

2012 年度
コアSSH「数学」
マスフェスタ報告書

巻 頭 言

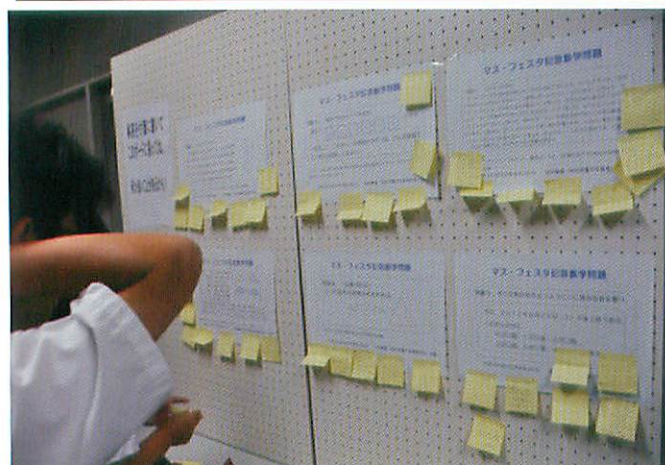
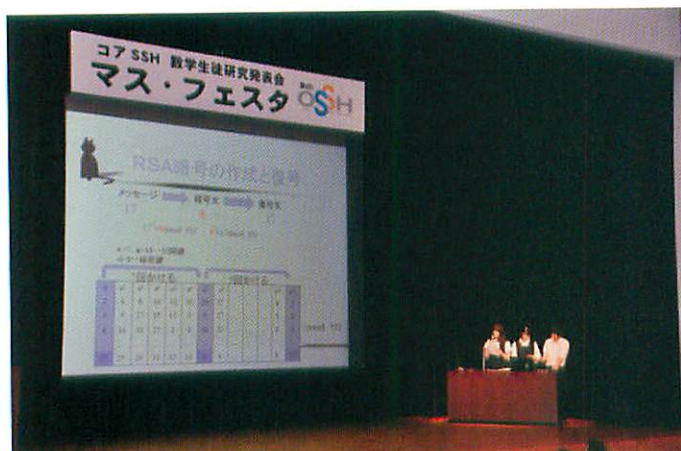
大阪府立大手前高等学校
校長 栗 山 和 之

平成 20 年度に文部科学省よりスーパーサイエンスハイスクールの指定を受けて以来、5ヶ年計画の最終年度となりました。スーパーサイエンスハイスクール(以下SSH)の事業趣旨は、高等学校における「理数・科学技術教育」に関する教育課程等の改善に資する実証的資料を得るために、SSHを指定し、理数系教育に関する教育課程等に関する研究開発を行うこと、将来の国際的な科学技術系人材の育成や高大接続等の在り方の検討の推進を図ることを目的とするものであります。その指定とほぼ並行して、数学教育を中核としたコアSSH指定校にも選出されました。

そのコアSSH校としての数ある事業のなかで、中核となる事業が「全国数学生徒研究発表会」(マス・フェスタ)であります。コアSSH連携校による数学研究の発表会は、本校が主催する全国的な大会であり、数学に興味を持つ数学好きな高校生達のつながりを広げ深めること、全国各高校の数学研究実践を共有することで数学研究に取り組む生徒や指導する教員を増やすことを目的としています。

振り返れば、マス・フェスタは、平成 21 年度に大阪府内の 4 校でスタートしました。翌年に参加 6 校となり、平成 23 年度には全国規模の 24 校に拡大し、口頭発表 27 本、ポスターセッション 50 本の発表がありました。平成 24 年度はさらに拡大し、全国 20 の都道府県から 31 校、400 名の参加があり、大きな成果をあげることができました。指導助言も 7 大学 11 名の先生方からいただくことができ、内容的にも充実したものになったと考えています。この冊子はその内容についてまとめたものですが、忌憚のないご意見をいただければ幸いに存じます。

今後の目標としては、全都道府県の高校が参加する「マス・フェスタ」が開催できますよう努力していく所存であります。これまで本校のSSHやこのマス・フェスタを支えていただいた数多くのSSH指定校の先生方や大学等研究者及び関係者の皆さま、また、SSH運営に身に余るご指導・ご助言をいただいた運営指導委員の皆さま、ご支援いただいた大阪府教育委員会の関係の皆さまに心からのお礼を申し上げますとともに、なお一層のご支援をお願い申し上げます。



敬慕者

山下

敬慕者

敬慕者

敬慕者

敬慕者

敬慕者

敬慕者

開催記念

楽しい、教員、中内、

敬慕者

第4回マスフェスタ

ひとつひとつと教えて

敬慕者

敬慕者

敬慕者

敬慕者

2012年度 全国数学生徒研究発表会



コアSSH連携校による 数学研究発表会

日時：平成24年8月25日(土) 9:50~16:00

場所：ドーンセンター 7F大ホール・4F大会議室
(大阪府中央区大手前1-3-49)

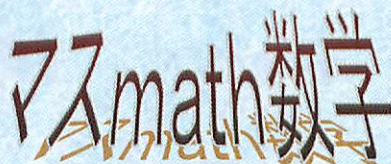
★発表校 口頭発表34本・ポスター66本



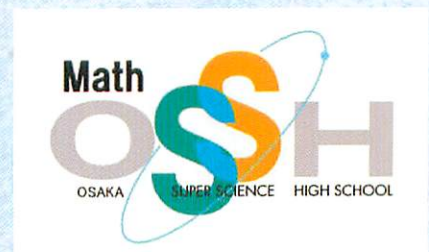
青森県立三本木高等学校・
附属中学校
清真学園高等学校
茨城県立日立第一高等学校
市川学園市川高等学校
筑波大学附属駒場高等学校
東海大学付属高輪台高等学校
横浜市立横浜サイエンス
フロンティア高等学校
石川県立七尾高等学校
福井県立藤島高等学校
福井県立武生高等学校
静岡県立磐田南高等学校
岐阜県立岐山高等学校

名城大学附属高等学校
愛知県立岡崎高等学校
立命館高等学校
奈良女子大学附属
中等教育学校
大阪教育大学附属高等学校
天王寺校舎
大阪府立生野高等学校
大阪府岸和田高等学校
大阪府立千里高等学校
大阪府立天王寺高等学校
大阪府立大手前高等学校

兵庫県立神戸高等学校
岡山県立岡山一宮高等学校
金光学園中学高等学校
広島大学附属高等学校
島根県立益田高等学校
高松第一高等学校
愛媛県立松山南高等学校
明治学園中学高等学校



