の考え方は、経済やビジネス、ギャンブルなどさまざまな場面に応用されている。しかし、具体的にどのように応用されているのかをきちんと理解している人は少ないといえる。本発表では、ゲーム理論について知らない人でもゲーム理論の考え方が理解でき、またそれをどのように応用していくかを示唆することを目的とする。

２．方法

文献の研究を基に、具体的な事例を考えながら、より実践的にゲーム理論を理解する方法を用いる。

３．結果

ゲーム理論の基礎から進み、ナッシュ均衡が現象世界におけるさまざまな事例に応用できることがわかった。また、ナッシュ均衡が通用しない事例も発見することができた。

４．考察

ゲーム理論の例を考えていく中で、ナッシュ均衡の状態、囚人のジレンマの状態になっているかを判別しづらい事例もあった。
ゲーム理論をより深く学ぶことで、より複雑な事例やゲームにおいてもゲーム理論を適用できるだろう。

５．結論

現象世界のさまざまな場面で囚人のジレンマ、ナッシュ均衡の状態が確認できる。

６．参考文献

ゲーム理論トレーニング　逢沢　明　かんき出版

７．キーワード

ゼロサムゲーム、ミニマックス戦略、囚人のジレンマ、ナッシュ均衡

２２１４　長野県飯山北高等学校

和算・算額

竹之内礼　小林彩美　上倉昇悟

要旨

和算とは中国の数学に影響受け、江戸時代に日本で独自に発達した数学のことである。

算額とは、絵馬のように神社に奉納するもので、和算の研究や数学の力が上達する祈願、家内安全のような意味も持つようになり、和算の発達を促したとも言える。

１．目的

私たちの住む飯山市に隣接する木島平村に多くの算額がある理由を明らかにし、また自分たちで算額を作ってみること。

２．方法

近隣の算額の奉納場所を調べると、「①その分布が川沿いにあること」「②千曲川の右岸(木島平村)・左岸(飯山市)で分布に違いがあること」に疑問を持った。そこで、長野県和算研究会の北原先生にお話を聞いたり、飯山市と木島平村の歴史的背景や地理的な特徴から調べた。また、算額見学会で『算額をつくろうコンクール』についての話をうかがい、「③算額を作って応募するための図形問題を作成」した。

３．結果　４．考察

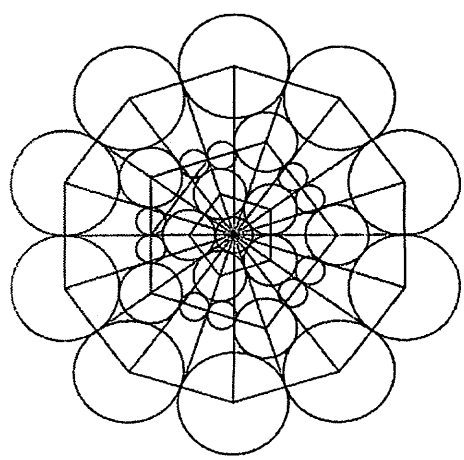
① 和算の知識を応用し、測量技術をもつ和算家も多くいた。そのような和算家が新田開発などの測量を手伝い、地域に貢献したと考えられる。しかし、すべての和算家が測量技術を持っていたとは考えられない。

② 師匠の存在や政治的な理由もあり、和算家の多くが千曲川右岸に集中し、左岸には少なかったという理由を考えた。しかし、飯山市常郷の真當院などの例から、左岸にも算額はあったと考えられる。非現存の算額や、データとしても残っていない算額は、飯山戦争や度重なる大火・水害などで消失してしまったのではないかと考えられる。

③ 右図は私たちが作成した問題である。

問：半径 8.1cm の円に内接する正十角形がある。
　　中心の円の半径を求めよ。

答：中心の円の半径は 0.8cm である。



５．結論

① 和算家や算額が直接農業には関係しているとは言い切れない。

② 飯山市では算額は消失してしまったものが多いが、和算はむしろ民間のレベルで発達した。

６．参考文献

飯山市誌（飯山市）　木島平村誌（木島平村）　幻の算額

７．キーワード　和算・算額

2002　栃木県立宇都宮女子高等学校

自然の中の図形「フラクタル集合」

青海　美沙希　　永野　若葉

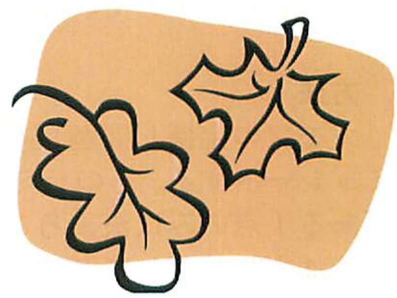
要旨

フラクタルについて興味を持った私達は、フラクタル図形とそれに関連する事柄についての理解を深めるとともに、様々な検証を通じてフラクタルという性質を用いた応用について考察した。

1．目的

フラクタルについての理解を深め、その性質の利用について考察する。

2．方法



- Mathematica を用いての検証
- インターネットおよび文献を用いた調査
- ボックスカウント法によるフラクタル次元の測定　等

3．結果

フラクタル図形であるパセリは、新鮮なものとそうでないものではフラクタル次元が異なる。

4．考察

新鮮でないものの方がフラクタル次元が高い。フラクタル次元を用いることで情報の複雑さを客観的に得ることができることが分かった。

5．結論

自然界に実際に存在するものを数式で表すことは可能である。また、フラクタル次元とその図形自身の性質を用いることで、様々な事象について新たな視点での考察が可能になる。

6．参考文献

- フラクタル幾何学　共立出版 Kenneth Falconer/著　服部久美子・村井浄信/訳
- 第２版　はやわかり　Mathematica　共立出版　榊原　進/著
- MICHAEL F. BARNSLEY　FRACTALS　EVERYWHERE SECOND EDITION　Morgan Kaufmann　等

7．キーワード

１次変換　自己相似　反復関数系　MATHEMATICA　次元　収束　ランダム

2231　愛媛県立松山南高等学校

「ガモフの宝探し問題」に対するアプローチ

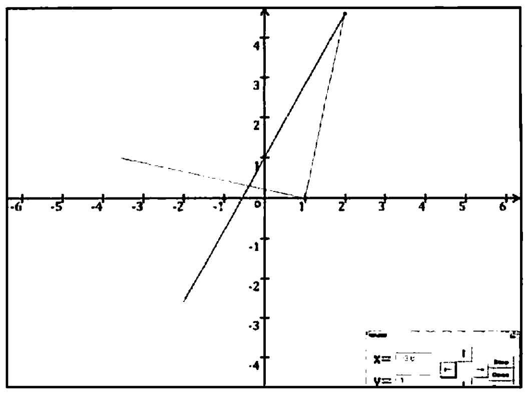
紙田　恵治　　田尾　　稔　　樋口　裕二　　藤原　侃汰

要旨

SSが始まって最初に興味を持ったのが複素数であった。複素数について調べていくうちに、複素数平面の存在を知り、それについて学習した。利用するもので適した問題はないかと考えたときに「ガモフの宝探し問題」に出会い、それに対するいろいろなアプローチを考え、それぞれの解法を比較することとした。

１．目的

「ガモフの宝探し問題」についての証明をいろいろな定理等を用いて行い、比較することによって、それぞれの特徴を捉える。



２．方法

「ガモフの宝探し問題」をxy−平面上に記し、シミュレートする。そのシミュレーションから宝がある１点のみに決まることがわかるので、それを４人それぞれで証明し、正しいかどうか検証を行う。

３．結果

証明の種類としては、三角関数を用いたもの、図形の回転移動を用いたもの、xy−平面、複素数平面を用いたものができあがった。複素数平面については、高校内容ではないが、学習することで知識の幅を広げることができた。

４．考察

三角関数の加法定理を用いた証明は式が多くなってしまい、検証するのに時間と労力がかかった。

５．結論

１つの問題に対して、実際にいろいろな角度からアプローチをかけることで視野が広がった。今後の研究に対しても、さまざまな角度から１つのものを考察する力を養うことにつながった。

６．参考文献

Newtone 別冊“ありもしない”のに，難問解決に不可欠な数　虚数がよくわかる

７．キーワード

複素数平面　　三角関数加法定理　　図形の回転移動

1929　広島大学附属高等学校

ヒマワリの種子配列の数学による再現と解析

茶山 斉範　永井 将貴　増田 智成

要旨

ヒマワリの種子配列を数理モデルで再現し，配列の効率を数値化することによって，種子が生成される角度と配列の効率との関係を考察した結果，角度が黄金角のとき配列の効率がよいことがわかった。

1．目的

２重螺旋構造を持つヒマワリの種子配列の効率のよさには，黄金角が関係していることを，適当な数学的指標を作成し，証明する。

2．方法

座標平面上にn個の点をとり，それらの座標を

$$(x_n, y_n) = (\sqrt{n}\cos(n\theta), \sqrt{n}\sin(n\theta)) \quad \cdots ①$$

とする。①で，$1 \le n \le 500, \theta = \theta_g$とした結果が図１である。

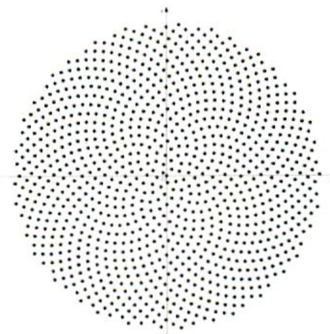


図１

実際のヒマワリと同様に２重螺旋構造を持つことから，数理モデルによる再現ができたといえる。ここで，配列効率を「あるθに対応するパターンにおけるn個目の点と他の点との距離の最小値」と定めて，$d(n,\theta)$で表す。

3．結果

図２は$n = 500$としたときの$d(n,\theta)$のグラフである。$\theta = \theta_g$のとき$d(n,\theta)$は最大値をとる。

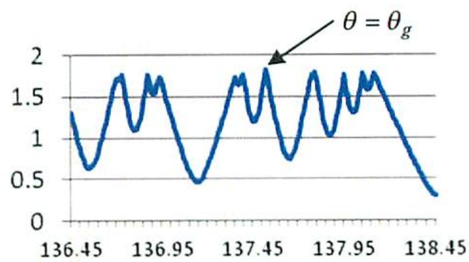


図２（横軸θ，縦軸$d(n,\theta)$）

4．考察

例えば$n = 400$とすると$\theta = \theta_g$のとき$d(n,\theta)$は最大値をとならい。そこで，nの値に依存しない配列効率の指標を新たに定めた。

5．結論

配列効率を数値化する指標を考案することができた。また，その指標を用いることで，黄金角のとき配列の効率がよいことがわかった。

6．参考文献

上村文隆．生き物たちのエレガントな数学．技術評論社，2007，215p.

7．キーワード

ヒマワリ　２重螺旋　葉序　数理モデル

2106　大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎

歪み絵の発展における数学の貢献について

仁井哲沙　岡本和己　次井義征

要旨

数学とコンピュータとを用いて、円柱鏡式歪み絵を制作する。数学としては三角比・空間ベクトルを用い、どのような画像をも歪み絵に変換する“プログラム”を作ることとなる。この活動に意味を持たせるべく文化史にも触れる。

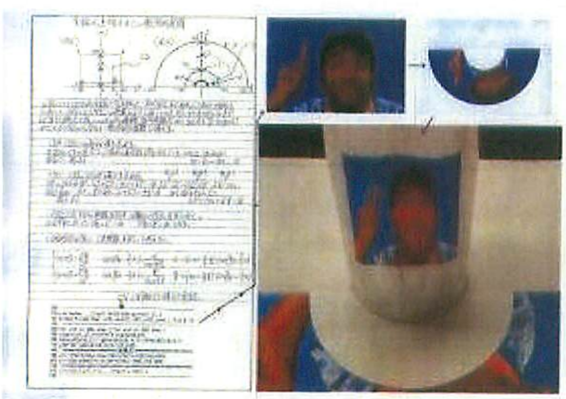
1．目的

現実世界の問題の数学による解決を通して、数学の有用性の一端を実体験すると共に、今回の発表等により「有用である」事を共有できる対象（生徒等）を増やす事を第１の目的としたい。

2．方法

円柱鏡式歪み絵の構造を分析し、数学化→プログラム化と進む。また一方で、歪み絵の発展における数学の貢献を明らかにし、今回のような活動を有意味意なものにする。

3．結果　次のような歪み絵の出力に成功した。



4．考察・結論

「問題解決に数学が用いられさえすれば良い」というわけではなく、注意しなければならないのは「数学の使い捨てになってはならない」という点であろう。

5．キーワード

円柱鏡式歪み絵　現実世界　数学　鞘絵

1916 愛知県立岡崎高等学校

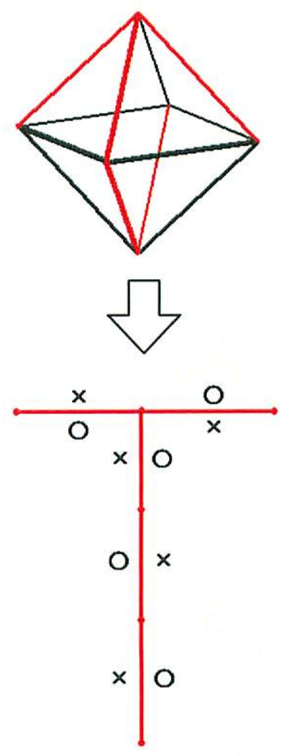
のりしろ問題

池田潮良 角谷和宣 松葉省吾 松井雄太郎 眞下恵奈

要旨
展開図から多面体を作るときには、実際にはのりしろが必要である。同じ多面体でものりしろの付け方は何通りか考えられるが、展開図の辺にのりしろを 1 つおきに付けて組み立てることのできる多面体について考察した。

1. 目的
多面体の展開図にのりしろを１つおきに付けることを“きれいなのりしろ”と定義し、どんな多面体でもきれいなのりしろがつけられるかについて研究した。

2. 方法
様々な形状に多面体を分類し、グラフ理論の考え方を用いてそれぞれの場合について成立条件を求めた。



3. 結果・考察
凸多面体については全てきれいなのりしろが付けられることが分かった。凹多面体（本論文では立体に穴が空いたものも含む）についても立体に穴が開いていなければ、きれいなのりしろが付けられることが判明した。立体に穴が開いている場合では、面に穴が開いているかなどの条件によって結果が変わってくることが分かった。

4. 今後の展望
多面体を分類しているうちに、展開図を作ることができない立体があることが分かった。展開図の定義について広義的に定める必要が出てきた。

5. 参考文献
R.J.ウィルソン　グラフ理論入門（近代科学社出版）2001

松田康雄　解答・ヒントを求む（初等数学 39 号 p.107）2005 年 9 月発行

6. キーワード
多面体 展開図 のりしろ

2318 静岡県立磐田南高等学校

カオスとアトラクタ

宇田 純　岡村柊真　織田海秀　前田直希

要旨：カオスは不思議でしかも魅惑的である。カオスに現れるストレンジアトラクタの美しさを見て、私たちはこれを研究することにした。研究の目的は、オリジナルなストレンジアトラクタを作り出すことである。コンピュータでアトラクタを表示するプログラムを作り、いくつかのストレンジアトラクタを作り出すことに成功した。

1．目的

新たなカオスとそのアトラクタを見つけ、これを「磐南アトラクタ」と命名する。

2．方法

代表的なストレンジアトラクタに、ローレンツアトラクタとジャパニーズアトラクタがある。まず、これらをオイラー法により描画するプログラムを作成し、アトラクタの性質を調べた。その後、独自のアトラクタを探すために次の方法を検討した。

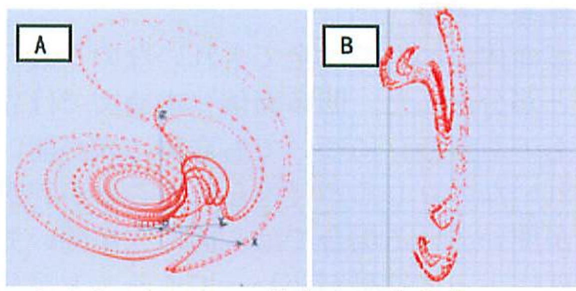
① 物理現象を表す微分方程式を作り、それがカオスになるかどうかを調べる。

② 既存のシステム（方程式）に新たな項を付け加えることによって新たなカオスができないか調べる。

この二つのうち、まずは、カオス発見の正攻法である①の方法を検討したが、私たちが思いつくような現象は既に研究がなされているであろうことが予測され、独自のアトラクタを発見するのは困難と思われた。また、高度な理論的知識が要求され、アトラクタを作り出すためにどのような手法を用いるのが適切かもわからなかった。そこで②の方法をとることとした。

3．結果

試行錯誤を繰り返した結果、合計４つのアトラクタを発見した。そのうちの２つを右に示す。Aはローレンツ型、Bはジャパニーズアトラクタ型である。



4．考察

私たちの式が、カオスの要件を満たすことを理論的に証明するのは困難である。そこで、次のような、カオスに特有な現象を有しているかどうかで判断をした。

(1) 軌道は不規則な振動をするが発散せず、ある図形（アトラクタ）を描く。

(2) 計算回数を増やすほど、アトラクタ内の点の密度が高くなる。

(3) 変数の初期値鋭敏性があり、しかしながらできてくる形は同じ。

5．結論

私たちが作ったアトラクタは、必ずしも現実の物理モデルに基づいたものではないが、数式の操作により新たなアトラクタを作ることができることが検証できた。

6．参考文献

・E,N,Lorenz　『ローレンツ　カオスのエッセンス』　(共立出版 1997)

・臼田、伊藤、井上　『Excel で学ぶ理工系シミュレーション入門』　(CQ 出版社 2003)

・James Gleick　『カオス　新しい科学を作る』　(新潮文庫 1991)

・上田、西村、稲垣　『複雑系を超えて-カオス発見から未来へ-』　(筑摩書房 1999)

この他、Web 上のサイト「http://sites.google.com/site/cinderellajapan」を参考にした。

7．キーワード

カオス　ストレンジアトラクタ　非線形微分方程式　オイラー法

1910　東海大学付属高輪台高等学校

様々な場合におけるポーカーの確率

名取　鼓太郎

要旨

簡潔で分かりやすい発表をするために、ポーカーの役の出現の確率をテーマにすることに決め、さらに条件を付けたカードの交換を行う。そうすることによって、実用性のあるカードの切り方を確率に基づいて行うことができる。

1．目的

試行①⇒基本となる各役の確率を求め、確率に変化があるか調べる。

試行②⇒交換時の各役の確率を求め、確率に変化があるか調べる。

試行③⇒スリーカードとツーペアの関係性を調べる。

また、試行①～③より実用性のあるカードの交換方法を調べる。

2．方法

試行①⇒ジョーカーを除く５２枚で初めに配られた５枚での役の出現の確率を求める。

試行②⇒役が下がらないという条件のもと１回の交換を行い、役の変化の確率を求める。（ノーペアを除く）

試行③⇒スリーカードとツーペアの役に注目してノーペアからの役の変化の確率を求める

3．結果

試行①⇒役が強ければ強いほど出現する確率は低くなっている。

試行②⇒試行①の結果に反し、ワンペアからツーペアよりもワンペアからスリーカードの方が出現する確率が。高くなっている。

試行③⇒ノーペアからスリーカードよりもノーペアからツーペアの方が試行①と同様に、出現する確率が高くなっている。

試行①～③より、ノーペアからは４枚交換することが有効である。

4．考察

試行①～③より、総合的なツーペアとスリーカードの確率は試行②のようにいまだ逆転したままである。つまりノーペアとワンペアからのみの交換の確率では不十分なため、「役を下げない」という条件を除いた交換の確率なども求めなければならない。

5．結論

ノーペアからでは、４枚交換するのが有効な手段であることが分かったが、まだ、行っていない試行もあるので研究はまだまだ終わりが見えない。

6．参考文献

http://www.kumamotokokufu - h.ed.jp/kokufu/math/game_p.html

7．キーワード

ポーカー　確率　数Ａ

1903　清真学園高等学校

月の満ち欠けを数式で表す

今井 敏也　赤井 章吾　井上 滉士

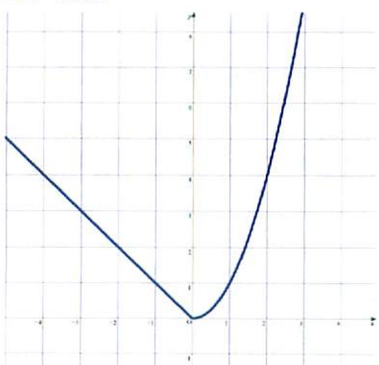
要旨

月の満ち欠けのような動きを１つの式で表現する。

１．目的

日常，身の回りにあるものを数式で表現することを１つの課題として，努めている。本内容はその１つである。

２．方法



以下のように記述されている式

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x^2 & (0<x)\end{cases}$$

を１つの式で表す方法を考案した。そしてそれを応用し，月の満ち欠けを４段階に分けることで，満ち欠けの形を表す数式を作り出した。

３．結果

Ⅰ式：新月～上弦の月を表す式

$$|f(x,\ y)+g(x,\ y)|+\left(f(x,\ y)-g(x,\ y)\right)\leqq 0$$

ただし，

$f(x,\ y)=|x^2+y^2-1+x|+(x^2+y^2-1-x)$,

$g(x,\ y)=ax^2+y^2-1\quad(a\geqq 1)$

とする。

Ⅱ式：上弦の月～満月を表す式

$$\left(f(x,\ y)+g(x,\ y)\right)-|f(x,\ y)-g(x,\ y)|\leqq 0$$

ただし，

$f(x,\ y)=|x^2+y^2-1+x|+(x^2+y^2-1-x)$,

$g(x,\ y)=\frac{x^2}{a}+y^2-1\quad(0<a\leqq 1)$　とする。

Ⅲ式：満月～下弦の月を表す式

$$\left(f(x,\ y)+g(x,\ y)\right)-|f(x,\ y)-g(x,\ y)|\leqq 0$$

ただし，

$f(x,\ y)=|x^2+y^2-1-x|+(x^2+y^2-1+x)$,

$g(x,\ y)=ax^2+y^2-1\quad(a\geqq 1)$　とする。

Ⅳ式：下弦の月～新月を表す式

$$|f(x,\ y)+g(x,\ y)|+\left(f(x,\ y)-g(x,\ y)\right)\leqq 0$$

ただし，

$f(x,\ y)=|x^2+y^2-1-x|+(x^2+y^2-1+x)$,

$g(x,\ y)=\frac{x^2}{a}+y^2-1\quad(0<a\leqq 1)$　とする。

2203　青森県立三本木高等学校・附属中学校

数学を活用したもの作り　～グラフ電卓を用いたグラフアート～

薄木　健太郎　森野　友貴　山本　一輝

要旨

数学を学ぶ中で、この数学がどのような形で利用（活用）されているかに関心を持っている。その中で、イラスト作成のためのドローソフトの仕組みについて疑問に持ち、特に図形と数式との対応について考えた。本発表はその一端であるグラフ電卓を用いたグラフアートに関して、作成手法や数式との対応について紹介する。

1　はじめに

私たちは、現在学んでいる数学を活用して（利用して）もの（作品）を作ってみたいと考え、グラフアートを取り組んだ。グラフアートとは、いくつかの関数の式を組み合わせながら、座標平面上に図形（絵）を描くことをいう。主に、グラフ電卓や数式処理ソフトなどを用いて作成をする。全国的には毎年、関数グラフアートコンテストも開催されており、昨年度はこの大会に応募し優秀賞をいただいた。

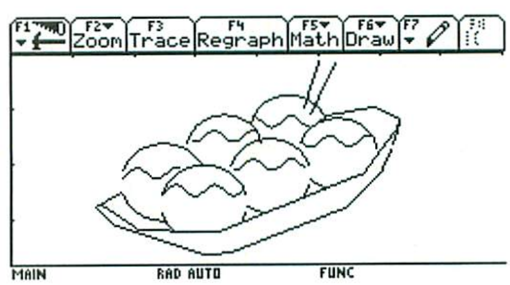
今回はこのような発表の場を提供していただいたことから、数学を用いて「大阪らしい作品づくり」に挑戦をした。

2　研究方法

グラフ電卓を用いて大阪らしい右図のような「たこ焼き」を座標平面上に描くために、関数の組み合わせを陽関数の形で考えた。

3　結果

39 本の式を用いて、右図のような作品が完成した。



4　参考文献

たこ焼きの絵（http://imagesearch.yahoo.co.jp/detail?p=%E3%82%A4%E3%83%A9%E3%82%B9%E3%83%88%E3%80%80%E3%81%9F%E3%81%93%E7%84%BC%E3%81%8D&rkf=1&ktot=0&dtot=0）

5　キーワード

グラフ電卓　グラフアート　たこ焼き

2010　大阪府立大手前高等学校

線の交わりと幾何学的確率

宮堺陽一　谷河杏介　奥野彰久　今川奈那　勝吉　司　辻部壮真

概要

現代ではπの近似値を求める様々な方法が知られている。私達はこれらの中で確率からπの近似値を求める「モンテカルロ法」に興味を持ち、その一つである「ビュッフォンの針」といわれるものについて研究した。また一般の長さlに対する「ビュッフォンの針」についても考察を行い、その結果をもとにしてπの近似値を計算した。

1．研究

「ビュッフォンの針」とは「いくつかの平行線が等間隔で並ぶ平面上に、平行線の間隔より短い針をなげたときの確率が$\dfrac{2l}{\pi h}$で与えられる。」という問題である。(ただし平行線の間隔をh、針の長さをlとする。）この「ビュッフォンの針」では針の長さが平行線の間隔より短いので、針の長さが平行線の間隔より長い場合を考えた。

2．結果

一般的な針の長さlについて平行線と針が交わる確率は$\dfrac{2\alpha h+2l(1-\sin\alpha)}{\pi h}$となり、$\alpha$を求めるのに逆余弦関数が必要となる。しかし、針と平行線の交点の個数の期待値は$\dfrac{2l}{\pi h}$となり$h>l$のときの確率に関連したものが得られた。

3．実験

得られた結果をもとにして実際にπの近似値を求めてみた。$h>l$のときの確率はπに収束していったが、$h\leq l$のときπへの収束が遅いことがわかった。顧問の協力を得てコンピュータで計算したところ、確かにπへ収束したので上の結果の正しさが確認された。

4．結論

$h>l$のとき「ビュッフォンの針」は確率で定義された問題であったが、$h\leq l$のとき針と平行線の交点の期待値が$\dfrac{2l}{\pi h}$であることより、「ビュッフォンの針」は「任意の長さの針について、平行線との交点の期待値が$\dfrac{2l}{\pi h}$である。」と定義しなおすことが出来る。

5．キーワード

モンテカルロ法、ビュッフォンの針

マス・フェスタ記念数学　問題　結果報告

平成 3^3-2^2 年 2^3 月 3^3 日　於.ドーンセンター

マスフェスタ（大阪府立大手前高等学校主催）で数学の問題を掲示したところ、参加者の皆さんから熱心にたくさんの解答を寄せて頂き感謝しております。皆さんは考えるのが好きなんだなと改めて思うとともに、想定以上の解法もあって感動しました。結果の一部ですが報告します。今後も皆さんの活躍を願っております。

> 問題１（暗号）
>
> (1) 次の暗号は都道府県名を表している。記号は１文字または２文字のひらがなを表している。同じ記号は同じ文字を、異なる記号は異なる文字を表している
>
> 暗号を解読せよ。　◎□ ，◎△○ ，△□

答．大分、大阪、埼玉

正解者とコメント．岡崎高校Ｏさん、名城大学附属高校Ｓさん、清真高校Ｉさん。大手前高校のＩさんは 47 都道府県を列挙しました。◎の候補は「大、福、長」等です。

> 問題１（暗号）
>
> (2) 『34 04 03 13 04 12 54』が『がんばろう』を表わすならば、『 62 62 82 34 34 52 01 34 11 21』は何を表わすか。

答．大阪から世界へ　［ 11 い，12 ろ，13 は，14 に，15 ほ，21 へ，…，03 ん，04〃，05○ ］

正解者とコメント．岡崎高校Ｉさんは解読表を作りました。「あいう」ではなく「いろは」に着眼することがポイントです。

問題２（数のラッキー占い）

１．好きな３桁の数を思い浮かべる。　（例 123）

２．それを２つ並べて６桁の数を作る。　（例．123123）

３．その数を ７ で割ってみて、割り切れたら勉強運がラッキー。

４．その数を 11 で割ってみて、割り切れたら金銭運がラッキー。

５．その数を 13 で割ってみて、割り切れたら恋愛運がラッキー。

さて、この占い、ちょっと変なのです。その理由を考えて下さい。

答．必ずラッキーになる。３桁の数を２つ並べて６桁の数にするということは、その数を 1001 倍すること。そして、$1001=7\times11\times13$ なので、７でも 11 でも 13 でも割り切れて必ずラッキーになる。

正解者とコメント．高校、市川学園高校Ｙさん、小倉高校Ｓさん、大手前高校Ｓさん。1001 は不思議な数ですね。

問題３（覆面算）

次の覆面算を解け。各文字は０～９までのどれかの数字を表す。同じ文字は同じ数字を、異なる文字は異なる数字を表している。

(1) すき×すき＝すうがく　(2) す^{き}×す^{き}＝すうがく

(3) す^{き}＋す^{き}＝すうがく

答．(1) $98\times98=9604$　(2) $4^3\times4^3=4096$　(3) $8^4+8^4=8192$

正解者とコメント．清真高校Ｉさん。岡崎高校Ｆさん。(1)は「す」が９と定まります。答えが１通りに定まる覆面算は結構難しい。機会があれば作問してみて下さいね。

問題４（空缶リサイクル）

ある缶ジュース販売店が「空缶４本をジュース１本と取り換えます」というサービスを始めた。

(1) 缶ジュースを 25 本買えば何本飲めるか。

(2) 缶ジュースを 50 本飲みたいとき、何本買えばよいか。

（取り換えた缶ジュースも再び取り換えることも可）

答. (1) 33 本 (2) 38 本

正解者とコメント. Dさん、大手前高校Tさん、岡崎高校Oさん、清真高校Iさん、明治学園Sさん。OさんとSさんは、n本買えば『n＋［(n－1)/3］本飲める』と一般化しました。

問題５（ディラックの問題）

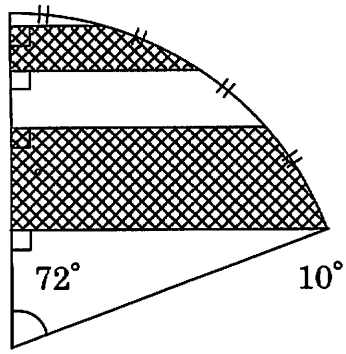
４人がやしの実とりに出かけた。たくさんのやしの実がとれた。４人は疲れて昼寝をした。１人が目をさまし、やしの実を４等分すると１個余ったのでそれを猿にやって、自分の分を袋に入れて再び眠った。次に２人目が目をさまし、残ったやしの実を４等分すると１個余ったのでそれを猿にやって、自分の分を袋に入れて再び眠った。３人目も４人目も同じことを繰り返した。