$$F(1)+F(2)+F(3)+\dots+F(n)=F(n+2)-1$$



コアSSH事業企画
主催：大阪府立大手前高等学校

マス・フェスタ（全国数学生徒研究発表会） 進行表

日時 平成24年8月25日（土） 9:50～16:00

場所 ドーンセンター（大阪市中央区大手前1-3-49）

9:50 開会式

10:20 分科会会場での発表【発表順は別紙参照】13分発表+2分質疑応答+3分講評

①10:25～10:45

②10:45～11:05

③11:05～11:25

④11:25～11:45

⑤11:45～12:05

12:05 昼食休憩

・お弁当配付【4F】教員・来賓→小会議室、生徒→大会議室

⑥12:50～13:10

⑦13:10～13:30

⑧13:30～13:50

⑨13:50～14:10

⑩14:10～14:30

14:40 ポスターセッション開始（4F）

15:30 ポスターセッション終了・大ホールへ移動

15:45 全体会（各分科会からの講評）

16:00 閉会式・終了

写真撮影（全体集合写真）

●指導助言

大阪大学大学院理学研究科教授 藤原彰夫 様

大阪大学大学院理学研究科准教授 宮地秀樹 様

大阪大学大学院理学研究科准教授 安田健彦 様

大阪市立大学数学研究所所長 河内明夫 様

大阪府立大学大学院理学系研究科教授 入江幸右衛門 様

大阪教育大学教養学科教授 宇野 勝博 様

京都大学数理解析研究所 所長 森 重文 様

京都大学大学院理学研究科教授 並河 良典 様

京都大学大学院理学研究科教授 堤 蒼志雄 様

神戸大学大学院理学研究科教授 中西康剛 様

中央大学理工学部教授 藤田岳彦 様

発表校

タイトル

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 01. 大阪府立岸和田高等学校 | フェルマーの最終定理の考察 |
| 02. 青森県立三本木高等学校附属中学校 | 数学から情報通信技術への展開 |
| 03. 市川学園市川中学・高等学校 | 生存競争の数学モデルについて |
| 04. 東海大学付属高輪台高等学校 | R S A暗号 |
| 05. 福井県立武生高等学校 | ビュフォンの針とモテカルロ法 |
| 06. 名城大学附属高等学校 | 万華鏡の研究 |
| 07. 奈良女子大学附属中等教育学校 | ピタゴラス三角形の個数の近似 |
| 08. 広島大学附属高等学校 | データ検索におけるアルゴリズムの構築 |
| 09. 愛媛県立松山南高等学校 | フィボナッチ数列に関する研究 |
| 10. 大阪府立天王寺高等学校 | 数学パズル |
| 11. 大阪府立生野高等学校 | Bertrand のパラドックス |
| 12. 兵庫県立神戸高等学校 | 最適採餌行動に見る流行現象の分析 |
| 13. 金光学園中学高等学校 | ピックの定理の拡張 |
| 14. 茨城県立日立第一高等学校 | フェヒナーの法則の数学的アプローチ |
| 15. 横浜市立サイエンスフロンティア高等学校 | ウラムの螺旋 |
| | 最も響く音階は何か |
| | 色立体と人間の目 |
| | 四角形のできる確率 |
| 16. 福井県立藤島高等学校 | 正多角形の敷き詰め |
| 17. 岐阜県立岐山高等学校 | ピックの定理と π の近似値計算 |
| 18. 立命館高等学校 | ルーローの奇数多角形の一般化と重心の軌跡 |
| | 因数と循環節の 2 分割和に並ぶ数についての考察 |
| 19. 高松第一高等学校 | R S A暗号 |
| 20. 大阪府立大手前高等学校 | 多角数の拡張 |
| 21. 大阪府立千里高等学校 | ハノイの塔 |
| 22. 茨城県清真学園高等学校 | 曜日を求める数式 |
| 23. 筑波大学附属駒場高等学校 | 交通の最適化 |
| | 正多角形の面積と等しい面積の正方形の作図 |
| 24. 石川県立七尾高等学校 | ボールの軌跡 |
| 25. 静岡県立磐田南高等学校 | 結び目に対する解析的アプローチ |
| 26. 愛知県立岡崎高等学校 | コインと天秤 |
| 27. 岡山県立岡山一宮高等学校 | 実用数 |
| 28. 島根県立益田高等学校 | $(-1) \times (-1) = +1$ |
| 29. 明治学園中学高等学校 | サグラダファミリ教会の魔方陣 |
| 30. 大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎 | 数学を用いた文様出力プログラムの制作 |
| 31. 海城中学校・高等学校 | フィボナッチ数列と Euclid 互除法に関する一定理 |
| | 円順列の一般公式 |

フェルマーの最終定理の考察 -指数が整数値をとる場合について-
Consideration of Fermat's Last Theorem -For if the exponent is an integer-

古谷洸貴 古谷侑士 林直樹

Koki Furuya, Yuji Kotani, Naoki Hayashi

Abstract

In the Fermat's Last Theorem, we considered how things turn out when the exponent is an integer. As a result, we found that sets of natural numbers which meet the equation exist if the exponent is -1 or -2 .

1. 目的

「 $x^n + y^n = z^n$ という不定方程式は、 n が3以上の自然数のとき、自然数解をもたない」という定理がフェルマーの最終定理であるが、 n がそのほかの整数値をとる場合に、この方程式を満たす自然数解が存在するかどうか、存在するなら、どのような自然数が方程式を満たすかを調べる。

2. 方法

$n = 1, 2$ のときは、自然数解が存在することは明らかである。ここでは、 $n = 0, n = -1, n = -2, n \leq -3$ の4つに分けて考えた。

3. 結果

$n = -2, -1, 1, 2$ のとき、方程式を満たす自然数解が存在し、 n がそれ以外の整数値をとるときは、方程式を満たす自然数解は存在しないことが分かった。また、自然数 d, m, n (m と n は互いに素、 $m \geq n$)を用いて、 $(dn(m+n), dm(m+n), dmn)$ と表わされる自然数の組は $n = -1$ のときの方程式を満たし、また、 $(2dmn(m^2 + n^2), (m^2 + n^2)(m^2 - n^2), 2dmn(m^2 - n^2))$ (m と n の偶奇が異なる)と表わされる自然数の組は $n = -2$ のときの方程式を満たすことが分かった。

4. 考察

上記の媒介変数表示は方程式を満たすための十分条件であることは分かったが、必要十分条件かどうかはまだ分からない。方程式の自然数解が必ず上の媒介変数表示で表わせるのかをこれから調べていきたい。

5. 結論

フェルマーの最終定理の、指数のとり値の範囲を広げて、「 $x^n + y^n = z^n$ (n は整数)という不定方程式は、 $n = 0$ または $|n| \geq 3$ のとき、自然数解をもたない」と言うことができる。

6. キーワード

フェルマーの最終定理 不定方程式 ピタゴラス数 媒介変数

数学から情報通信技術への展開

漆館 巧 李沢 謙介 谷 達海 田島 壮一 町屋 航星

Abstract

By a mathematical approach, using vectors, we analyzed the mobile communication system, which is used for cellular phones. We investigated how different types of noises and the number of cellular phones users influence telecommunications, and we searched for a more stable means of telecommunication.

1. 目的

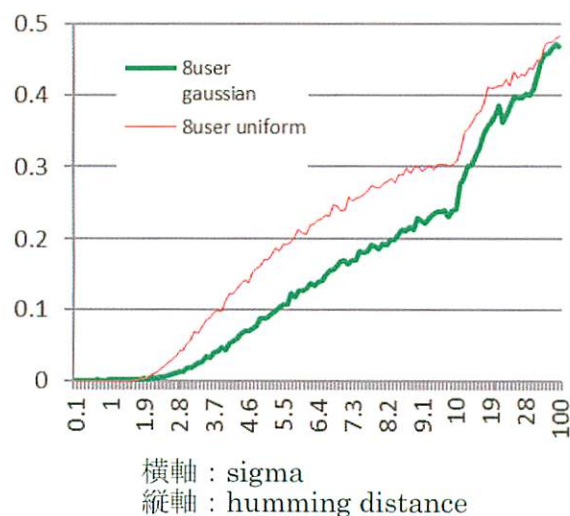
- (1) 携帯電話の通信方式を数学（ベクトル）を使って表す.
- (2) ノイズによる通信への影響を軽減させる方法を数学的に考察する.
- (3) ユーザー数の変化による，通信への影響を数学的に考察する.