さて最初に取れたやしの実は最低何個か。

答. 253 個

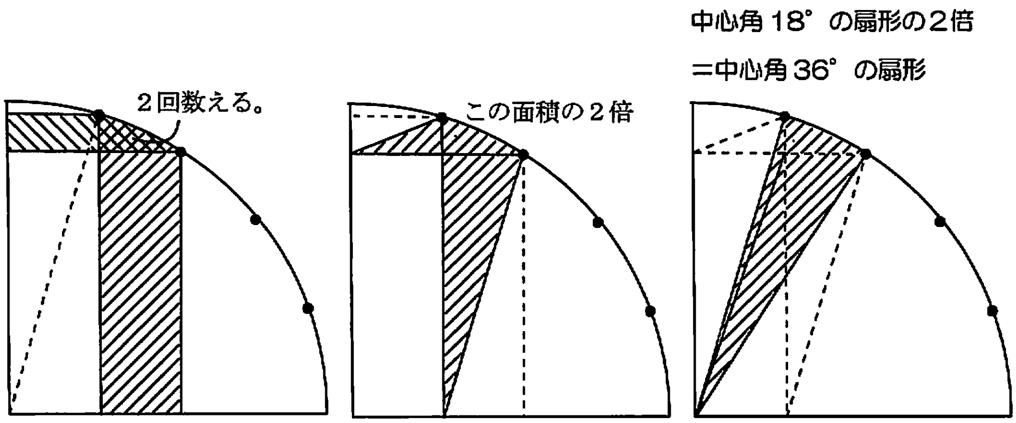
正解者とコメント. 清真高校Iさんの解答。４人目が取れるやしの実の個数をnとすると、最初のやしの実の個数は $4/3(4/3(4/3(n+1)+1)+1)+1=9n+6+13/27(n+1)$. 自然数なので $(n+1)$ は 27 の倍数。最小の値は $n=26$ のとき。

問題6（図形の問題）　次の斜線部の面積を求めよ。



答．10π

正解者とコメント．岡崎高校Oさん。次は西大和高校Mさんの解法。



$10^2\pi\times36/360=10\pi$

問題7とお願い（時計の針の角度の問題）

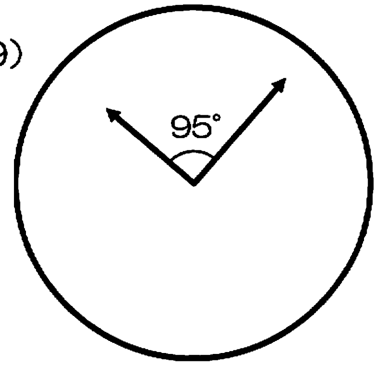
図の時計は何時何分を指しているか．

M時2N分　（M=0,1,…,11；N=0,1,…,29）

の短針から長針までのなす角度は、

0°,1°,…,359°と1対1に対応しています。
与えられた角度に対するM，Nの計算法
を考えてみて下さい。解答は

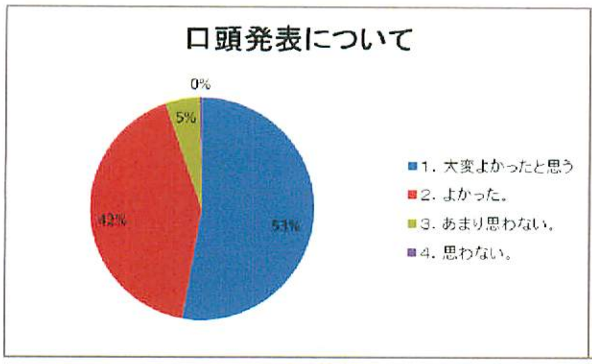
松田　までお願いします。

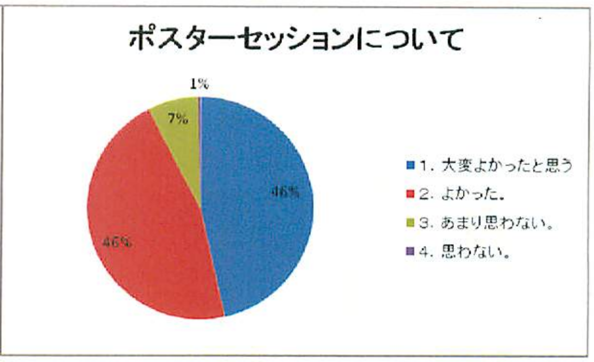


答．6時50分

出題者　松田康雄（福岡県・明治学園中学高等学校教諭）

全体感想





（教員感想）

・若さはエネルギーだと思った。上手・下手ではなく一生懸命であることが素晴らしかった。
・発表者が質問の受け答えまでしっかりやっていて感心した。どの題材も興味深く刺激を受けた。
・ポスターセッションだけでは伝わりにくい部分もあるので、詳細に説明する論文（要旨よりもう少し詳しいもの）があると取組みの過程も見えて面白いのではないか。
・初めて参加したが、思っていたよりもしっかりと研究されており、よい研究が多かった。
・研究会の準備等、大変だったかと思う。数学研究の広がりをこれからも期待している。
・ポスターセッションの時間をもう少しとれないか。もっと交流につながると思う。テーマの選び方について参考になった。
・ポスターセッションはもっと時間がほしい。もう少し会場が広ければと思う。
・口頭発表の進行が会場ごとに違っていたので、予定通りに見ることができなかった点が残念。しっかり勉強できている生徒もいて、高校生としては凄いと感じた。
・初めて参加した。高校数学での話題をふくらませて生徒がそれぞれが問題解決に励んでいる姿に感銘を受けた。発表者名とあわせて、取り組んでいる母体がわかるようレジュメに入れると、学校に持ち帰って活動を展開していくヒントになるかと思った。
・発表した生徒の素晴らしさに驚いた。刺激になった。
・普通の授業以外で指導する際に役立ちそうな内容が多く、大変参考になった。
・既知の内容の再現なのか、新しい事実の発見なのかが明確でない場合がみられた。
・普通の高校生が一所懸命やっていて良かった。大学の内容の引き写しでないものの方が面白く聞ける。
・いろいろな学校の数学の研究が見れて大変良かった。
・研究内容・プレゼン方法等を見て、大変刺激を受けた。本校での指導に生かしていきたい。
・生徒にとっても教員にとっても大変勉強になった。数学は高校生が研究するにはテーマ設定が難しいので他校の様子は参考になった。
・生徒は今後の展望を持ち、意欲が向上できたと思う。能力の高い人を前に発表するという普段できない経験もでき、生徒にとって素晴らしい経験ができた。
・口頭発表のとき、簡単な質問でもいいので、生徒間でできるとより良かった。

大阪府
数リンピック

大阪府数リンピック

１．概要

アイデアを生み、発見力を育てるため「数リンピック」を実施する。

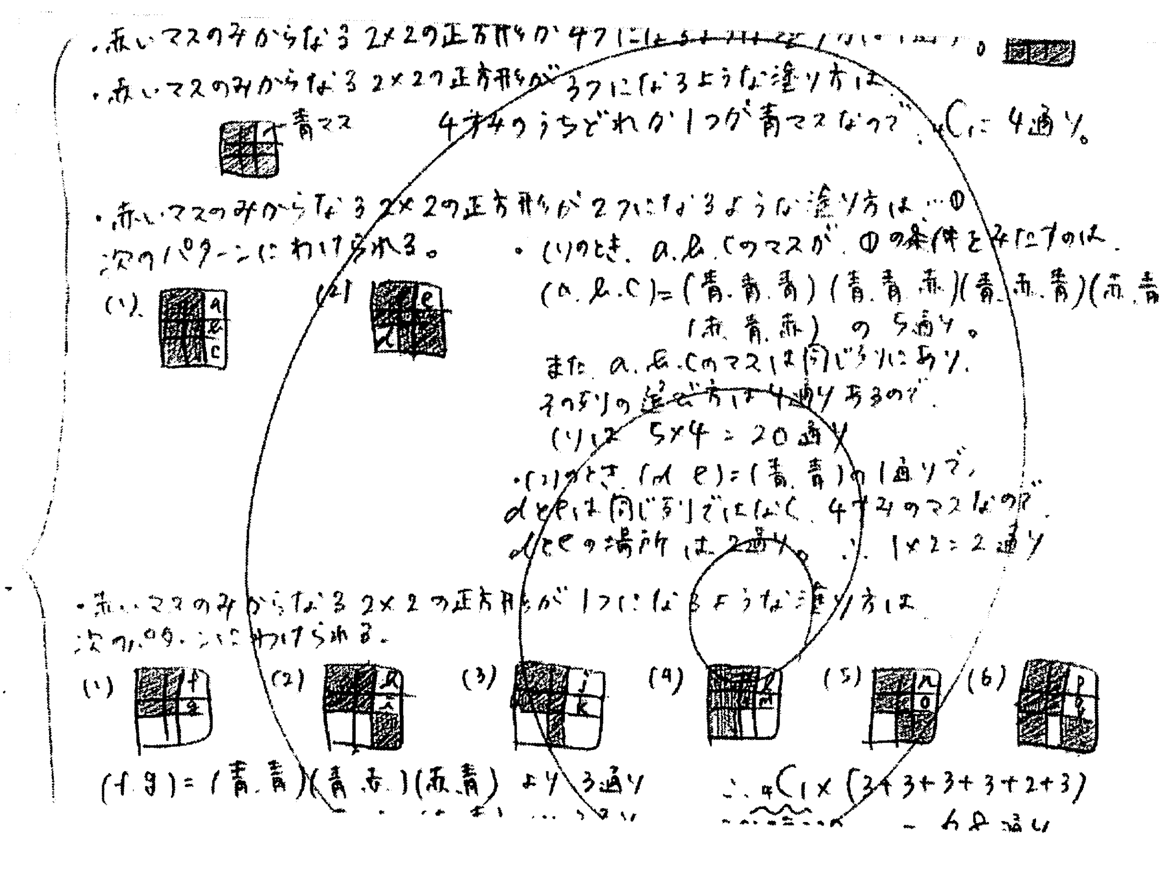
アイデア・発見能力の育成に重点を置き、論理的な考え方と発見力を鍛えていく。具体的には、幾何学・図形の性質、世界に見られる特有の数学の問題等を生徒に提示し、生徒は一月をめどとして設定した期日までに提出を行う。これらの解答内容をもとに添削・講評を行い、数学的な考え方や発見力を鍛えていく。いろいろなアプローチの仕方に触れる中でアイデアの多様性を知り、数学的なものの見方を充実させていく。又、そこから派生する問題については別に取り上げ、探究課題として研究を進めていく。教員は、レポートに見られる生徒の発想や議論の進め方を分析し、指導者として考慮すべき点や改善すべき点を分析する。

実施時期　平成２３年７月～１２月（計５回）

参加人数　のべ　２４０名、　添削総数　１１５２枚

２．内容

（解答イメージ）



２０１１年６月

「数学コンクール」「数学オリンピック」に向けて

「数学オリンピック」や「数学コンクール」等に参加してみようという数学に興味・関心ある皆さんを対象に、添削指導・講習等を行います。詳細は、改めて連絡いたしますが、さっそく６月より「数学オリンピック対策添削指導」を開始いたします。希望する人は、各校の担当の先生に確認し参加して下さい。ぜひ、多くの皆さんに、大阪府の数学好きの高校生たちとともにチャレンジし、高めあってほしいと願っています。

数学添削指導「大阪府数リンピック」評価基準

応募答案に対し、次の評価基準に従ってＡＢＣＤの４段階評価を行う。

Ａ：正しい結果を得ている。
　結果を導く過程に理論的穴がなく、必要十分性なども含めて完全である。
　結果を導く過程が読み手に正確かつ明解に伝わるような記述がなされている。

Ｂ：正しい結果を得ている。
　結果を導く過程に誤りは含まれていないものの、やや不十分な点が残る。
　　（例：一意性、他に条件を満たす解はないかを確かめていない等）
　結果を導く過程が読み手におおむね正確に伝わるような記述がなされている。

Ｃ：正しい結果を得ている。
　結果を導く過程に不十分な点が残る。
　答案から結果を導く過程を読み取るために、読み手側が相当程度補いつつ読む必要がある。

Ｄ：結果が間違っているか、または、結果が正しくても導出の過程が判読不能ないし記述されていない。

なお、上記評価に加えて、とくにユニークな発想や優れた点が見られる場合には＋を付加する。（例：Ａ＋，Ｂ＋など）

なお、この企画は、コア・スーパーサイエンスハイスクール（コア SSH）によるものです。

第１回　大阪府数リンピック　講評 H23.9.10

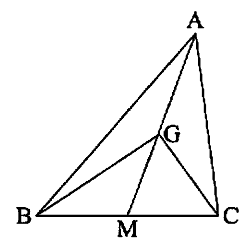
大阪府の生徒の皆さんが一緒になって取り組む機会というものはなかなかありませんが，今回の「数リンピック」を通じて、数学の交流ができればと思っています。コアSSH(数学) ではオリンピックに向けての講習会も企画していますので，是非みなさん参加してください。添削にチャレンジしてくれた皆さんにとってこのような取り組みが有意義なものになることを祈っています．

採点方法ですが，A,B,C は正解にたどり着いていますが，説明などの程度に応じて評価を分けています．予選では答えのみの解答ですので○がもらえます。D は間違いです．詳しくは前回の配布案内に記載されていますので確認してください。今回提出者は７０名でした。

問１

3 角形 ABC の重心を G とする．$GA = 2\sqrt{3}, GB = 2\sqrt{2}, GC = 2$ のとき 3 角形 ABC の面積を求めよ．

1991 年予選問題。ABC の正答率は４６％。
直角の読みとり，中線定理，ヘロンの公式，余弦定理，座標利用などいろいろな解法が見られた。２年生では三角比を用いた解答が多く，比較的良くできていた。



【解答例１】

BC の中点を M とし，AM を M の側に伸ばして $GM = MP$ となる点Pをとる．$\triangle MBP$ と $\triangle MCG$ において，$MP = MG$，$MB = MC$，$\angle \mathrm{PMB} = \angle \mathrm{GMC}$ であるから，$\triangle MBP \equiv \triangle MCG$ となり，$BP = CG = 2$ となる．また，$BG = 2\sqrt{2}, GP = 2\sqrt{3}$ であるから，$GP^2 = BP^2 + BG^2$ が成り立ち，$\angle \mathrm{GBP} = 90°$ となる．
よって，$\triangle GBC = \triangle GBP = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ であることより，$\triangle ABC = 3\triangle GBC = 3\triangle GBP = 3\cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ■

【解答例２】

直線 AG と BC の交点を M とする．$\triangle GBC$ において中線定理より，$GB^2+GC^2 = 2(GM^2+BM^2)$．$(2\sqrt{2})^2 + 2^2 = 2((\sqrt{3})^2 + BM^2)$，$BM = \sqrt{3}$．よって，$BC = 2\sqrt{3}$ となる．また，$GB = 2\sqrt{2}, GC = 2$ より $BC^2 = GB^2 + GC^2$ が成り立ち，$\triangle GBC$ は $\angle \mathrm{BGC} = 90°$ の直角三角形と分かる．
よって，$\triangle ABC = 3\triangle GBC = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2 = 6\sqrt{2}$ ■

【解答例３】

$\triangle GBC$ において中線定理より，$BC = 2\sqrt{3}$．同様に，$CA = 2\sqrt{6}$，$AB = 6$．
よってヘロンの公式より，$s = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 3$ から，

$\triangle ABC = \sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - CA)}$

$= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{3} + 3)(-3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})(3 - \sqrt{3} + \sqrt{6})(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6})} = 6\sqrt{2}$ ■

【解答例４】

$A(0,0), B(b,0), C(c_1, c_2)$ とおくと，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}bc_2$．$G$ は$\triangle$ABCの重心だから，$G(\dfrac{b + c_1}{3}, \dfrac{c_2}{3})$ と表せる．$GA^2 = (2\sqrt{3})^2$，$GB^2 = (2\sqrt{2})^2$，$GC^2 = 2^2$ より，$b = 6, c_1 = 4, c_2 = 2\sqrt{2}$ となり（詳細は略），$\triangle ABC = 6\sqrt{2}$ ■

【解答例５】

$\vec{b} = \overrightarrow{GB}, \vec{c} = \overrightarrow{GC}$ とする．$\left|\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right|^2 = 3$，$|\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \vec{c} = 2$ より，$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ となり，$\angle BGC = 90°$．
よって，$\triangle ABC = 3\triangle GBC = \dfrac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 6\sqrt{2}$ ■

問２

2003n の下３桁が 113 となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ．

2003 年予選問題。ABC の正答率は９６％。
正答率は高かった。実際割り算をして求めたり，下１桁目から順に数字を追いかけている答案が多かったが，３の倍数であることを利用できればはやく処理できた。

【解答例１】

$2003n = 2n \times 1000 + 3n$ であるから，下３桁の数は $3n$ の下３桁と同じものになる．$3n$ は３の倍数であるから，$3n$ の各桁の数の和は３の倍数となることを利用して考える．113 は３の倍数でないので，次に小さな３の倍数で下３桁が 113 になるのは，1113 である．
よって，$3n = 1113$ より，$n = 371$ ■