2. 方法

- (1) ガウス乱数と一様乱数を用いたノイズの与え方における Humming Distance d の値の違いについて調べる.
- (2) ガウス乱数と一様乱数におけるユーザー数の違いによる d の値の違いを調べる.

3. 結果, 考察 (1)について

- ① 仮説 ガウス乱数より一様乱数を用いた方が d の値が大きいのではないか.
- ② 結果 一様乱数の方が d の値が大きかった.
- ③ 考察 一様乱数とガウス乱数における大きなノイズの出る頻度の差が原因ではないか.



4. 結果, 考察 (2)について

- ① 仮説 ユーザー数を増やした方が， d の値が大きいのではないか.
- ② 結果 ユーザー数の違いによる， d の値の大きな変化は見られなかった.
- ③ 考察 ユーザー数として表現された数とは別に各直交ベクトルのそれぞれの成分は d の値に影響を与えているはずである．それぞれの直交ベクトルに意味を与えた（ユーザーに割り振った）場合でも特にその計算に対して生じる結果に差異はできない.

5. 今後の課題

ユーザー数を増やしたときの通信への影響やノイズの大きさから d の値を予測する．また，得られた結果からより正確な通信方式を考察する．

6. 参考文献

- (1) 高等学校数学C 啓林館

生存競争の数学モデルについて

Mathematical Model of a Battle for Survival

成田 知将 藤田 光 堀江 真惟人 宮下 優一

Kazumasa Narita, Hikaru Fujita, Maito Horie, and Miyashita Yuichi

Abstract

We think about an ecological system model of pigeon and eagle, and the both always have the same expectation after some attempts except when the number of individual is six. And we also conclude how many times we should attempt to get them balanced on the longest path.

1. 目的

生態系モデルを考え、あらゆる状況を与えた時に必ず安定することを示す。またそれらが安定するまでの最長ルートを調べる。

2. 方法

タカとハトの群れが存在し、群れの中の 2 匹が餌を奪い合う。2 匹の内訳がタカとタカの際は両者-2 点、タカとハトの際はタカ+2 点、ハトとハトの際は両者+1 点とする。タカとハトの点数の期待値が低い方の個体数を-1 し、これを繰り返して総数が半分になったらそれぞれの個体数を 2 倍する。期待値が等しくなる(これが起こる座標上での点を以下、安定点とよぶ。)か、ループに入ったら終了する。

3. 結果

個体数	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
最長ルート	3	6	10	14	18	23	28	33	38	43	48	54

4. 考察・結論

- 安定点は $y=2x-3$ (タカ, ハトの個体数をそれぞれ x, y とする) 上に存在する。
- 「3. 結果」の表が群数列になっていることが予測でき、それより個体数が $2n$ で表されるとき最長ルートは次の式であると予想される。

$$n \times \left[\log_2 \frac{n}{3} + 4 \right] - 6 \times 2^{\left\lceil \log_2 \frac{n}{3} \right\rceil}$$

5. キーワード

生態系, 数学モデル, 期待値, 群数列

RSA 暗号
RSA encryption

発表者 門倉聖也
Seiya Kadokura

Abstract

I researched on RSA encryption method.
RSA encryption method is the world's first Public-key cryptosystem.
This encryption is based on the idea that prime and congruent expression.
It's famous for the method as very strong encryption.

1. 目的

我々の個人情報を保護している暗号の一つである「RSA 暗号」についての原理を研究し、仕組みを理解する。

2. 方法

様々な参考文献から RSA 暗号について詳しく研究し、利用されている数学的考え方の知識を学ぶ。
最終段階として、RSA 暗号のプロセスに従った暗号化・復号化を実際に自分で組み立てる。

3. 結果

RSA 暗号の原理、利用されている数学的考え方を理解することができた。

4. 考察

自分で作った平文を、RSA 暗号の考え方に基づいて実際に暗号化・復号化を試みる。

5. 結論

素因数分解・合同式の考え方を利用した RSA 暗号は解読されにくく、とても強力な暗号方式だといえる。

6. 参考文献

サルにもわかる RSA 暗号 <http://www.maitou.gr.jp/rsa/>
工科系のための初等整数論入門（公開鍵暗号を目指して）

7. キーワード

暗号鍵 復号鍵 公開鍵暗号 素数 合同式

ビュホンの針とモンテカルロ法

Buffon's Needle and Monte Carol method

清明 充 仲保 富由輝

Seimei Ataru Nakabo Fuyuki

Abstract

We studied on Buffon's Needle is related to pi. We studied what condition will give us the most accurate result, we found that the closer the length of the needles and the interval of the parallel lines, the higher precision. We compared it with Monte Carol method and found the result of Buffon's Needle is more accurate than that of Monte Carol method in the same number of trials.

1. 目的

ビュホンの針を用いて、どのような条件を設定するとより π に近づくのかを調べる。また、モンテカルロ法と比較し、どちらの方法がより精度がよいかを考察する。「精度」は、10000000 回落とした時、 π により近くなる場合を精度がよいと定義する。

2. 方法

<実験 1>ビュホンの針

ウェブ上にあるシミュレータを用いて、針の長さを 1、範囲を 100×100 に設定して、平行線の間隔を 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,20,30,40,50 の 14 通りで、針を 10000000 本落とした時のデータをそれぞれ 12 回ずつとる。

<実験 2>モンテカルロ法

ウェブ上のシミュレータを用いて、点を 10000000 個打つ試行を 15 回行う。

3. 結果

<実験 1> 平行線の間隔が針の長さに近いほうが π に近づきやすくなった。

<実験 2> ビュホンの針での針の長さが 1 の場合と比較した。平均がわずかにビュホンの針のほうが π に近いことが分かった。

4. 考察

ばらつきが大きくなったのは、平行線の間隔が針の長さに比べて大きいとそれだけ交わりにくくなり、交わった本数が減ったために、確率の変動しやすくなったためと考える。

5. 結論

- ・ビュホンの針は針の長さが平行線の間隔以下で、平行線の長さと同じに近づける方が π に近づきやすい。
- ・モンテカルロ法とビュホンの針では、ビュホンの針のほうがより π に近づきやすい。

6. 参考資料

<http://nnnmmm1.web.fc2.com/Buffer/Bufferv001.htm> (ビュホンの針シミュレータ Ver.005)

<http://www.f.waseda.jp/takezawa/math/number/Pi/monte.html> (モンテカルロ法)

7. キーワード

π ビュホンの針 モンテカルロ法 確率から π を求める

万華鏡の研究
Research of Kaleidoscope

神戸 利彩 鈴木 結雅 村永 亘 吉田 有輝
蔭山 佑樹 服部 イアン 明光 就平 村上 鉄馬
Risa Kanbe Yuma Suzuki Wataru Muranaga Yuki Yoshida
Yuki Kageyama Ian Hattori Shuhei Myoko Kenta Murakami

Abstract

We have an aim that mathematically analyze kaleidoscope. So we are researching of the reflection of the light of the kaleidoscope and the relation to the polyhedron. We examined why side of seeing was reflected into the kaleidoscope.