【解答例２】

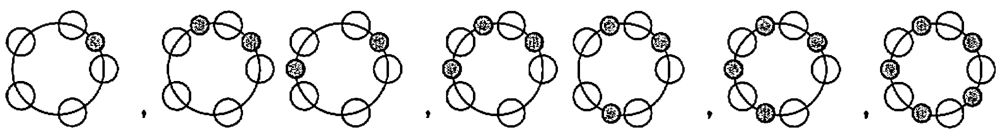
正の整数 n の下４桁の数を $a_4a_3a_2a_1$ とし，$2003n$ を下１桁目から考える．$3a_1$ の下１桁が３となるのは $a_1 = 1$ の時である．次に，$3a_2$ の下１桁が１になるのは，$a_2 = 7$ のときで，２繰り上がる．さらに，$3a_3 + 2$ の下１桁が１になるのは $a_3 = 3$ である．
以上で，条件を満たす最小のものは 371 ■

問３

赤い椅子５個と白い椅子５個を円状に並べる並べ方は何通りあるか．ただし，同色の椅子は区別せず，回転して同じ順序になる配置は同じ並べ方とみなす．

1994 年予選問題。ABC の正答率は２４%。
正答率が低かった。赤椅子を固定して，どの間に白椅子をいくつ並べるかで数えていく。数え間違えがないよう注意が必要。

【解答例１】
赤椅子を円形に並べ，その間に白椅子を入れる．どの間に白椅子を入れるかで場合分け．
(1) 1 カ所にまとめて入れる場合，どこに入れても回転すれば同じだから 1 通り．
(2) 2 カ所を選んで入れる場合．それぞれ，(4,1),(1,4),(3,2),(2,3) が考えられるから，$2\times 4 = 8$ 通り
(3) 3 カ所の場合，(3,1,1)(1,3,1)(1,1,3)(2,2,1)(2,1,2)(1,2,2) があるので，$2\times 6 = 12$ 通り
(4) 4 カ所の場合，(2,1,1,1)(1,2,1,1)(1,1,2,1)(1,1,1,2) で 4 通り
(5) 5 カ所の場合，(1,1,1,1,1) で 1 通り
以上より，$1+8+12+4+1 = 26$ 通り■



【解答例２】
椅子の並べる場所を (ABCDEFGHIJ) のように区別すると，椅子の並べ方は ${}_{10}C_5 = 252$ 通りとなる．(WRWRWRWRWR)(RWRWRWRWRW) の場合を除き，他は回転して同じものが 10 通りずつあるので，$(252-2)\times\frac{1}{10}+1 = 26$ 通り■

問４

3 つの実数 x,y,z が，$x+y+z=0$, $x^3+y^3+z^3=3$, $x^5+y^5+z^5=15$ を満たす．このとき，$x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ．

2003 年予選問題。ABC の正答率は３４%。対称式の扱いを問う問題．基本対称式を考えるか，地道に代入法で解く．

【解答例】
$A = xy+yz+zx, B = xyz, S_n = x^n+y^n+z^n$ とする．$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3} = (x+y+z)(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})-(xy+yz+zx)(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})+xyz(x^n+y^n+z^n)$ より，$S_{n+3} = -AS_{n+1}+BS_n$ と表せる．ここで，$S_0 = x^0+y^0+z^0 = 3$，$S_1 = x+y+z = 0$，$S_2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) = -2A$ となるから，$S_3 = -AS_1+BS_0 = 3B = 3$ で $B = 1$．$S_4 = -AS_2+BS_1 = 2A^2$，$S_5 = -AS_3+BS_2 = -5AB = 15$ より $A = -3$
よって，$S_2 = x^2+y^2+z^2 = 6$■

3

問 5

次の図形を一筆書きで書くとき．書き方は何通りあるか．

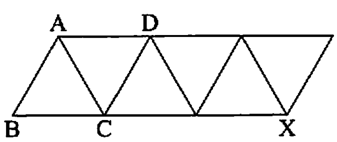
1993 年予選問題。ABC の正答率は１０％。

一筆書きの開始・終了地点の見分け方，n 個を扱うときの漸化式の作り方がポイント．

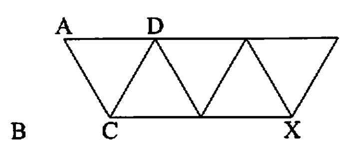
【解答例】

スタート，ゴールは奇数本の道が集まっているところである．三角形が n 個あるときの書き方の個数を a_n 個とする．A から Z へ向かうのに，「A → B → C」と進むとき，線分 AB,BC を取り除くと「C → Z」となり，その書き方は a_{n-1} 個.「A → C」と進むとき，線分 AC を取り除き，折れ線 ABC を改めて線分 AC と見てやると，その書き方は a_{n-1} 個.「A → D」のとき，線分 AD を取り除き，C にループが一つついていると考える.「D → Z」となるが，C に来たとき，ループを右回り，左回りするかで 2 通り考えられるので，その書き方は $2a_{n-2}$ 個．よって，$a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$ となり，$a_1 = 2, a_2 = 6$ より，$a_6 = 328$.「Z → A」も考えて，$328 \times 2 = 656$ 通り■

「A → X」と進む

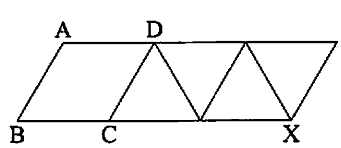


「A → B → C」と進むとき，



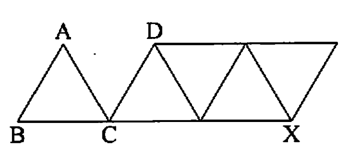
「C → X」と進む

「A → C」と進むとき，



「C → X」と進む

「A → D」と進むとき，



「D → X」と進む

数学
ハイレベル
宿泊研修

ハイレベル宿泊研修

1．概要

日　時：平成２３年１１月１２日（土）９：００～１３日（日）１２：００

内　容：数学オリンピック問題に関しての講義および演習を行う。

場　所：大阪アカデミア　〒559-0034 大阪市住之江区南港北 1-3-5

参加者：生徒５９名

参加校：大阪教育大学附属天王寺校舎、大手前、岸和田、高津、泉北、天王寺、三国丘

講　師：　教員８名、大学関係者５名

１１月１２日（土）

９：００	開会式	
	講義・演習	藤田岳彦氏（９：００～１０：３０）
１２：００	昼食	
１３：００	講義・演習	澤田晃一郎氏（１３：００～１３：３０）
１７：００	休憩・夕食	藤田氏（１６：００～１７：００）
１９：００	フォローアップ講義	大手前高校教員
２０：００	講義・演習	山本拓弥氏・山口勇太郎氏
２２：００	就寝	

１１月１３日（日）

７：００	朝食	
８：００	講義・演習	関　典史氏（８：００～８：３０）
１２：００	閉会式	

２．感想

アンケート

Ｑ１．今回の研修で新たな知識を身に付けることができた。

Ｑ２．数学オリンピックに向けて、どのような学習をすれば良いか分かった。

Ｑ３．他校の生徒と一緒に学習することは刺激になった。

Ｑ４．講義について各分野の難しさについて難しく感じた。

＜組合せ論＞＜幾何＞＜整数＞

Ｑ５．今回の内容を、今後の学習に生かすことができる。

Ｑ６．今後もこのような企画は続けた方がよい。

	思う				思わない
Q1	３９	７	０	０	０
Q2	１８	２６	２	０	０
Q3	１６	１７	１１	１	１
Q4	１７	２２	５	２	０
	１４	２１	９	２	０
	１１	１９	１２	４	０
Q5	２９	１５	２	０	０
Q6	３６	８	１	０	０

感想

- とってもおもしろかった。有意義な時間を過ごしたと思う。ただ、もう少し模擬テストの回数を増やして欲しいです。ありがとうございました。
- 確認試験であれほどの点数をとれるようになったとは思っても見なかった。
- 他校の生徒と一緒に勉学し寝て楽しみながら授業に集中して取り組めたことはよい刺激になり良かった。
- 今まで解けなかった問題が解けるようになってよかった。
- 他校の優秀な人たちに囲まれてすごした２日間はとても良き機会になった。
- まだ習っていない分野など分からないところもあったが、いろいろな数学を教えてもらい新鮮だった。
- とてもためになる研修で数学の楽しさをさらによく知りました。
- 新しい知識が身についたのでとてもよい経験になった。
- ポイントがよく分かった。多くの事を学べた。
- 新しい発見や広い視野を持つことができ貴重な経験や刺激を受けることができた。

3．資料（初等整数論）

F_nが素数pで割り切れるとする.F_nは奇数であるから$p\neq 2$であり,$2^{2^n}+1\equiv 0 \pmod p$から

$$2^{2^n}\equiv -1\not\equiv 1, 2^{2^{n+1}}=\left(2^{2^n}\right)^2\equiv(-1)^2=1 \pmod p$$

よってpを法として2に対応する指数をeとするとき,$e\nmid 2^n, e\mid 2^{n+1}$から$e=2^{n+1}$であり,系1.13より$2^{n+1}\mid p-1$

したがってF_nの素因数pは$k\cdot 2^{n+1}+1$の形の数から探せばよい.実際,$641=10\cdot 2^6+1, 6700417=104694\cdot 2^6+1$である.

練習問題4.(1) 実際にはより強い結果が得られる.

$n\geq 2$のとき,$m\mid F_n\Rightarrow m\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$を示せ.

(ヒント：mの素因数pに対し,pを法として$2^{3\cdot 2^{n-2}}+5\cdot 2^{n-2}$に対応する指数が$2^{n+2}$であることを確認せよ.もしくは,付録の平方剰余に関する性質を用いて,2が法pで平方剰余であることを示してもよい)

(2)$m\geq 1$として,2^m+1が素数ならば$m=2^n$なる非負整数nが存在することを示せ.また,$a>1, m>1$として,a^m-1が素数ならば$a=2$かつmは素数であることを示せ.

(いずれも逆は成り立たない.2^m-1をMersenne数という)

(3) 素数pに対し,2^p-1の素因数はどのような形の数か.

2 Dirichletの算術級数定理

2.1 1のn乗根

$z^n=1$となる複素数zを1のn乗根といい,1のn乗根zが$z^k\neq 1$ $(1\leq k<n)$をみたすとき,zを1の原始n乗根という.

定理 2.1. 1の原始n乗根は$\varphi(n)$個存在し,原始n乗根の1つをζ_nとおくと,1のn乗根全体は$\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n(=1)$である.また,$(k,n)=d$とすると$\zeta_n^k$は1の原始$\dfrac{n}{d}$乗根となる.

証明. 例えば$\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$は1の原始$n$乗根であるから(練習問題5),1の原始$n$乗根は少なくとも1つ存在する.1の原始$n$乗根の1つを$\zeta_n$とすれば,

$$(\zeta_n^k)^n=(\zeta_n^n)^k=1^k=1$$

からζ_n^kは1のn乗根である.

$1\leq i<j\leq n$に対し,$1\leq j-i<n$から$\zeta_n^{j-i}\neq 1$であり,

$$\zeta_n^j-\zeta_n^i=\zeta_n^i(\zeta_n^{j-i}-1)\neq 0$$

よって$\zeta_n^i\neq\zeta_n^j$であり,$\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n$はすべて相異なる.ところで方程式$x^n=1$は解を高々$n$個しかもたないので,$n$個の複素数$\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n$が1の$n$乗根全体となる.

kをnで割った商をq,余りをrとすれば$\zeta_n^k=\zeta_n^{qn+r}=\zeta_n^r$であるから,$\zeta_n^k=1\Leftrightarrow r=0\Leftrightarrow n\mid k$である.よって$(k,n)=d$のとき,$\zeta_n^{km}=1\Leftrightarrow n\mid km\Leftrightarrow \dfrac{n}{d}\mid m$であり,$\zeta_n^k$は1の原始$\dfrac{n}{d}$乗根である.

特に,ζ_n^kが1の原始n乗根であることはnとkが互いに素であることと同値であり,1の原始n乗根は$\varphi(n)$個存在する. □

練習問題5. 整数nに対して$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (de Moibreの定理)が成り立つことを示し,$\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$が1の原始$n$乗根であることを確認せよ.

これを用いれば1のn乗根や原始n乗根は具体的に表すことができるが,講義中はこれ以降基本的に具体的な表示を必要としない.

2.2 円分多項式

$\Phi_n = \prod_{1 \le k \le n, (k,n)=1} (x - \zeta_n^k)$ とおき, これを円分多項式(もしくは円周等分多項式)という.定理2.1より, $\Phi_n(x)$ は1の原始 n 乗根のみを根にもつ(かつ重根ではない), 最高次の係数が1の多項式である.

例. $\Phi_1 = x - 1, \Phi_2 = x + 1, \Phi_3 = (x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1, \Phi_4 = (x - i)(x + i) = x^2 + 1$

1の原始 n 乗根が具体的にわからなくても, 次の補題から $\Phi_n(x)$ は順に計算できる.

補題 2.2. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$

証明. $d \mid n$ なる d に対し, 定理2.1より ζ_n^d は1の原始 $\frac{n}{d}$ 乗根である.この証明中ではこれを $\zeta_{\frac{n}{d}}$ と定める.1の n 乗根全体が $\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n$ であることから, $x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - \zeta_n^k)$ である.よって

$$
\begin{aligned}
x^n - 1 &= \prod_{k=1}^{n} (x - \zeta_n^k) \\
&= \prod_{d|n} \prod_{1 \le k \le n, (k,n)=d} (x - \zeta_n^k) \\
&= \prod_{d|n} \prod_{1 \le i \le \frac{n}{d}, (i,n)=1} (x - \zeta_n^{id}) \\
&= \prod_{d|n} \prod_{1 \le i \le \frac{n}{d}, (i,n)=1} (x - \zeta_{\frac{n}{d}}^i) \\
&= \prod_{d|n} \Phi_{\frac{n}{d}}(x) = \prod_{d|n} \Phi_d(x)
\end{aligned}
$$

□

例. $x^2 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x), x^3 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x), x^4 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_4(x); \Phi_5(x) = \dfrac{x^5 - 1}{\Phi_1(x)} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$

$\Phi_6(x) = \dfrac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = x^2 - x + 1$

また, これより次が成り立つ.

補題 2.3. $\Phi_n(x)$ は整数係数多項式である

証明. $\Phi_1(x) = x - 1$ は整数係数多項式である. k を2以上の整数とし, $i < k$ なる任意の正の整数 i に対し $\Phi_i(x)$ が整数係数多項式であるとする.

$$f(x) = \prod_{d|k, d \ne k} \Phi_d(x)$$

とおくと $f(x)$ は最高次の係数が1の整数係数多項式であり, $x^k - 1 = \Phi_k(x)f(x)$ である.

$\Phi_k(x)$ が整数係数多項式でないと仮定する.

$$\Phi_k(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(k)} a_j x^j$$

とおき, a_j が整数でないような最大の j を j_0 とする.このとき, 式を変形して

$$f(x) \sum_{j=0}^{j_0} a_j x^j = x^k - 1 - f(x) \sum_{j=j_0+1}^{\varphi} (k) a_j x^j$$

を得る. $j > j_0$ で a_j は整数であるから右辺は整数係数多項式であるが, $f(x)$ の最高次の係数が1であることから, 左辺の最高次の係数は a_{j_0} であり, 整数でないので矛盾する.

よって $\Phi_k(x)$ は整数係数多項式である.数学的帰納法より, 任意の n に対して $\Phi_n(x)$ は整数係数多項式である. □

なお, $\Phi_n(x)$ は有理数の範囲でこれ以上因数分解できない(これを $\Phi_n(x)$ は有理数体上既約であるという)であることが知られている.

2.3 定理 1.9 の証明

まずは具体的な例から,円分多項式がどのように使われるのか見てみよう.ここで,補題 2.3 から,整数 a に対し $\Phi_n(a)$ が整数であることに注意する.

例. $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

整数 a に対し $p \mid \Phi_5(a)$ となる素数 p について考える.