1. 目的

万華鏡の光の反射回数と多面体との関係を調べる。

2. 方法

関係式 $\lambda_n = \lambda_1 - 2\theta(n-1)$ を用いて光の反射回数を予想し、テーパー角 10° のテーパー・ミラー・システムの模型とレーザーを用い、入射角 20° から 70° まで角度を変えて光の反射を見る。その光の反射場所を記録する。



3. 結果

入射角が 65° より大きくなると光が戻ってこなくなることがわかった。

関係式 $\lambda_n = \lambda_1 - 2\theta(n-1)$ で出した値とレーザーの実験で出た値が一致しなかった。

4. 考察

関係式 $\lambda_n = \lambda_1 - 2\theta(n-1)$ は不完全であることがわかった。

3次元から2次元への射影の仕方の問題である。

5. 結論・展望

入射角とテーパー角と反射回数の新たな関係式を考える。

テーパー角と像の数の関係性を追求する。

6. 参考文献

ジオメトリック・アート

カスパー・シュアーベ+石黒敦彦 著

7. キーワード

万華鏡 テーパー・ミラー・システム テーパー角 レーザー光

清水 悠平 西井 良徳 森 宇宏

Shimizu Yuhei, Nishii Yoshinori, Mori Takahiro

Abstract

Pythagorean triangles are right triangles whose length of each side is a natural number. We obtain a function approximating the number of Pythagorean triangles whose length of each side is less than n .

1. 目的

この研究の目的は、各辺の長さが n 以下のピタゴラス三角形の個数 $F(n)$ の近似式を与えることである。

2. 方法

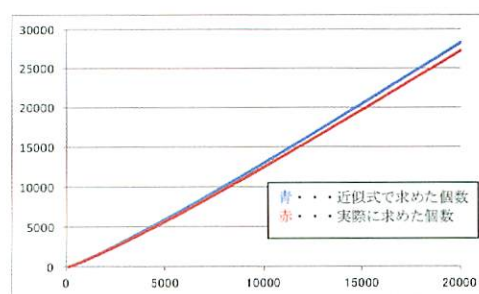
研究題材であるピタゴラス三角形とは、各辺が自然数である直角三角形である。また、その中でも3辺の長さの最大公約数が1であるものを既約なピタゴラス三角形という。各辺の長さが n 以下のピタゴラス三角形の個数を n についての関数と考え $F(n)$ とおき、この近似式を求めた。最後に PC を利用して条件を満たす実際のピタゴラス三角形の個数を数え、それをグラフで表し近似式のグラフと比較し精度を確かめた。

3. 結果と考察

レーマーの近似式を用いて、まず $F(n) \doteq \frac{n}{2\pi} (\ln n + \gamma)$

(ただし $\gamma = 0.5772156\dots$ はオイラー定数) という近似式が得られた。しかし、上式の近似式は誤差が大変大きい。そこで、その原因は各辺が5未満のピタゴラス三角形が存在しないことにあると考え、近似式を改良した。その結果、

$F(n) \doteq \frac{n}{2\pi} (\ln \frac{n}{5} + \gamma)$ という近似式を得ることができた。この結果をグラフにすると右図のようになる。グラフよりこの近似式は常に実際の個数よりも多いことがわかる。また、この近似式は次々に精度を高めることができ、さらに実際の個数よりも少ない近似式を用いることによって、実際の $F(n)$ をかなりの精度で絞り込むこともできた。

**4. 参考文献**

「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著, 銀林 浩訳, 東京図書

5. キーワード

既約なピタゴラス三角形 レーマーの近似式 オイラー定数

データ検索におけるアルゴリズムの構築

An algorithm in data retrieval

細川 信之, 加藤 尚宏
Nobuyuki Hosokawa, Naohiro Kato

Abstract

In this study, we intended to construct an algorithm to find the information you are looking for more efficiently. To simplify the situation, we considered how to find the boundary of A and B more efficiently when two types of card "A" and "B" are lined as "AAA...AABB...BBB". We propose the method of dividing the bunch of the card at a fixed rate.

1. はじめに

現在インターネット上には膨大な量の情報が存在しており、データ検索の必要性は高い。本研究では探したい情報をより早く効率的に見つけ出すアルゴリズムを構築することを目的とする。

2. 方法

状況を単純化して、A, B 二種類のカードが AAA...AABB...BBB のように並んでいるとき、A と B の境界をより試行回数の少ない方法で探し出すアルゴリズムについて考察する。アルゴリズムの基本的な形を次のように定める。全てのカードの枚数を P, B と書かれたカードのうち最初のものを b 枚目として、次の①②の試行を A と B の境界、すなわち b 枚目のカードが見つかるまで繰り返す。

① 上から X 枚目のカードを選び、A か B かを調べる ($2 \leq X \leq P-1$)

② ①で A と書かれていた場合 1~X 枚目までを、B と書かれていた場合 X~P 枚目までを排除する。

以下に、境界を見つけるまでに要した①の回数を S として、S が最小となる X の選び方について考察する。X の選び方は色々あるが、ここでは以下のⅢ, IVについて紹介する。

方法Ⅲ: X を無作為に決める。

方法IV: カード全体を 1 対 t に分けた場所を X, つまり $X = P \times (1/(1+t))$ とする。小数になった場合は、小数第一位を四捨五入する。

3. 結果と考察

Ⅲ, IVについて、 $P=100$ として、b を 2~99 まで変化させるごとに S の値を調べた。Ⅲの結果を図 1 に示す。Ⅲでは、試行ごとに S の値が変わるため、各々の b について 1000 回試行を繰り返し、その平均値を S とした。S の期待値は約 8.35 であった。IVの結果を図 2 に示す。 $0 < t < 2$ で調べたところ、S の期待値は $t=0.9$ のとき最小値 6.704 をとった。 $t=1.0$ で最小にならなかったのは X の値を決める際の四捨五入の影響があるように思われる。これは P の値を大きくすることで解決されるであろう。

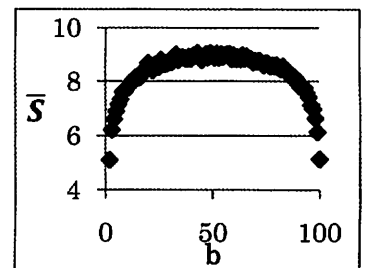


図1 Ⅲの結果 ($P=100$)

4. 結論

Ⅲ, IVのなかでは、IVが最も期待値が小さい。今後の発展として、P の値を増やす、カードの種類を 3 種類以上に増やすなど、より実際の状況に近付けるなどが考えられる。

5. キーワード

データ検索 アルゴリズム 期待値

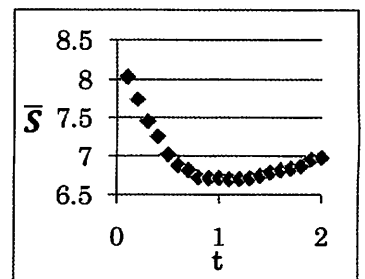


図2 IVの結果 ($P=100$)

フィボナッチ数列に関する研究

Study on Fibonacci Progression

紙田 恵治 田尾 稔 樋口 裕二 藤原 侃汰

Yoshiharu Kamida Minoru Tao Yuji Higuchi Kanta Fujiwara

Abstract

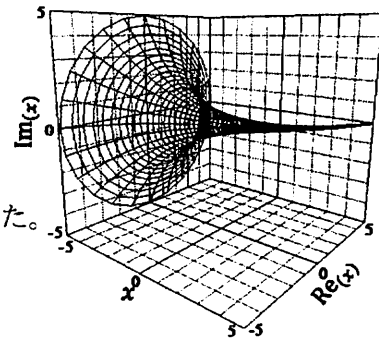
Our theme is Fibonacci Progression. It is famous for its existence in nature. In our study, however, we focused its mathematical aspect. Mainly we worked on expansion of range of number, remainder of Fibonacci Progression, and enlargement of recurrence formula. In every part, we've got the interesting accomplishments.

1. 目的

Fibonacci 数列の研究を通して数学と親しむ。

2. 方法

数列を、Excel を用いて表にして性質を見つけ、証明した。
また、グラフソフトを用いてグラフを得た。



3. 結果・考察・結論

Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ の n を、一般項を用いて整数から実数に拡張し、1年生のときに研究した複素数平面と合わせることで、図1のようなグラフを得ることに成功した。Fibonacci 数列で成り立つ数式については、Excel で表を作って性質を予想し、証明した。また、Tribonacci 数列については、場合の数の考え方でその性質を発見することができた。最終目標の M-bonacci 数列については、一般項を求めるには至らなかったが、場合の数の考え方をを用いて数式化することに成功した。一方で、Fibonacci 数列で発見した性質を M-bonacci 数列に拡張することはできなかった

4. 参考文献

線型代数 (中島惇、石川洋文 著) フィボナッチ数の小宇宙 (中村滋 著)
フィボナッチ数・再帰数列 (ヴォロビェフ、マルクシェヴィチ 著)
線形代数入門 (松坂 和夫 著)

5. キーワード

Fibonacci 数列 漸化式 一般項 複素関数 オイラーの公式 ド・モアブルの定理
M-bonacci 数列 階段 統一式

数学パズル

Mathematics puzzle

発表者:石本宙 小川恭史 巽さくら 藪野摩周 山岸優風

Ishimoto Hiroshi Ogawa Takahito Tatsumi Sakura Yabuno Masyu Yamagishi Yu

Abstract

Mathematics puzzle is regarded as a play of mathematics. When we solve these puzzles, we deduce instead of using our knowledge or intuition. We picked up the problems which are completely different from things we learn at the school in order to spread the fun of mathematics.

1. 目的

今回、学校では習うことのない課題を扱うことで、数学の楽しさや面白さを広げることを目的とした。

2. 方法

週に1度、大阪市立大学の数学セミナーに足を運び様々な観点からで数学を学んだ。その中から特に興味のもてるテーマ、数学パズルを選び、自分たちでさらに研究を進めることで理解を深めた。

3. 数学パズルの例

- ・部屋割り論法（鳩の巣原理）… n 個の物を m 個の部屋に入れるとき、 $n > m$ であれば、少なくとも1個の部屋には1個より多い物が中にある、という原理を利用した論法。
ひとつの部屋に2人以上何人かの人がいる。その中には友達の数と同じ人がある。なぜ分かるのか。
- ・モンティ・ホール問題… A が3本のくじをもっており、その中に1本だけあたりがあるとす。いま、あなたがこのくじを引いたとする。次に A は残りの2本のくじのうちはずれのくじを1本見せ、最後の1本をもって「あなたはいま引いたくじをこのくじと交換することができますが、交換しますか?」と言った。あたる確率は交換したほうが高くなるか、低くなるか。

参考文献

ひらめきパズル 上、下巻；仲田紀夫 / 日科技連
パズル数学入門；藤村幸三郎、田村三郎

Bertrand のパラドックス

発表者 後藤悠一朗 山田季央 小川大地 車利幸 上野貴史

Abstract

Experimental verification to the paradox of Bertrand. When pulling one bowstring to a certain circle, the length of the bowstring, could become longer than the length of one side of an equilateral triangle inscribed in the circle. The probability is range from $1/4$ to $1/2$ according to how to pull a bowstring. The purpose of this research is to conduct this experiment and to examine whether this paradox is really true.

1. 目的

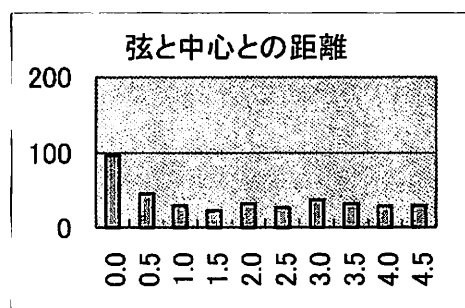
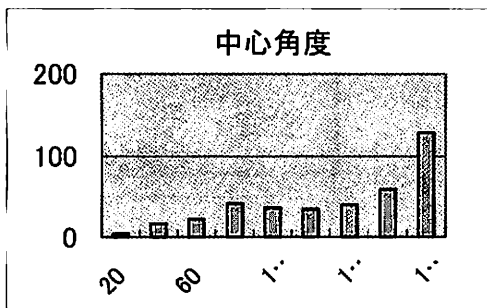
Bertrand のパラドックスで求められる 3つの確率 $1/2$, $1/3$, $1/4$ のうち、人は実際にどういう感覚で弦を引いているか検証するため。

2. 方法

- ① 生野高校の生徒 80 人に一人 5 枚ずつ、計 400 枚半径 5cm の円が描かれた紙を配り、一枚に一本ずつ弦を引いてもらう。
- ② この 400 枚のデータの弦の長さ・中心角・中心と弦との距離をはかり、統計をとる。
- ③ 統計をもとに、弦の長さが円に内接する正三角形の 1 辺の長さ ($5\sqrt{3} \approx 8.66$) 以上になる確率を求める。

3. 結果

弦の長さが円に内接する正三角形の 1 辺の長さ ($5\sqrt{3} \approx 8.66$) 以上になる確率は $228/383 (\approx 3/5)$ となり、 $1/2$, $1/3$, $1/4$ のどれよりも大きいという結果になった。



4. 考察

結果より、人は $3/5$ に一番近い $1/2$ に近い引き方、つまり直径に垂直に弦を引くという感覚で弦を引いてるのではないかと考えられる。

5. 結論

今回、データ数が 400 と少なかったため、さらにデータ数を増やしていく必要がある。そして、条件を変えて統計をとるとどうなるかなど、考察を深めていく必要がある。

6. 参考文献

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%88%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%81%AE%E9%80%86%E8%AA%AC>

7. キーワード

確率論 パラドックス 頻度主義 ベイズ確率 大数の法則

最適採餌行動に見る流行現象の分析

Analysis of the fashion phenomenon by the simulation of the optimal predation

友實 健人 畑中 俊輝 平尾 宏太郎 深田 紘平

Tomozane Kento Hatanaka Toshiki Hirao Kotaro Fukada Kohei

Abstract

We made three simulation models about collecting honey of bees and predation of fish to think about optimization problem by a simulator. We consider the data of these simulations and we found some regularity from them. We applied the rule to some social phenomena of human society.