補題 2.2 より $a^5 - 1 = \Phi_1(a)\Phi_5(a)\ (= (a-1)\Phi_5(a))$ から $a^5 - 1 \equiv 0 \pmod p$

よって p を法として a に対応する指数を e とすれば補題 1.12 より $e \mid 5$ であり,$e = 1$ または $e = 5$ である.

$e = 1$ ならば $a \equiv 1 \pmod p$ であり,$0 \equiv \Phi_5(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \equiv 5 \pmod p$ より $p = 5$

$e = 5$ ならば系 1.13 より $e = 5 \mid p - 1$ であり,$p \equiv 1 \pmod 5$

以上より $p \mid \Phi_5(a)$ ならば,$p = 5$ または $p \equiv 1 \pmod 5$ である.

$\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$

整数 a に対し $p \mid \Phi_6(a)$ となる素数 p について,$a^6 - 1 = \Phi_1(a)\Phi_2(a)\Phi_3(a)\Phi_6(a)$ から $a^6 - 1 \equiv 0 \pmod p$

よって p を法として a に対応する指数を e とすれば $e \mid 6$ である.

$a^2 \equiv 1 \pmod p$ とすると $0 \equiv \Phi_6(a) = a^2 - a + 1 \equiv 2 - a \pmod p$ より $a \equiv 2 \pmod p$ であり,$1 \equiv a^2 \equiv 2^2 = 4 \pmod p$ より $p = 3$

$a^3 \equiv 1 \pmod p$ とすると $2 \equiv a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1) = (a+1)\Phi_6(a) \equiv 0 \pmod p$ より $p = 2$

$a^2 \not\equiv 1, a^3 \not\equiv 1 \pmod p$ とすると $e \nmid 2, e \nmid 3$ であり,$e = 6$ である.よって $e = 6 \mid p - 1$ であり,$p \equiv 1 \pmod 6$

以上より $p \mid \Phi_6(a)$ ならば $p = 2, 3$ または $p \equiv 1 \pmod 6$ である.

(なお,$\Phi_6(a)$ は奇数であるから実際には $p = 2$ は条件をみたさない)

同様に一般の n に対して次の定理が成り立つことがわかる.

定理 2.4. p を,$p \nmid n$ なる素数とする.このとき,$\Phi_n(a)$ が p の倍数となるような整数 a が存在するならば $p \equiv 1 \pmod n$ である

証明. $\Phi_n(a)$ が p の倍数となるような a をとる.$\Phi_n(a+kp) \equiv \Phi_n(a) \equiv 0 \pmod p$ であるから,必要ならば a を $a+kp$ で置き換えて $a \neq \pm 1$ であるとしてよい.補題 2.2 から

$$a^n - 1 = \Phi_n(a) \prod_{d \mid n, d \neq n} \Phi_d(a)$$

であり,$\Phi_d(a)$ は整数であるから $a^n - 1$ は $\Phi_n(a)$ で割り切れ, したがって p で割り切れる.$a^n \equiv 1 \pmod p$ から a は p の倍数でなく,p を法として a に対応する a に対応する指数を e とすると補題 1.12 より $e \mid n$ である.

$e \neq n$ であると仮定し,$\dfrac{n}{e} = f$ とおく.

$$a^e \equiv 1 = \prod_{d \mid e} \Phi_d(a)$$

であるから,

$$0 \equiv \Phi_n(a) \prod_{d \mid n, d \nmid e, d \neq n} \Phi_d(a) = \frac{a^n - 1}{a^e - 1} = \sum_{k=0}^{f-1} a^{ek} \equiv \sum_{k=0}^{f-1} 1 = f \pmod p$$

よって $p \mid f$ であるが,$f \mid n$ から $d \mid n$ となり矛盾する.したがって $e = n$ であり,系 1.13 より $e = n \mid p - 1$,すなわち $p \equiv 1 \pmod n$ である. □

系.(定理 1.9) 任意の正の整数 a に対し,$p \equiv 1 \pmod a$ なる素数 p が無限個存在する.

証明. $p \equiv 1 \pmod a$ なる素数が有限個であるとし,そのような素数すべての積を P とおく ($p \equiv 1 \pmod a$ をみたす素数が存在しないならば $P = 1$ とする).k を整数として,$\Phi_a(kaP)$ を考える.

アメリカ
数学
海外研修

SSH アメリカ数学海外研修

1．実施目的

グローバル社会で活躍する研究者の卵を養成する。世界的に活躍する大学の講師の講義を受け、アメリカの生徒とともに数学の問題を考え議論することは、これからの国際時代で活躍していくのに必要な力である。また、教員が、海外における講義の方法・議論の方法・考え方などを習得し、そのノウハウを研究して世界に向けての積極的な情報発信の実践的研究のため海外研修を実施する。「ハイレベル研修」や数学研究大会実施にむけての準備としたい。

2．研修先及び研修概要

・研修先　　アメリカ（サンノゼ）

・研修内容

①数学講義：Zuming Feng 氏

世界の数学オリンピックをリードする世界的に有名な指導者による講義。

・Feng 氏の講義

Phillips Exeter Academy で教授。アメリカにおける数学研究者の一人。15 歳で Beijing University に入学、18 歳で Johns Hopkins University（JHU）Graduate School of Mathematics に入学した。1994 年に JHU において an emphasis on Algebraic Number Theory で博士号を取得している。一方で、アメリカの優秀な中高生に対して高度な数学を指導し「数学オリンピック」で常に世界トップの結果を出している。代数・幾何・組合せ論等について世界の発展～応用分野について講義を受ける。

②藤田岳彦氏　講義

中央大学理工学部教授。アメリカでの講義をもとに日本で学習する内容との関連を示しながら解説・講義を行う。これにより、世界のトップレベルの高校生が学習する内容を着実に習得するようにする。

③スタンフォード大学講演

講師　星友啓（ほし　ともひろ）氏，Ph.D.

Head of Core Education Program for Gifted Youth

題目　「科学的思考の論理学」

数学に裏付けされる科学技術がどのように社会で活用されているかを学ぶ。

④シリコンバレーIT 学習

インテルミュージアム、テックミュージアム

世界の代表的な企業や科学研究館などで見学・講義を聞く。

3．Feng 氏講義

（1） 概要

アメリカの数学の中高生に対するハイレベルな中等教育のスペシャリストである Feng 氏に依頼し、数学のハイレベル研修を 3 日間にわたり実施した。研修は生徒の理解度に応じた 4 つの班に分けたうえで、Feng 氏が開発した教材を用い、Feng 氏の指導のもと、現地のアシスタントの助けを借りながら実施した。普段の学校教育の現場では扱う機会の少ない数学的な技法や考え方について、数多くの問題演習を通じて講義および演習を実施した。

（2） 研修の詳細

① 班分けについて

先述したとおり、今回の研修では生徒の理解度に応じて別の教材に取り組ませることを目的として 4 つの班に分ける方式をとった。班分けを実施するための基礎材料として、Feng 氏に事前に班分けのための問題（クラス分け診断テスト）を準備していただき、それを用いて班分けを実施することとした。

具体的には 4 つのレベルの問題を英語とその日本語訳で用意し、それぞれを解いてみた「手応え」により、各自の自己申告で班分けを実施した。班分けに用いた問題の一部と、日本語に訳したものの一部を資料３－１と資料３－２に挙げておく。各自の自己申告により分けられた班の人数は表３－１の通りである。生徒のテスト結果を踏まえて、当初予定していた入門班を廃止し、初級班を 2 班構成した。また、初級班は希望が多かったため、2 グループに分けて構成した。

表３－１　班分けの概要

班	人数
初級 1	7
初級 2	6
中級	5
上級	2

② ハイレベル研修の内容について

4 つの班に分けたために Feng 氏のみですべての班を指導していただくことは困難であるので、国際数学オリンピックの金メダリストなどの強力な現地アシスタントに協力していただいた。

Feng 氏により準備していただいた教材は主に、代数的問題を取り扱う「Algebra」、図形的問題を扱う「Geometry」、組み合わせ論や確率を扱う「Combinatorics」、数の理論を扱

う「Number Theory」の４つの分野を中心に構成されている。講義や演習は、これらの教材を中心に、午後１時前から午後５時過ぎまで３日間にわたり実施した。講義のテキストはもちろん翻訳したものではなく英語のままで行い、講義自体もすべて英語で行った。実際の研修を実施する際のテキストの一部とその日本語訳の一部を資料３－３と資料３－４に挙げておく。また、研修に際しては、事前に藤田氏による、テクニカルタームについての研修や、重要な数学の基礎的な概念についての研修を実施し、十分な準備をして本番の研修に臨ませる体制をとった。

研修には現地のスタンフォード大学をめざす高校生の希望者もともに参加する形態とした。これにより、単に数学の学習だけにとどまらず、現地の高校生の学習に対する意欲や学習姿勢から刺激を受けたり、現地の高校生たちと交流することも図った（図４－２）。

図３－２　研修の様子（上）・フェン氏の講義の様子（中）・交流の様子（下）

（３） 研修の効果

① 全般的な効果の分析

初日の研修では、初めてのネイティブスピーカーによる講習と、積極的に発言を繰り返すアメリカ流の授業スタイルに非常に戸惑いを見せていたようである。また、事前に学習したはずのテクニカルタームを必要な場面で思い出せず、苦労している様子も見られた。しかし、それらの反省をふまえて臨んだ 2 日目以降の研修では、理解できない部分を、自分から手をあげて講師に質問したり、解くことができた問題の解答を前に進み出てホワイトボードに書いてプレゼンテーションを行うことができた生徒が複数おり、着実に意識が変わっていく様子を見ることができた。

② アンケート結果の分析

研修後にアンケート調査を実施した。アンケートは以下の項目について、評価が高いものを 4 点、低いものを 1 点として、各項目についての得点を集計した。アンケートの結果は次のとおりである。（自由記述により得られた意見や感想の一部を資料３－５に挙げる。）

表３－２ アンケート集計結果

項目	4	3	2	1	平均
ハイレベルな数学を学習する方法のヒントを得た。	5	13	0	0	3.3
新しい考え方や知識を身につけることができた。	14	3	1	0	3.7
海外の学生と一緒に学習して刺激をうけた。	16	1	1	0	3.8
英語での講義は貴重なよい機会となった。	17	1	0	0	3.9
理解度別で講義を受けられたのはよかった。	11	5	1	1	3.4
今回の研修プログラムに満足した。	13	5	0	0	3.7

（ほか無回答２）

研修以前と比べてハイレベルな数学を学習するヒントを得たという項目については、有効回答のすべてが肯定的な意見であった。3 点と答えた生徒が多かったが、将来について尋ねる面もあった分、自信をもって答えられなかった生徒が多かったのではないかと予測される。

新しい考え方や知識を身につけられたか、という問いについては、4 点と答えた生徒が有効回答の 77.8%に達しており、平均スコアは 3.7 点である。Feng 氏により開発された教材の成果が十分に現れていると考えられる。

海外の学生と一緒に学習して刺激をうけたか、という問いについては、4 点をつけた生徒は 88.9%に達しており、平均スコアは 3.8 点である。また、英語での講義は貴重なよい機会になったと思うか、という問いに対してはさらに上回るスコアを上げている。生徒の感想でも、アメリカの学生の学習意欲や授業に臨む姿勢、指導者の豊富な知識や高度な思考力に対する素直な驚きがみられた。国際的に活躍する人材となるうえでどのような学習姿勢

でのぞみ、どのような力を身につけていけば良いのかを身近に感じさせることができた。研修地としてアメリカを選んだ狙いがよく成果を読み取られる。

理解度別の班構成については、肯定的な意見が77.8%であり、平均スコアは3.4点であった。やや低いスコアをつけた生徒も若干見られるが、自由記述で積極的な授業スタイルに触れている生徒が多いことを勘案すると、理解度別であったことより少人数であったことの方に対しての意見であると考えられる。

満足度については、有効回答のすべてが肯定的な意見で、平均スコアも3.7点と高かった。今回の研修は総合的に非常に満足度が高かったことがわかる。

資料3－1　クラス分けテストの問題の一部（原文）

EC1/1. A tetrahedron with four equilateral triangular faces has a sphere inscribed within it and a sphere circumscribed about it. For each of the four faces, there is a sphere tangent externally to the face at its center and to the circumscribed sphere. A point P is selected at random inside the circumscribed sphere. What is the probability that P lies inside one of the five small spheres?

EC1/2. Given a positive integer n, evaluate $\gcd(n!+1, (n+1)!)$.

EC1/3. For positive real number a, let x_1, x_2, x_3 be the roots of the equation $x^3 - ax^2 + ax - a = 0$. Determine the smallest possible value of $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$.

EC1/4. In an increasing sequence of four positive integers, the first three terms form an arithmetic progression, the last three terms form a geometric progression, and the first and fourth terms differ by 30. Find the sum of the four terms.

EC1/5. Suppose that $P(x)$ is a polynomial such that $P(1) = 1$ and

$$\frac{P(2x)}{P(x+1)} = 8 - \frac{56}{x+7}$$

for all real x for which both sides are defined. Find $P(-1)$.

EC1/6. Determine with justification all primes p such that 43 divides $7^p - 6^p + 2$.

EC1/7. In triangle ABC, $\angle C = 90°$. Point D lies on segment AB such that $CD \perp AB$. Given that $BD = 29^3$, and AC, AD, BC are all integers, find $\cos B$.

EC1/8. All three vertices of an equilateral triangle are on the parabola $y = x^2$, and one of its sides has a slope of 2. The x-coordinate of the three vertices have a sum of m/n, where m and n are relatively prime positive integers. What is the value of $m+n$?

EC1/9. Compute

$$2\binom{2004}{3} - 4\binom{2004}{4} + 6\binom{2004}{5} - 8\binom{2004}{6} + \cdots - 4000\binom{2004}{2002} + 4002\binom{2004}{2003}.$$

EC1/10. In quadrilateral $ABCD$, $\angle BAD = \angle ADC$ and $\angle ABD = \angle BCD$, $AB = 8$, $BD = 10$, and $BC = 6$. The length of segment CD may be written in the form of m/n, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m+n$.