1. 目的

動物の採餌行動を単純な法則で表し、そのシミュレーションモデルの結果を分析・比較することによって最適採餌行動（エネルギー効率の最大化）とはどのようなものかを探った。また、最適採餌行動と人間社会における流行現象及び群衆行動の創発との関連を考察する。

2. 方法

最適な捕食のためのオリジナルの理論を取り入れた数理モデルでシミュレーションを行う。

ある規則で捕食する餌の種類を決定した【メニュー理論】、捕食した餌の情報を記憶し、それを捕食基準とする【学習理論】、複数の捕食者が仲間に得た情報を交換し捕食を行う【情報共有理論】の3つの数理モデルを作成した。初期設定・餌の分布密度・蜂の種類を変えそれぞれ100回シミュレーションを試行し、傾向を分析した。

3. 結果・考察

【メニュー理論】では時間と捕食者の獲得餌量の関係をデータに取りグラフ化した。このグラフを指数近似し、微分方程式 $\frac{dN}{dt} = \alpha(N_0 - N)$ の解析解との整合性をみる。Nは餌の量、 α は捕食者の探索能力及び捕食者にとっての場所の見通しの良さを表す発見効率である。この式により α の値を算出することができた。

【学習理論】では最適なメニューが状況に応じて、再構成されることがわかった。これから餌場（パッチ）を変えることで捕食行動の変化へとつながることがわかった。

【情報共有理論】では情報共有の効果の表れ方が餌の密度、量と密接に関係していることがデータから読み取れた。これらの理論、モデルを組合せて進化させることで、人間の群衆行動の創発性との関連を考察したい。

4. 結論

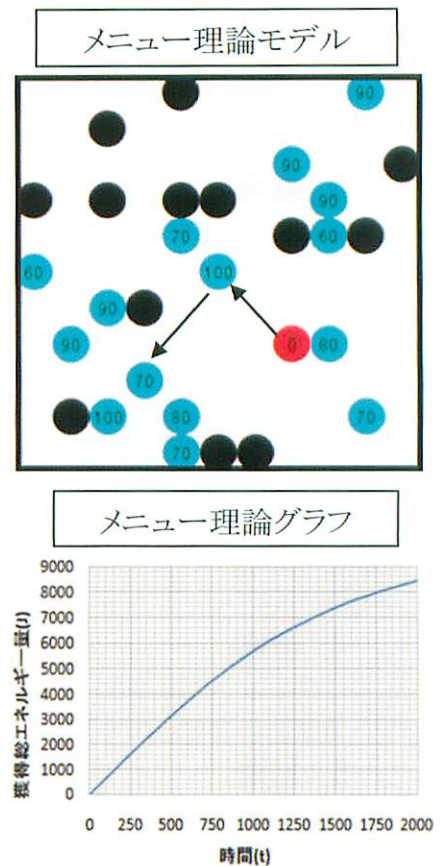
情報を取捨選択し、その情報を共有することによって各々の行動を制御し、さらに明確な目標をもたない集団を一定の方向に誘導する可能性がある。

5. 参考文献

- ・「動物生態学 新版」嶋田正和 山村則男 粕谷英一 伊藤嘉昭（海游舎）
- ・「行動生態学（シリーズ 現代の生態学5）」沓掛展之 古賀庸憲（日本生態学会）

6. キーワード

採餌行動 最適化問題 流行現象 群衆行動の創発性



ピックの定理の拡張

Expansion of Pick's theorem

村山 晃三 石井 隆太郎 村上 翔紀 弓削 智浩

Murayama Kozo Ishii Ryutaro Murakami Shoki Yuge Tomohiro

Abstract

Pick's theorem computes the area of polygon on the square lattice by the interior and boundary points. We anticipate formula similar to this which applicable to equilateral triangle and honeycomb planar tiling. For each formula, identity relation and boundary characteristic is used.

＜ピックの定理とは＞

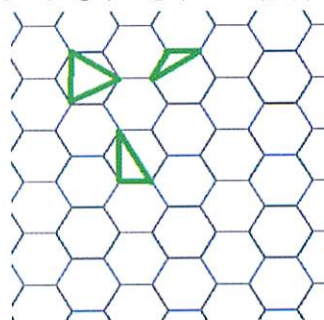
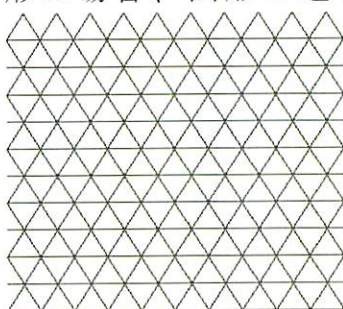
正方形格子において格子点を結んでできる格子多角形の面積をその図形内部の点と辺上の点をそれぞれ数え、公式に代入して求める定理である。

1. 目的

正方形の格子で成り立つピックの定理を正三角形や正六角形をしきつめたものの上でも似たような方法で求められないかを予想し証明する。

2. 方法

正三角形の敷き詰めの場合、恒等式を利用して予想をたて証明する。
正六角形の場合、図形の通る点を限定してそれぞれの場合を考える。



3. 参考文献

数と図形の歴史 70 話 上垣 渉 何森 仁

THE HONEYCOMB CONJECTURE Thomas C,HALES

4. キーワード

ピックの定理 平面の充填 格子点

フェヒナーの法則の数学的アプローチ
A Mathematical Approach to the “Weber—Fechner Law”

川澄 俊夫,水庭 卓也,笹平 陸
Kawasumi Toshio, Mizuniwa Takuya and Sasahira Riku

Abstract

We can show a relationship between senses and the size of the stimulus with differential equations. This particular effect is the “Weber—Fechner Law.” To illustrate this law, I did an experiment about taste and formulated the data. As a result, we found that there is logarithmic relationship between stimulus and sense.

1. 目的

私たちは普段、五感を頼りに生活をしている。しかし、その五感で得た刺激の強度と人間の感じ方は単純な比例関係にはならない。そこで、そのことを表した生物学的な法則である「フェヒナーの法則」を数学的に表し、実際に刺激の強度に対する人間の感じ方を実験によってグラフ化する。

2. 方法

砂糖の量が異なる 5 種類のゼリーを同級生に食べてもらい、それぞれのゼリーが基準となるゼリーの何倍の砂糖が入っているのかを答えてもらい、その結果を計算によって求めたグラフと比較する。

3. 結果

計算によって求めた式に四つの点を代入し、式を完成させる。その式より五番目の点によって求めたところ、感覚量は「7.52」となった。これは、実際に実験から求めた値の 10.95 とは少し離れた結果となった。

4. 考察

二つの値がかけ離れた原因として、被験者の数が少なかったことがあげられる。そのため、極端な値を答えた同級生が一人ただけで感覚量が大きく変わってしまった。

5. 結論

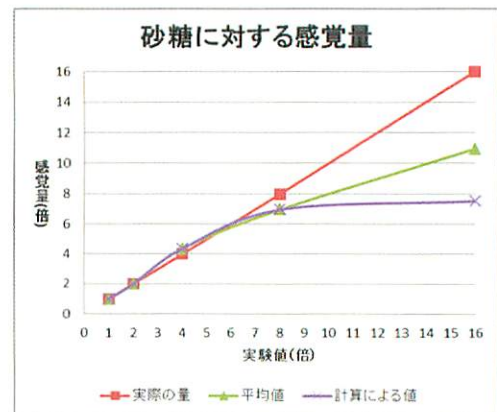
上記で考察したことを考慮しても、計算で求めたものに近い形のグラフになったことから、「砂糖の増加量に対して感覚が鈍くなっていく」ということが示せた。

6. 参考文献

D・バージェス/M・ボリー. 微分方程式で数学モデルを作ろう. 日本評論社. 2009

7. キーワード

フェヒナーの法則 感覚量 刺激量



ウラムの螺旋

Ulam spiral

増田 卓斗

Masuda Takuto

Abstract

I studied the Ulam spiral, which was arranged a natural number in a spiral. Triangular number on the Ulam spiral make interesting figure. I defined the Ulam spiral on the rectangular coordinates and studied its property. Then I studied the Ulam spiral plotted by triangular number.

1.目的

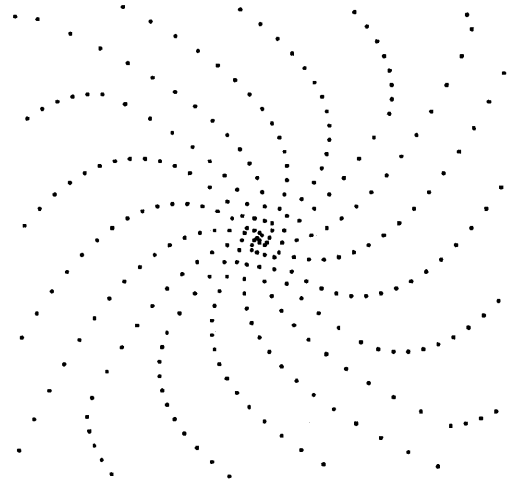
ウラムの螺旋を座標平面上に定義する。また、三角数がウラムの螺旋に描く図形について考察する。

2.方法

ウラムの螺旋の座標平面上での定義を考えた。左図では正方形のマスに自然数が対応している(エクセルを用いた)が、座標平面上では格子点に自然数を対応させた。

次に、ある自然数 n がその定義で座標平面のどこにあるかを調べた。

最後に、螺旋上の三角数が左図のような曲線を描く理由を三角数の数列の階差数列が公差数列となることより考えた。



ウラムの螺旋(1~38809) 三角数

3.結果

6つの定義を考えることで、ウラムの螺旋を座標平面上に定義することができた。そして任意の自然数 n の座標を求める式を発見した。また、三角数が描く図形がペル方程式 $x^2 - 8y^2 = 1$ の解を視覚化していることが分かった。

4.考察

三角数の他にも、一般に多角数などの階差数列が公差数列となっている数列で表すことのできるものは、ウラムの螺旋上に直線または曲線状の図形を描くと考えられる。

5.結論

ウラムの螺旋を座標平面上に定義できた。また、三角数が描く曲線の数を計算することが可能になった。

6.参考文献

たけしのコマ大数学科(2011/8/15) ja.wikipedia.org/wiki/床関数と天井関数

7.キーワード

ウラムの螺旋 三角数 階差数列 ペル方程式

最も響く音階は何か

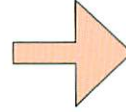
What is the best scale to harmonize?

高田 一真
Takada Kazuma

目的

・従来の音階

	響き	転調
平均律	✕	○
純正律	○	✕



響きがよく、転調もできる
音階をつくる

方法

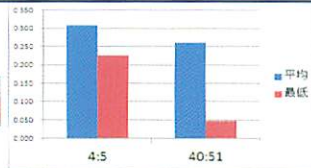
- ・響きが悪い原因、「うなり」の大きさは、2つの音の周波数の差に反比例
- ・響きの大きさ「協和度」を定義し、協和度がいまい大きい(または0となる場合が多い)音階を作る

$$\text{協和度} = \frac{|\text{音Aの倍音の周波数} - \text{音Bの倍音の周波数}| [\text{Hz}]}{\text{音Aの基音の周波数} [\text{Hz}]}$$

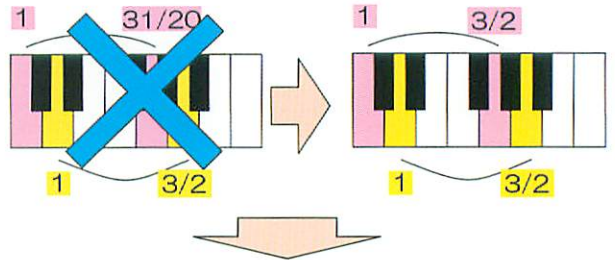
- ・2音が簡単な整数比になる(最小公倍数が小さい)と、協和度は高い

(例)

	4:5	40:51
平均	0.309	0.261
最低	0.225	0.047



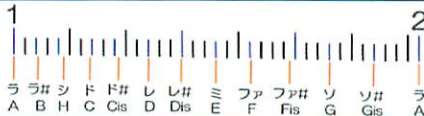
・転調しても協和度を保つには、音の比が一定である必要がある。



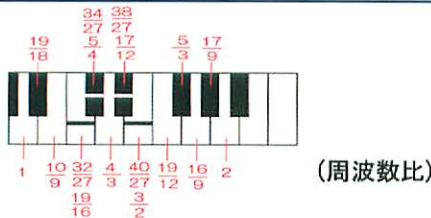
常に 5/4(ミ)、4/3(ファ)、3/2(ソ)、5/3(ラ) 含む音階を作成

結果

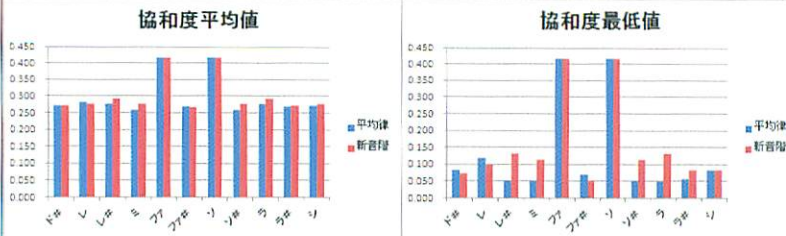
1/36 刻みに、平均律の近似を取る(上記の分数を使うため)



転調しても協和度が高いように4つの音を増やす



協和度の比較(左…平均値、右…最低値)



※協和度0は協和を示すので、このグラフからは除外した。

考察

協和度は高いが問題点も…

- ・実際はそこまで聞き分けられない
- ・今の音階に慣れているため、新しい音階にズレを感じる場合がある

他の面からも「響く」ために重要なものを考える必要がある。

参考文献

・音律と音階の科学_ドレミ…はどのようにして生まれたか (ブルーバックス)

使用したソフト

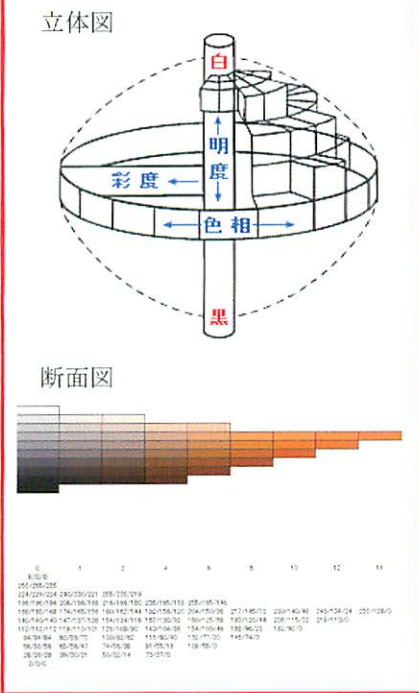
- ・Microsoft Excel 2007
- ・正弦波発生

色立体と人間の目

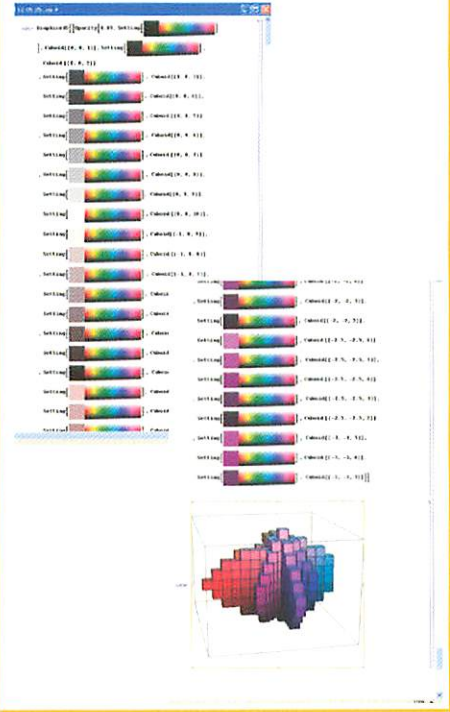
0.目的

色弱や色盲といった、障害の人に役立てられるように、人の色の認識の仕方を知り、バリアフリーに役立てること。
また、障害だけでなく、たくさんの人にとっても、色を使って、生活が便利になるようにすること。