資料３－２　クラス分けテストの問題の一部（日本語訳）

$\boxed{1}$ 制限時間 60 分

2-1 Phillips Exeter Dorm バスケットボールリーグには 30 のチームがある。2 つのチーム「Soule Internationals」と「Abbot United」が同時に選ばれないようにしてトーナメントのための 4 チームを選ぶ方法は何通りあるか。

2-2 2 人の少年が一緒に鉄道の橋を $\frac{3}{8}$ だけ歩いて渡ったところで、時速 60km で列車が近づいてきているのに気付いた。彼らは同時に、同じ一定の速度で、それぞれ橋の手前と向こう側とに分かれて走り出した。それぞれが橋の端に到着するのと同時に、ちょうど列車も橋の端に到着したという。彼らは時速何 km で走ったか。

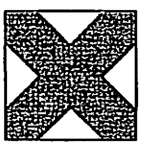
2-3 三角形 DEF において、H を D から EF におろした「高さ」の足とする（すなわち D から直線 EF への垂線の足を H とする）。$DE = 60$, $DF = 35$, $DH = 21$ とするとき、三角形 DEF の面積の最大値と最小値の差を求めよ。

2-4 辺の長さが 2, 3, h の直方体の（内部の）2 つの対角線が直交している。h の値を求めよ。

2-5 正方形の中に、4 つの頂点までの距離が 27, 21, 6, x となるような点がある。x が整数のとき、x の値を求めよ。

2-6 $x^2 - 5x + 7 = 0$ のとき、$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 5x + 9$ の値のうち正のものを求めよ。

2-7 下の図のようにペイントブラシで正方形の両方の対角線に沿って、対称になるようにペイントする。正方形の半分の面積が塗られているとき、正方形の一辺の長さとブラシの幅の比を求めよ。



2-8 $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2$ が 200 の倍数になるような正の整数 k の最小値を求めよ。

2-9 $ax^2 + (a+3)x + (a-3) = 0$ が x について 2 つの正の整数解を持つような a をすべて求めよ。

2-10 $\angle A = 90°$, $\angle B = 75°$, $BC = \sqrt{3}$ であるような三角形 ABC の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 制限時間 90 分

2-11 立方体の各面について、ボブが無作為に辺を選び、その中点から対辺の中点に向けて矢印をかいていく。ボブは各面について独立に辺を選ぶとして、蟻のアリーが矢印に沿ってループ状に立方体を進むことができるようになっている確率を求めよ。

2-12 実数 a, b, c について、$a - 7b + 8c = 4$, $8a + 4b - c = 7$ が成り立つとき、$a^2 - b^2 + c^2$ の値を求めよ。

2-13 $y = \frac{3}{4}x$ かつ $x^y = y^x$ が成り立つとする。$x + y$ が有理数 $\frac{r}{s}$（r, s は互いに素な正の整数）とあらわされるとき、$r + s$ の値を求めよ。

2-14 数学部にはリッチーを含めて 6 人の生徒が所属している。リッチーは毎日、数学部の友人たちのうちの異なるグループと一緒に遊んでいて、彼らと遊ぶたびに、それぞれから 1 ドルずつもらうという。リッチーが数学部のすべてのグループと遊んだ時、全部でいくらもらうか。

2-15 $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 9$ の三角形 ABC がある。点 D は三角形 ABC の外接円上の点で、AD が $\angle BAC$ を二等分するような点である。このとき、$\frac{AD}{CD}$ を求めよ。

2-16 $x^2 + y^2 - 30x - 40y + 576 = 0$ のとき、$\frac{y}{x}$ の値の最大値は互いに正の整数 m, n を用いて $\frac{m}{n}$ とあらわすことができる。$m + n$ の値を求めよ。

2-17 円上に 10 点がある。これらの中からいくつかを頂点として選んでできる異なる凸多角形はいくつあるか。(ただし、異なる頂点を結んでできる多角形はすべて異なるものとして考える。)

2-18 $AB = 10$, $BC = 12$ の長方形 ABCD において、M を辺 CD の中点、P を BM 上の点で $DP = DA$ を満たす点であるとする。四角形 ABPD の面積を求めよ。

2-19 4×4 マスに区切られた正方形を、黒と白で塗り分けるとき、どの 2 列を取り出しても、同じ場所に同じ色を塗っている箇所がちょうど 2 カ所となるような塗り方は何通りあるか。

2-20 $n^4 - an^2 + 100$ が因数分解可能であるような正の整数 a は無数に存在することを示せ。

1.6 Quadratic equations

1. [AIME1 2010] Let $P(x)$ be a quadratic polynomial with real coefficients satisfying

$$x^2 - 2x + 2 \le P(x) \le 2x^2 - 4x + 3$$

for all real numbers x, and suppose $P(11) = 181$. Find $P(16)$.

2. [AIME1 2011, by Zuming Feng] Suppose that a parabola has vertex $\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ and equation $y = ax^2 + bx + c$, where $a > 0$ and $a + b + c$ is an integer. The minimum possible value of a can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. Find $p + q$.
3. A circular sector has a 8.26-inch radius and a 12.84-inch arc length.
   (a) Find the perimeter and the area of this sector.
   (b) There is another sector that has the same area and the same perimeter. What are its dimensions?
   (c) What is the relation between the dimensions of these two sectors?
4. Find all real numbers p such that the roots of $5x^3 - 5(p+1)x^2 + (71p-1)x + 1 = 66p$ are all positive integers.
5. Given a circular sector, is there always a different sector that has the same area and the same perimeter? Explain you reason.
6. [ARML 2007] Compute the value of k such that the equation

$$\frac{x+2}{kx-1} = x$$

has exactly one solution.

7. [AMC12B 2004] The graph of $2x^2 + xy + 3y^2 - 11x - 20y + 40 = 0$ is an ellipse in the first quadrant of the xy-plane. Let a and b be the maximum and minimum values of $\frac{y}{x}$ over all points (x, y) on the ellipse. What is the value of $a + b$?
8. Find the range of

$$\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 1}.$$

9. [AMC12A 2003] Let $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$. For how many real values of a is there at least one positive value of b for which the domain of f and the range of f are the same set?
10. [Mandelbrot 2011] Calculate the exact value of the infinite continued fraction shown be-

2.2.2 Exercises

6. There are ten girls and four boys in Mr. Fat's combinatorics class. In how many ways can these students sit around a circular table such that no boys are next to each other?
7. [AIME 2001] A fair die is rolled four times. What is the probability that each of the final three rolls is at least as large as the roll preceding it?
8. [HMMT 2002] Determine the number of subsets S of $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ with the following property: there exist integers $a < b < c$ with $a \in S, b \notin S, c \in S$.
9. [HMMT 2006] For how many ordered triplets (a, b, c) of positive integers less than 10 is the product abc divisible by 20?
10. Determine the number of ways to choose five numbers from the first eighteen positive integers such that any two chosen numbers differ by at least 2.

2.3 Basic counting strategies 3

2.3.1 Geometric probabilities

1. [PEA Math4 Materials] Three numbers, x, y, and z, are to be randomly chosen between 0 and 1. (Your calculator has a random-number generator.)
   (a) What is the probability that $x + y$ will be less than 1?
   (b) What is the probability that $x + y + z$ will be less than 1?
   (c) What is the probability that both $x + y < 1$ and $1 < x + y + z$?
2. [Mandelbrot 2010] Consider the unit square with vertices at $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, and $(0, 1)$. Suppose that we choose two points A and B independently and randomly around the perimeter of this square. What is the probability that point A is higher than point B; i.e. has a larger y-coordinate?
3. [PEA Math4 Materials] Suppose that PEA administrators are the only persons who have dial-in access to the Academy Internet fileserver, which can handle only one call at time. Each has a 15-minute project to do, and hopes to use the fileserver between 4 pm and 6 pm today. Neither will call after 5:45 pm, and neither will call more than once. At least one of them will succeed. What is the probability that they *both* complete their tasks?
4. [AIME 1998] Two mathematicians take a morning coffee break each day. They arrive at the cafeteria independently, at random times between 9 a.m. and 10 a.m., and stay for exactly m minutes. The probability that either one arrives while the other is in cafeteria is 40%, and $m = a - b\sqrt{c}$, where a, b, and c are positive integers, and c is not divisible by the square of any prime. Find $a + b + c$.

資料３－４　研修に使用した教材の日本語訳の一例

(a) 中心角 180° の扇形から作られた円錐の体積は，中心角 120° の扇形から作られた円錐の体積よりも大きいことを示せ。

(b) 同じ円に対する扇形で，(中心角 180° の扇形よりも）もっと大きな体積を持つ円錐をつくるようなものを見つけよ。

(c) この円から作られる円錐の体積を，用いられた扇形の中心角の関数として表し，最大の体積を持つ円錐をつくるような扇形を求めよ。

8. [PEA Math4 Materials] Garbanzo 豆の缶は通常 4000cc（4 リットル）の容積を持つ。これらの缶の製作者は缶の大きさを，4000cc 入れることができるようにという要求を満たしつつ，可能な限り小さく作るだろう。最適な各部分の長さを求めよう。

(a) 体積が 4000 であるような直円柱の例を見つけよ。その直円柱の全表面積を計算し，平方センチメートルを単位として答えよ。

(b) そのような円柱の高さと表面積を，半径 r の関数として表せ。

(c) 体積が 4000 であるような円柱のうち表面積が最小となるようなものの半径 r を求め，そのときの高さを計算せよ。

9. $f(x)=\frac{2x^2+3}{x-2}$ のグラフを，漸近的な挙動もすべて調べて描け。また，f の定義域と値域を求めよ。

10. [Canada 2002] a, b, c を正の実数とするとき，

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$$

を証明し，等号成立条件を求めよ。

1.1.2 練習問題

11. x および y は正の実数で，$x^3+y^3=x-y$ を満たすとする。このとき，$x^2+4y^2<1$ を証明せよ。

12. 条件 $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{vu} \geq 1$ を満たす正の実数 u, v, w に対して不等式

$$u+v+w \geq \lambda$$

が成り立つような定数 λ の最大値を求めよ。

13. x, y, z を $x+y+z=1$ を満たす負でない実数とする。$xy+yz+zx-9xyz \geq 0$ を証明せよ。

14. 正の数 a, b, c に対して，

$$2\sqrt{bc+ca+ab} \leq \sqrt{3}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

を証明せよ。

資料３－５　自由記述での意見・感想の一部

１年女：海外の生徒の積極性にとても驚きました。私は普段、授業中に手を上げることや、自ら積極的に発言することもないのでとてもいい刺激になった。あと、授業中の先生と生徒の会話が多くて、日本より先生との距離が近く感じられていいなと思いました。

１年女：アメリカに住んでいる人たちと話せたり、英語の授業を受けたりと、とてもよい刺激になったと思う。またアメリカの食文化や生活様式をしれたのでいい経験になった。

２年男：日本と違い生徒主体で積極的な授業で自由な雰囲気に驚きました。また、皆どの問題もすぐに答えていくのがすごかったです。

２年男：授業の自由度が高い。数学の問題に関して白熱した議論をかわす生徒が多かった。

１年男：日本の授業とは違って、先生のいったことをノートに写したりというよりは、自分の考え方などをみんなで発表し合う形式でとても楽しかったです。

１年男：海外の先生が、英語があまりわからない僕たちに丁寧に教えようとしてくれて、とてもありがたいことだと思った。

4．藤田氏講義

（1）概要

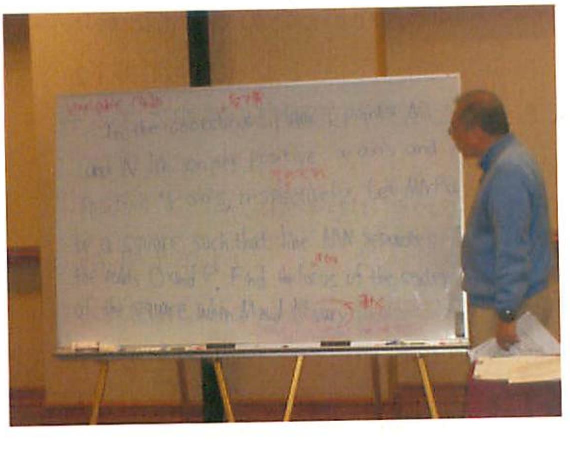
生徒たちが現地の講習をスムーズに受講し内容を吸収できるよう，事前に必要な数学の知識を確認・習得する。また，生徒たちが不慣れな英語の問題文を速やかに読めるようにする。

・日時　2011年12月26日　9時00分～11時00分
　　　　2011年12月28日　9時00分～11時00分
　　　　2011年12月28日　19時30分～21時30分
　　　　2011年12月29日　9時00分～11時00分

・場所　Crowne Plaza Hotel San Jose - Silicon Valley
　　　　777 Bellew Drive, Milpitas, CA 95035 , USA

（2）内容

2時間の講義を4回実施し，最初の3回は行きの飛行機の中でのクラス分け診断テストの問題の解説を中心に，現地での講習を受けるにあたって必要となる数学の知識の確認と英語の問題文の読み方について講義を行った。幾何では中線定理や Stewart の定理，整数問題では Fermat の小定理や Wilson の定理などを確認した。英語の問題文については，構文が非常に平易であることが実例を用いて示された。単語についても派生語とともに詳しい解説があった。また，第2回目，第3回目の講義後には，時間の許す限り現地の授業で分かりにくかった部分についての質問にも応じた。第4回目はあるクラスのその日の午後の学習内容が入手できたので，予習を兼ねて，Gauss 記号（整数化関数）の概念とそれを含む数式の扱い方について解説を行った。

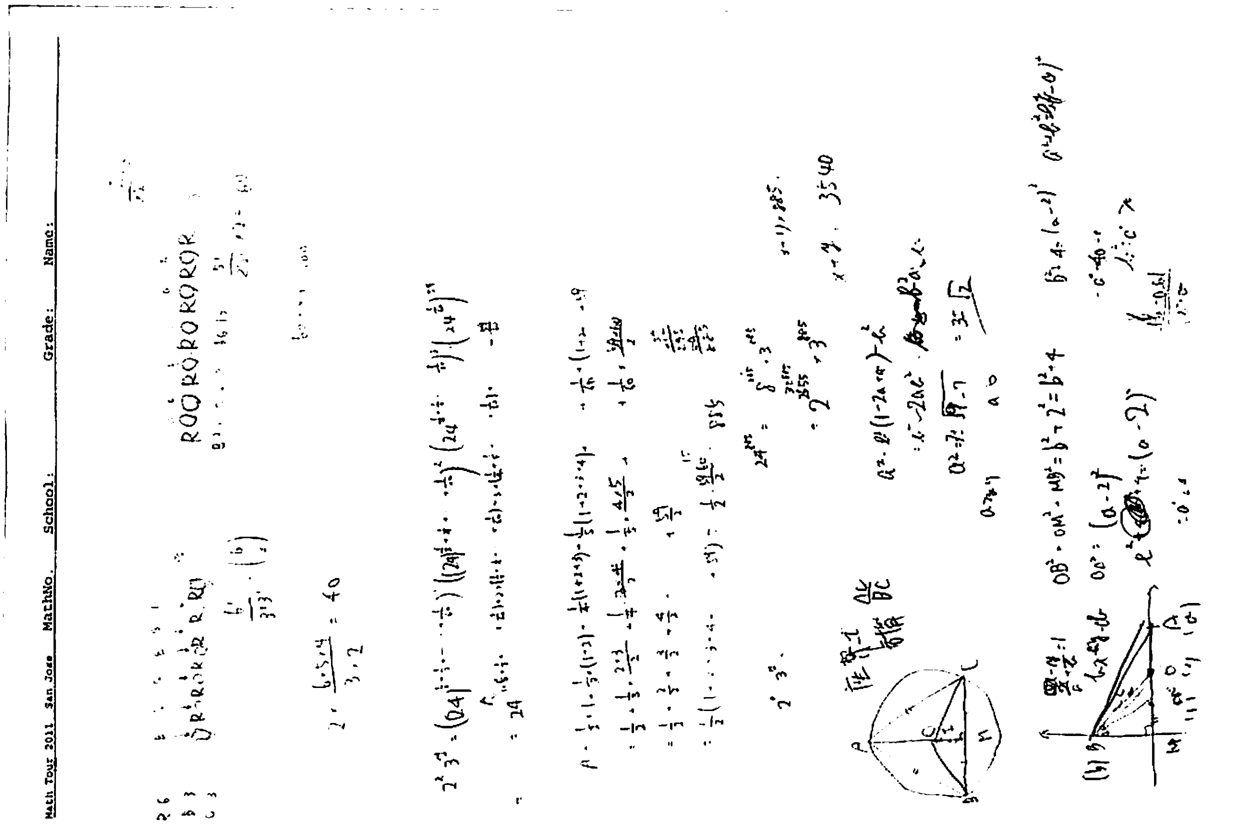


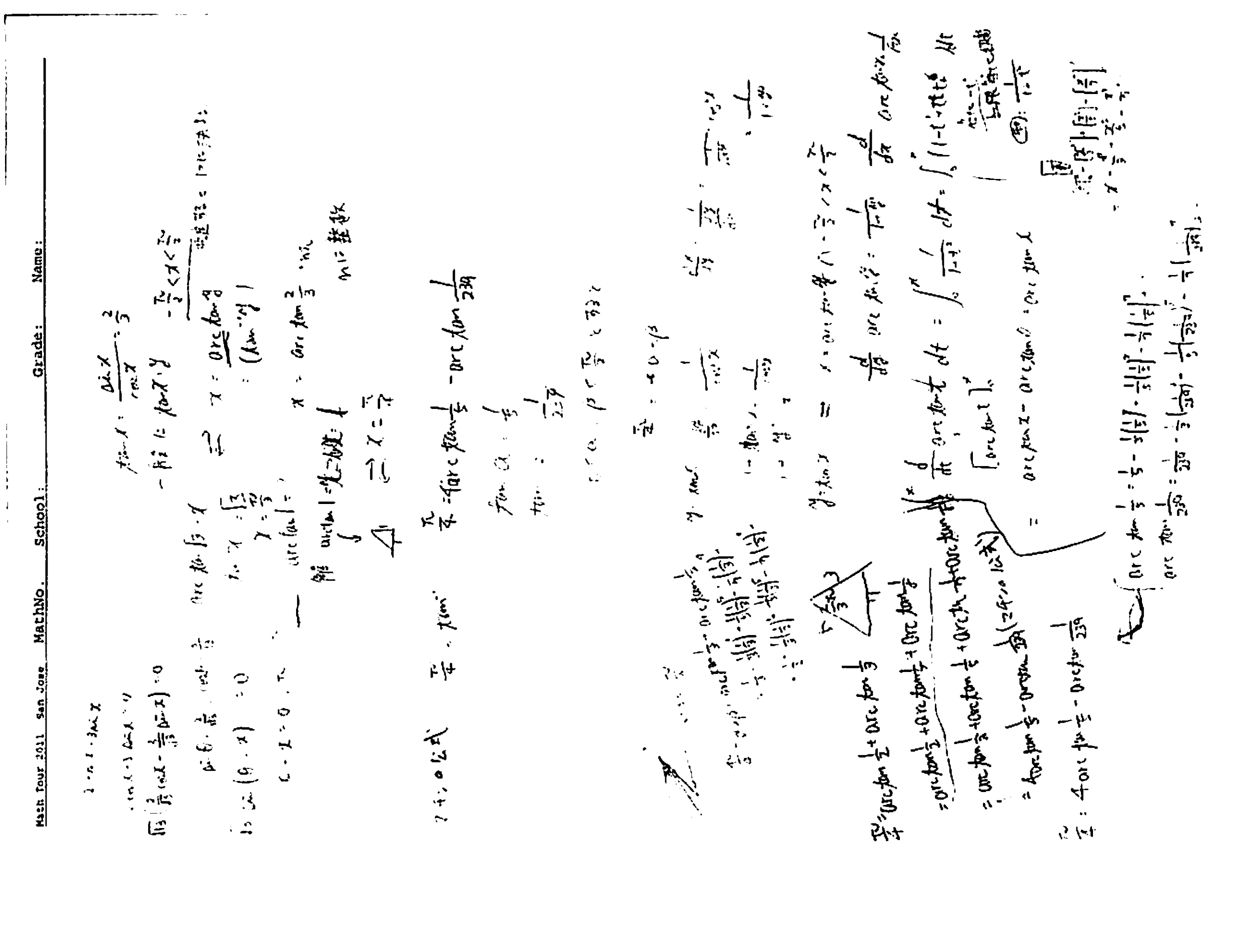
(３) 生徒の感想

事前に講義の準備・ポイントについて講義を受けることは大変効果があり、肯定的な意見が多く出ていた。自由記述の生徒の感想においても，「この講義がなければ現地での授業に全くついていくことができなかった。」「英語で理解するのが難しい部分を日本語で教えてもらえた結果，英語での授業にスムーズに入っていくことができた。」とあり，この講義が現地での講習を受けるにあたり，事前の準備として非常に有効であったと認められる。特に，１年生においては，「三角関数」「数列」「ベクトル」は学校ではまだ履修していない分野であったにもかかわらず，積極的に理解しようと非常によく努力していた。この講義の目的である「講習に必要な数学の知識の確認・習得」「英語の問題文に慣れること」は充分に達成されたものと思われる。以下、代表的な感想（自由記述）をあげておく。

・飛行機の中で解けなかった問題をわかりやすく解説していただけてよかった。また，英語の解説もいろいろなところで役立った。（２年生男子）
・説明がわかりやすかったので，非常に良いテクニックなどを吸収することができた。（２年生男子）
・新しい知識やテクニックを身につけることができた。（２年生男子）
・数学だけでなく，英語の勉強にもなったのでよかった。（２年生男子）
・学校で習っていない定理や英語のことを教わって，とても面白い授業だった。（２年生女子）
・新しく学ぶことが多く，消化するのが大変だったが，いろいろな定理や公式を教えていただき，よい勉強になった。（２年生女子）
・とてもわかりやすい授業だった。難解なところもあったが，とても有益であった。定理で知らなかったものがあるので，日本に帰ったらしっかり復習したい。（２年生女子）
・この講義がなければ現地での授業に全くついていくことができなかったので本当にありがたかった。（１年生男子）
・英語で理解するのが難しい部分を日本語で教えてもらえた結果，英語での授業にスムーズに入っていくことができた。（１年生男子）
・いくつかの事柄を関連させながら解説してくださったのでわかりやすかった。（１年生男子）
・英単語の解説が有益であったと感じた。１つの単語から数学用語であるなしにかかわらず，様々な単語に派生していく過程が非常にわかりやすかった。（１年生男子）
・学校の授業だけでは絶対に知ることもない内容などもあり，とても有益なものばかりだった。（１年生女子）
・わからないことも多かったけれども，本当に有益な講義だった。家に帰ってからもう一度復習してできるだけ理解したい。（１年生女子）
・難易度の高い問題を解く際に，とても有益な内容でよかった。（１年生女子）

資料（生徒の講義ノート）


Math Tour 2011 San Jose MathNo. School: Grade: Name:


Math Tour 2011 San Jose MathNo. School: Grade: Name:

５．スタンフォード大学　星氏講義

スタンフォード大学で実際に講義を担当されている先生の講義を直接受けることにより，研修に参加した日本の高校生に世界に目を向けさせ，より広い視野を獲得させる。また、「科学的思考の論理学」という題目の講義により，理系分野へ進もうとする高校生に科学における議論の重要性を気づかせ，将来世界各国の研究者との議論・討論に長けた日本人として活躍するためのきっかけを与えることを目的とした。

（１）概要

題目「科学的思考の論理学」

講師　星友啓（ほし　ともひろ）氏，Ph.D.

Head of Core

Education Program for Gifted Youth

日時　2011年12月27日　15時30分～17時30分

場所　Crowne Plaza Hotel Palo Alto

4290 El Camino Real, Palo Alto, CA 94306 , USA

（２）内容

①科学的思考における議論の重要性

・仮説（理論），実験・観察，データと仮説（理論）との合致，だけでよいのか？

・データと理論的予測の一致はかならずしも理論の正しさを保証しない。

・科学的方法における議論の重要性

②科学的思考における議論の論理学的分析

・代表的論理構造

（ア）演繹的議論

（イ）帰納的，確率的議論

（ウ）アブダクション

・科学的な思考はこれらの論理構造にとどまらない

（ア）証言による議論

（イ）方法論に関する議論

（ウ）単純性による議論，等々

③まとめ

（ア）批判的精神：科学者として，どのような議論が理論と証拠をつなぎとめているかということに注意して，批判的に科学的理論を思考しなければならない。

（イ）コミュニケーション能力：科学者として，自らの議論，主張を明確に提示できなければならない。言語，プレゼンテーションの高い能力が重要である。

（3）生徒の感想

アンケート結果では，刺激になったかどうかを問う設問に対し 8 割以上の生徒が「とてもそう思う」，他の生徒も「そう思う」と答えており，否定的評価は皆無であった。この結果から，今回の講義が参加生徒により極めて肯定的に受け取られていることがわかる。また、生徒感想においても，「普段あまり気にしていない科学的な考え方というものを再確認」「自分の頭では思いつきそうもない考えや、世界の大学での数学のレベルの現状などを教えてもらってありがたかった」など，視野が広がったことを伺わせる記述が見られる。また，「議論の大切さがよく分かった」「議論について深くメカニズムなどを知ることができ、今後数学などにも役立つ」など，議論の重要性への気づきを伺わせる記述も見ることができる。以上より，当初の目的に対して一定の効果が得られたものと考えられる

質問１：スタンフォードで活躍されている先生の講義を聴くことは刺激になった。

・とてもそう思う	15	83.3%
・そう思う	3	16.7%
・あまり思わない	0	0.0%
・思わない	0	0.0%

質問２：講義内容について、よく理解できた。

・とてもそう思う	13	72.2%
・そう思う	5	27.8%
・あまり思わない	0	0.0%
・思わない	0	0.0%

以下、代表的な感想（記述）をあげておく。

・普段ものを考えるときに使う論理的思考がどのような種類で他とどうちがうのかということを教えていただいた。非常に面白かった。（2 年生男子）
・ところどころで問いがあり、自分の考えが必要な講義だった。（1 年生男子）
・さまざまな論理、思考、判断の方法を教えてもらった。（2 年生女子）
・アメリカの生徒や先生は講義の仕方が上手く、人を納得させせると聞いたが、実にわかりやすい講義だった。（1 年生男子）
・話し方、プレゼンテーションの仕方などがとても上手で、聞き手にすごくよく伝わっていた。また、現役のスタンフォードの教授にお話を伺うことができる機会なんてまずないので、本当に貴重な時間であった。（1 年生男子）
・普段あまり気にしていない科学的な考え方というものを再確認できるもので良かったです。また、例も多く分かりやすかったです。（2 年生男子）

・私自身 SSH でプルーフ研究を行っているので、科学の論理学はとてもためになったと思う。議論の大切さがよく分かった。 (2 年生女子)

・いろいろな考え方を知ることができてよかった。 (1 年生女子)

・議論という内容でものすごく興味深かった。論理に構造というものがたくさんあるということを初めて知った。また、非科学的思考を含まない論理を組み立てるのは難しいことだと感じた。 (2 年生女子)

・論理学ということであったが、普段の議論について深くメカニズムなどを知ることができ、今後数学などにも役立つものであった。 (2 年生女子)

・星先生のようなすごい人にお会いできることだけでもすごいのに、講義までしていただいて、本当に幸せだと思いました。スタンフォード大学の先生なのでもっとハイスピードで講義が進んでいってしまうんだろうなあと思っていたけれど、そんなことはなく、分かりやすい説明をしていただいたので、内容も理解できて良かったです。(1 年生女子)

・星先生の講義で、自分の頭では思いつきそうもない考えや、世界の大学での数学のレベルの現状などを教えてもらってありがたかった。また、話の持ち込み方も非常に上手だと思った。 (1 年生男子)

・とても面白い内容だった。完全に理解できたわけではないけれど、説明もとてもわかりやすく本当に良い経験になった。 (1 年生女子)

6．シリコンバレー（サンノゼ）での IT 学習

（1）世界最大の半導体メーカー「インテル博物館」で IT を学ぶ

①概要

世界最大のコンピュータチップメーカーであるインテルの本社1階に開設された「インテル博物館」を訪問。博物館スタッフのガイドにより、パーソナルコンピュータに使われているCPUがどのように生み出され、その歴史の過程で今日に至る電子機器社会の形成にどのように影響を与えてきたかということを学んだ。ここには、独自の展示や、インテルの技術を体験できるように考案された種々のプレゼンテーションが用意されており、また、現地の日本人通訳の方が丁寧に通訳していただいたので、生徒達もガイドさんの熱心な説明に深く聞き入っていた。

②内容

（ア）インテルとマイクロプロセッサーの歴史

1968 年から始まったインテルの歴史をコアメモリ、チップ、マイクロプロセッサーなどを紹介してもらいながら見学。デジタル技術の基本である2進法について学ぶコーナーでは、生徒の名前のイニシャルが2進数に直されてデーター化される仕組みを学ぶことができた。

（イ）メイン・フレームからパソコンまで

コアメモリーからチップの誕生、その後小型化したコンピュータの内部を紹介してもらいながら見学。スケールの比較を視覚的に拡大されて見られるコーナーでは、現在使われているトランジスタが酵母菌と並べられるほどの大きさであることを知り生徒達は驚いていた。

（ウ）コンピュータ・チップの製造過程と最新技術

コンピュータチップのデザイン、シリコンの働き、クリーンルームでのチップ製造など、最新の技術を紹介してもらいながら見学。チップ製造のクリーンルームが外科の手術室より何百倍もホコリの少ない清潔な環境であることには、生徒も感動していた。

③生徒の感想

・普段使っている電子機器のチップは１年半で１／２になると言われますが、今とても小さくなっていることに驚きました。

・マイクロチップの歴史や、インテルの成長を学び、知らないことばかりでさすがアメリカだと思った。驚いたことはClean Roomの清潔度合いで、最先端技術には環境も大きく影響するとわかった。また、創始者の言葉がとても印象的だった。

・創始者の一人Robert Noyce氏は、人間一人ひとりが個人の力を発揮することが大切だとして社員を大切にしたのだそうだ。また、彼の言葉に「歴史を恐れず、自分の思うように前進すべきだ」とあるそうだ。そうした信念がインテルの発展を支えていたのだと思う。

（２）最新テクノロジーを体験、「テック・ミュージアム」で学ぶ

①概要

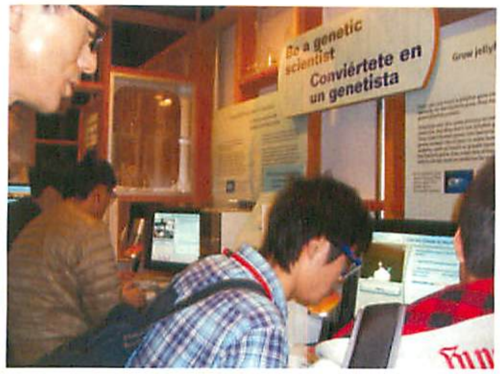
1990 年にシリコンバレーのテクノロジー根拠地にふさわしい博物館としてつくられた「テックミュージアム」を訪問。ここは、サンノゼ市とその周辺にある約 300 の企業による寄付金で設立され、ハイテク産業のメッカといわれるこの地の英知と技術のすべてが凝縮されている体験型の博物館で、オープン以来テクノロジーイノベーション博物館の最先端として世界各国より訪問者を集客している施設である。

館内は展示物によって、電子工学、宇宙探検、ハイテク自転車、ロボット、原料そしてバイオテクノロジーの 6 つのエリアに分かれている。さらに 4 つのテーマ別エリアに分かれ 250 ものハイテク関係の展示がある。初めに大画面シアターで短編の映画を視聴した後、各自自由行動で館内を見学した。

②内容

(ア)「アイマックス・ドーム(The Hackworth IMAX Dome)」

一度に300名近くを収容できる大画面シアターで、この日は「The Magic of Flight」という短編映画を視聴。世界的に有名な Blue Angels の曲飛行を操縦士の目線でスリルを味わうことができた。



(イ) テーマ別エリアでの見学・体験

バイオテクノロジーのコーナーでは、クラゲの緑色蛍光タンパク遺伝子を抽出しバクテリアに再導入するという実験が、研究者さながらに体験できた。さらに自分たちが操作したバクテリアの様子を後日にWebページで見ることができるというものであった。

③生徒の感想

・The Tech ミュージアムでは、最先端の技術を使った映画を見ることができその風景のしくみにすごく興味をもちました。

・日本とは違う体験型だったので新鮮で楽しかった。また、日本では買えないような素晴らしい数学Tシャツが買えた。

・機械に似顔絵を描いてもらったのだが、結構似ていて、ロボットはやっぱりすごいと感じた。とても興味深い展示が多くまた訪れたいと思った。

・館内の見学のとき、地震の揺れを体験できたりして、とても楽しい展示物がたくさんあった。

・ボランティアの方が色々説明してくれて分からないところもあったが、その機器が何に使われているかなどが分かって勉強になった。

マスツアー2011　アメリカ研修旅行　生徒の感想のまとめ

７日間の行程のなかで、生徒に毎日その日の全体の感想・数学に関する感想を課し、毎日、付き添い教員全員が内容を把握した。最終日には研修全体のアンケートを実施し、各項目についての感想を記してもらった。また、後日研修全体を通しての感想文を提出させた。

行きの飛行機の中での予習、現地宿泊場所での講習、現地の生徒と一緒のセミナーの受講を中心に数学中心の研修を実施した。数学の講義で英語の聞き取りと理解、英語で書かれた数学の問題を解くという、非常に集中力の必要な作業を毎日続けたことは、生徒にとって心身ともにかなりの負担になったようである。その体験や苦悩が、日々の感想に現れており、特に英語力や数学の知識不足に関する切実な思いが記されている。

しかしながら、この研修を継続する中で、ほとんどの生徒が徐々に英語にも慣れ、数学にも本来の力を発揮してきた。また講座の合間に、見学や講演を交えることで、心身ともにリフレッシュし、モチベーションを上げることができた。全体の感想はすべて有意義な研修であったことを記している。以下、研修の内容に沿って、生徒たちの生の声を記しておきたい。

○飛行機の中でのクラス分け診断テストについて

・出国前にもらったプリントをやっていた。難しい問題が多く、自分の力不足を知った。
・解く過程で、今まで使わなかったような考え方を身につけることができてよかった。
・問題の解法をゆっくり探すというのはすごく楽しいと思った。
・自分の解き方よりも素晴らしい方法があるように感じた。
・美しい解法を見つけることが必要だ。
・講義を通して、数学の奥深さや面白さ、学ぶ価値を自分なりに見出せたらいいなと思った。
・自分の力の無さを改めて痛感できたので、今後の勉強に、よりやる気ができた。

○Feng 氏の数学ハイレベル研修について

・海外の授業では生徒が自由に発言したり、前で解説したりしていて、積極的だと思った。この積極性は日本も見習うべきだと思う。
・日本の授業とは違って、先生の言ったことをノートに写したりというよりは、自分の考え方などをみんなで発表しあう形式？で、とても楽しかったです。
・発言力があって、積極的だった。クラスの雰囲気は良く、自由な感じだったし、小さな子はよく話しかけてきてくれた。Feng 先生のお話も印象的だった。質問できて良かった。
・世界のレベルを知った。自分よりもとても小さい子とかも、同じ問題をしていて、数

学とかもやる気があれば、どこまでも知識を増やせるということが分かった。

・海外の生徒の積極性にとても驚いた。私は普段授業中に手を挙げることや自ら積極的に発言することもないので、とてもいい刺激を受けた。あと、授業中の先生と生徒の会話が多くて、日本より先生との距離が近く感じられていいなと思った。

・日本と違い、生徒主体で積極的な授業で、自由な雰囲気に驚いた。また皆、どの問題もすぐに答えていくのがすごかった。

・日本では小学3年生ぐらいの子でも、自分たちと同じ、もしくはそれ以上の難しい問題をどんどん解いていたので、とても驚いた。日本では、「私には出来ない」、「私にはまだ早い問題だ」などと謙遜するのが普通なので、とてもいい刺激になった。

・日本人と違い、海外の学生は自分できちんと恥ずかしがらずに意見を述べていた。そして、難しい問題では議論を重ねて、なぜこのような答えになるかについて理解を深めていた。

・先生は英語が理解できているか聞いて下さったり、とてもわかりやすかった。

・日本とは違って生徒が自主的に発言しようとし、自分の意見にも自身を持っている姿がかっこよかった。

・海外の先生が、英語があまりわからない僕たちにていねいに教えようとしてくれて、とてもありがたいことだと思った。

・アメリカの学生は、自ら進んで発言していて、学生同士の議論だけで授業が成り立っていて、先生も生徒に出来る限り考えさせようとしていたところが、良かった。日本でも、少しずつこういうところ取り入れていった方が良いと思った。

・アメリカに住んでいる人たちと話せたり、英語の授業を受けたりと、とても良い刺激になったと思う。またアメリカの食文化や生活様式を知ることができたので良い経験になった。

・みんなで議論しあう姿勢が良かった。

・授業の自由度が高い。数学の問題に関して白熱した議論を交わす生徒が多かった。

・僕のクラスは生徒主体な授業展開で、今まで経験したことのない形式だった。オレンジを食べながら授業を受けている人もいて、とても自由だと感じた。

・数学の知識は英語を理解するのを助けてくれる。

・数学の壁よりも英語の壁が大きく感じられた。

・数学も英語も能力が足りないことを痛感した。

・自分の英語力のなさに落胆した。

・国際的に活躍できるような人になるために英語もがんばらなければならないと痛感した。

・3回の授業を通し、数学の難しさとそこにある奥深さと解けたときの嬉しさを感じた。どの問題も発想が面白く興味深いものだった。

・アメリカの授業スタイルはとても開放的で、生徒も発言力があって、クラスの一体感

が伝わってきた。そんなクラスの雰囲気に浸る一方で、英語の問題解釈に大きく時間を取られとても焦っていた。そして五感全てを使い切り、終わってみるとかなりの集中力だったのだと気づいた。

- Feng 先生の話はとても聞き取りやすいように話してくれてわかりやすかった。数学の魅力について聞くと、数学は人の役に立つことが一番の魅力だと言っていた。また数学のコンテストは考える、疑問を持たせてくれるものだとも言っていて、なるほどと思った。講義はすべて理解できる訳では無かったが、少なくとも今まで以上に考える機会、時間を与えてくれたと思う。特に交流はなかったが、レベルがとても高い人たちと同じ部屋で勉強できたことは大変貴重な経験であった。
- Feng 先生のお話が聞けて良かった。私もはっと気づかされたが、問題が与えられていることが当たり前で解くことばかりに意識が向いてしまっていた。自分で疑問に思ったことを考えていくということが大事だと分かった。3 日間を通して現地の学生は、やはり積極的で頭の回転も速くすごく優秀だなという印象がついた。少しなかよくなれた子もいて、英語も話せた。

○インテルミュージアム・テックミュージアムの研修について

- IC チップが現在のものに至るまでの過程や、研究所の中の様子などがよく分かっておもしろかった。トランジスタの小ささに驚いた。テックミュージアムでは実際に機械に触れられて今の技術は本当に進んでいるんだということを実感した。
- インテルミュージアムでは想像もつかないほど細かな作業を行っていることに驚いた。テックミュージアムでは日本ではあまり体験できないような体験ができ、良いものとなった。
- 今では世界トップシェアを誇るインテルの創設者の一人、ロバートノイスの言葉や理想も、私たち現代を生き抜く私たちに必要なことだと思う。この「個人の能力を無駄にしない」という思想は特に感動した。
- コンピュータの歴史を学ぶことができ、良かった。いろいろな展示の中で IC チップの拡大図を見たときはとても感動を覚えた。
- インテルの技術力のすごさをわかりやすく説明してもらった。IC チップ一つにたくさんの技術が使われているのは驚いた。
- 様々な物を見たり、触ったりできた。インテルミュージアムでは、マイクロチップの歴史や、インテルの成長を学び、知らないことばかりで、さすがアメリカだなと思った。驚いたことは clean room の清潔度合いで最先端技術には環境も大きく影響すると分かった。創設者の言葉がとても印象的だった。
- インテルミュージアムを見学して、最初は計算機用など１つで１つの用途だけの IC チップだったのが、パソコンに使われているような多機能なものになるなんて、インテルはすごい革命を成し遂げたんだと改めて思った。使われているトランジスタが酵

母菌と並べられる大きさだと知り感動した。また、研究室は手術室よりもほこりが少なく清潔だということにも驚いた。テックミュージアムでは、実際に機械に触れられて楽しかった。ボランティアの方が色々説明してくれて、分からないところもあったが、その機器がなにに使われるのかなどわかって勉強になった。

○藤田先生の講義について

・新しく学ぶことが多く消化するのが大変だったが、いろいろな定理や公式を教えていただき、良い勉強になった。

・もう少し記号の説明をしてほしかったが、難易度の高い問題を解く際、とてもためになる内容で良かった。

・とてもわかりやすい授業だった。難解なところもあったが、とてもためになったと思う。定理で知らなかったものがあるので、日本に帰ったら復習したい。

・説明が理解しやすかったので、非常に良い技術などを吸収することができたと思う。

・飛行機での解けなかった問題の分かりやすい解説だったので良かった。また、英語の解説もいろいろなところで役立った。

・英語で理解するから難しい部分を日本語で教えてくれ英語での授業をスムーズに受けられた。

・長時間の講義でも、一生懸命問題の解き方や公式などの知識を教えてくださって本当のためになった。

・日本語だけでなく、英語の語源や派生語も教えていただき、問題解説もわかりやすくておもしろかった。

・いくつかの事を関連させながら解説してくださったのでわかりやすかった。

・特に、英単語の授業がためになったと感じた。１つの単語から数学用語であるなし関わらず、さまざまな単語に派生してくれたので、非常にわかりやすかった。

・藤田先生の講義では”square”の”quar”は”quarter”にも関係するように「４」を意味するなど、今後、英文を読み解く上で手がかりになりそうな豆知識を教えていただけるので、その成果もあってか、ある程度まで数学の問題として解けるようになった。

・高校の範囲を越えた内容もあったが、どれも知っておくと便利そうなものばかりだった。逆にすでに習っている内容であっても使い方を工夫することで様々なことに応用できて、新しい発見につながると感じた。

・午前中の講義では、最終講義ということもあって、今まで以上に集中しているつもりでいて、ほとんどの問題で理解できた。午後からの海外の学生と一緒にする勉強は、難しかったけれど、先生の解説を見ていると、とても理解しやすくて先生の教え方がすごく上手だと思った。この研修を通して、数学についてたくさんの知識を手に入れることができたので、それらの復習もしつつ、一人で何か新しいところを学んで行きたい。

○スタンフォード大学教授　星友啓氏の講義について

・非常にわかりやすく面白かった。あの分かりやすさは論理学を教えていることに起因するのだろうか。

・普段ものを考えるときに使う論理的思考が、どのような種類で他とどうちがうのかということを教えていただいた。非常に面白かった。

・ところどころで問いがあり、自分の考えが必要な講義だった。

・文系のことをしながら少し理系のことにも触れているところが面白そうだと思った。

・アメリカの生徒や先生は講義の仕方が上手く、人を納得させると聞いたが、実にわかりやすい講義だった。

・話し方、プレゼンテーションの仕方などがとても上手で、聞き手にすごくよく伝わっていた。また、現役のスタンフォードの教授にお話を伺うことができる機会なんてまずないので、本当に貴重な時間であった。

・私自身が SSH でプルーフ研究を行っているので、科学の論理学はとてもためになったと思う。議論の大切さがよく分かった。

・星先生の講義は、興味を持っていた分野でもあり、勉強になった。私も SSH で実験から結果を導くプロセスにもっと議論を足さないといけないなと思った。帰納法などは数学との結びつきも強いが、 論理をいかに追い続けられるかという点では、文系的思考も必要になってくるんだなと思った。良い刺激を受けたと思う。

・今日はスタンフォード大学教授の星友啓氏の講義を受けさせていただいた。とても貴重な時間であった。星氏は私たちのような高校生とこのような講義をすることができたことを喜ばれていたので、私自身も嬉しかった。また、授業の内容もこれまで興味を持ったことなどないと感じるくらい面白かった。それはきっと星氏の話し方、プレゼンテーションが上手だったからだと思う。星氏は講義の終わりに、日本人の技術、個々人のアイデアはどの国にも劣らない素晴らしいものであるが、プレゼンテーションが上手くなく、損をしている。例えば、アメリカならば自分の考えをはっきり主張することができる。それが日本人にはそれが足りないのだとおっしゃっていた。確かにと納得した。また、自分の考えをしっかり持ち、それを自分の中で大切にすること。これが私もなかなかできないと感じているので、これからは他人の考え方も尊重しながら、自分の大切な idea だけはしっかり持っていきたい。

・星先生の「科学的思考の論理学」では、３つの代表的な論理構造である、「演繹的議論」「帰納的・確率的議論」、「アブストラクション」について詳しく教えていただき、今まで厳密には知らなかった論理を学ぶことができ、今後、役立てて行きたい。

・星先生の講義では「科学的思考の論理学」ということで、科学の理論はどのように根拠づけられるのか、ということなどを教えてもらった。内容は本当におもしろくて、とてもわかりやすい説明だったので、ある程度は理解できたかなぁと思う。また、演繹や帰納等の代表的な科学的思考だけでなく、証言や方法論に関する議論などの話もとても興

味深かったので調べてみようと思う。今日の議論で問題を個人がどう捕らえるかによって色々な考え方があるんだなぁと思った。講義だけでなく、質問のときのお話もとても参考になるもので、科学者は「批判的精神」や高い言語力、プレゼンテーション能力が必要という話はずっと覚えておき、実際にできるように努力していきたい。

○マスツアー全体について

・英語を上手く話せず、もどかしい思いをすることもあったが、アメリカの生徒と交流ができて嬉しかった。数学は私にはレベルの高い問題ばかりで焦った。ホテルでは晩ご飯の後にその日の授業の復習をしていたが、時間が足りず終わらないまま寝てしまう事も多かったので、日本に帰ってからしっかり教わったことを活かせるよう勉強したい。本当に今回のマスツアーに参加できて良かったと思う。

・今回は数学だけでなく、英語力も少しついたと思うし、また自分よりも格段にすごい子なんかがいて、世界の広さを知った。また日本の数学とアメリカでの数学の違い（具体的に言えば、合同式など習う範囲など）も少しはあり、そして授業の仕方や生徒の自由度（普通に歩き回ったりしていた）も日本とは大違いであった。なにより生徒の積極性、とりあえず手を挙げて当てられてから考える人もいたからビックリした。非常に勉強だけでなく態度も参考になった。また短かったとはいえ、アメリカでの生活は大変貴重なものとなった。

・研修全体を通して、もっと時間に追われて大変だろうと思っていたので、スケジュールに余裕もあって、その間に少しは分からない問題を聞いたり、前回の内容を見返したりすることができたのでよかった。研修では日本では得ることのできない様々な驚きや発見があって、とてもたくさんのいい刺激を受けて、数学・英語のどちらもこれからもっとがんばらなければいけないと思ったし、がんばりたいと思った。あと、自分に積極性が足りないことも痛感した。ホテルでの生活は従業員さんとのちょっとした挨拶などで毎日英語を使ってみることができて良かった。

・初めのうちは慣れない英語に難しい数学、または定理や公式などでとてもオロオロしていたが、日に日に慣れてきて、最終日は先生の言っていることがある程度理解することができた。しかしながら、寝坊してしまったので、その点はとても反省している。星氏の話が最も心に響いた。というのは、氏の講義の内容がどうしてか、かなり関心がもてたのだ。私はあまり数学の話に感動したり、特別興味を持ったりしたことがないのでとても嬉しくなった。

・テックミュージアムは最先端技術が集まっており、体験ができるところがたくさんあったのでとても良かった。海外研修に参加したのは初めてだが、友達もでき、知識を得ることができた。今後の勉強に対する意欲がよりいっそう高まったように思う。

・今年は日本国内ではなく、海外に行くという思い切った研修で、数学だけでなく英語も勉強でき、とても有意義な5日間だった。これからもマスツアーは開催した方がい

いと思う。

・研修前は、アメリカはどんな国か、英語は通じるか、数学の授業はきちんと理解できるかなど、いろいろ不安があったが、引率の先生の助けもあり、安心して過ごすことができた。また、現地の学生と一緒に受けた授業は、とても良い刺激になり、今後の勉強に弾みがついた。

・本当にとても良い経験になった。数学では、学んでいないことが予習でき、高校で学ばないようなことや、この研修に来ていなければ知る機会がなかったと思えるような内容もあり、とても自分のためになったと思う。また、数学だけでなく、実際に英語での授業を受けることでとても良い刺激を受け、前に比べて英語の能力が上がったような気がした。とても素晴らしい先生方におしえていただいたり、スタンフォード大学を見学したり、この研修に来ていなければ絶対にすることができないことが多かったとので、この経験を自分の将来に活かしていきたい。

・何よりもまず英語が大変だった。アメリカに来て、講師の方たちと英語でしゃべっていて自分の英語力のなさに嘆きたくなった。しかし、研修内容は大変面白く、満足のいくものだった。また、Intel museum や星先生の講義など、大変興味深い内容のものが多く、有意義な研修でもあったと強く思う。今後、日本だけでなく世界でも活躍できるように参考としたい。

平成 23 年度　大阪府立大手前高等学校　コアＳＳＨ「数学」　研究報告書

平成 24 年（2012 年）3 月 15 日　初版第 1 刷

発　行　　大阪府立大手前高等学校　数学科

大阪府大阪市中央区大手前 2-1-11

電　話　　06(6941)0051

ＦＡＸ　　06(6941)3163

http://www.osaka-c.ed.jp/otemae