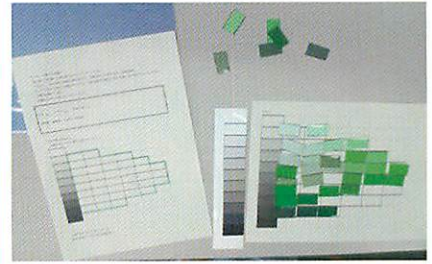
1.色立体の仕組み



2.色立体を制作 by Mathematica



3.アンケート調査



赤・黄・緑・青・紫

の5色で、各色、YSFH1,2年次生

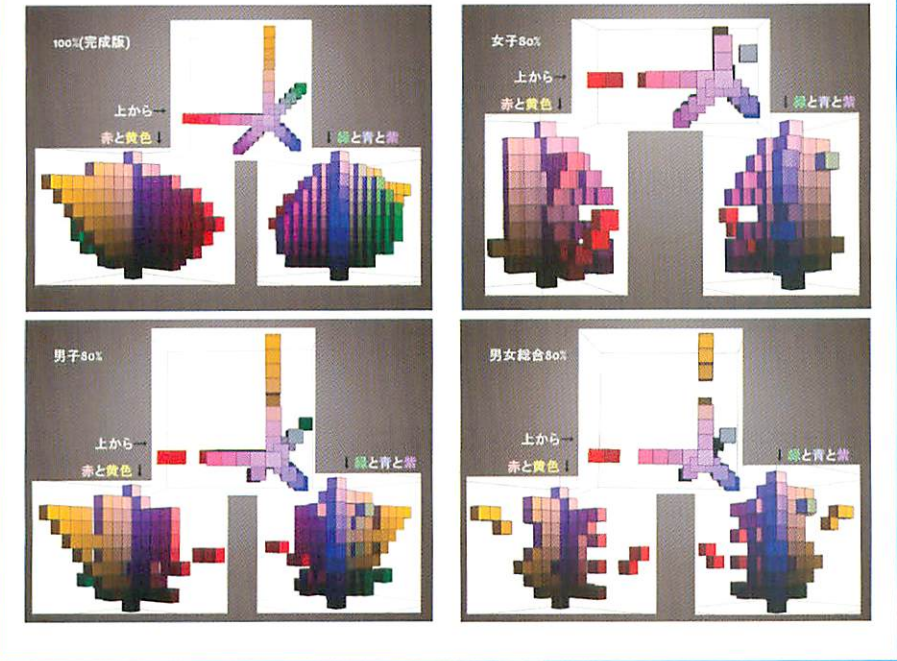
男子25人、女子10人、

合計35人を対象

(5色合計175人)に、

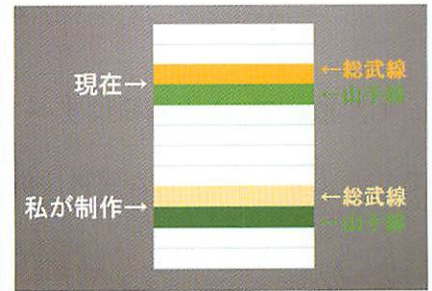
人の色に対する識別調査を行った。

4.結果 (男子、女子、男女総合、の判別出来る色を可視化)



5.発展 ~色弱の人から~

→総武線と山手線の色



6.これから…

→アンケート調査のサンプル数があまりに少なく、データが不確かなのを改善したい。

→色弱の人だけでなく、大半の人の生活にとって、便利になるように、色を使い分けたい。

四角形のできる確率

このテーマを選んだ理由

まずランダムに三つの実数を選んでそれを辺にし何分の一の確率で三角形ができるかを疑問に思いやってみたとこ面白い数学的発想が何度も使われたので四角形ならもっと面白いのではないかと思います。

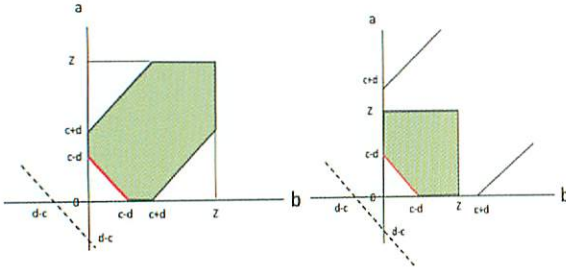
方法

四角形の成立条件 $a < b + c + d$ $b < a + c + d$ $c < a + b + d$ $d < a + b + c$ からグラフを書きます。

実数の上限を $Z (Z \rightarrow \infty)$ とします。

$c + d < Z$ のとき

$c + d > Z$ のとき



確率は $\frac{\text{緑色の面積}}{\text{全体の面積}}$

$$c + d_n < Z \text{ のとき } \frac{\frac{3}{2}c^2 - cd - \frac{3}{2}d^2 + 2cZ + 2dZ}{Z^2}$$

$$c + d_n > Z \text{ のとき } \frac{Z^2 - \frac{(c-d)^2}{2}}{Z^2} \text{ で表されます。}$$

ここで d を変数 d_n として動くと考えると d_n は実数すべてを

$$\text{表したいので } d_{n+1} - d_n = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{Z}, d_1 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{Z}$$

$$\rightarrow \text{一般項 } d_n = \frac{n}{Z}$$

ここで $d_n = Z$ のとき $n = Z^2$ より実数が Z^2 個あることになります。 \rightarrow ある実数が選ばれる確率 $= \frac{1}{Z^2}$

d_n の動く範囲は

$c + d_n < Z$ のとき

$c + d_n > Z$ のとき

移項して $d_n < Z - c$ と一般項 $d_n = \frac{n}{Z}$ から

移項して $d_n > Z - c$ と $d_n = \frac{n}{Z}$ から

$$n < Z^2 - cZ \dots \textcircled{1}$$

$$n > Z^2 - cZ \dots \textcircled{2}$$

赤いグラフと点線のグラフの動く範囲から $d_n < c + Z$, 実数の上限から $d_n < Z$

$$\rightarrow d_n < Z \rightarrow n < Z^2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3}, n=1,2,3,\dots \text{ から } 1 < n < Z^2 - cZ$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } Z^2 - cZ < n < Z^2$$

d の値が $d_1 \sim d_{Z^2 - cZ}$ と $d_{Z^2 - cZ} \sim d_{Z^2}$ の間でそれぞれのときの四角形ができる確率をすべて足すと、ある定数 c のときの四角形のできる確率はそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{Z^2 - cZ} \frac{\frac{3}{2}c^2 - cd_k - \frac{3}{2}d_k^2 + 2cZ + 2d_kZ}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2} \quad \sum_{k=Z^2 - cZ}^{Z^2} \frac{Z^2 - \frac{(c-d_k)^2}{2}}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2}$$

c も変数 c_n で、 d_n と同様にすべての実数をとると考えると一般項は $c_n = \frac{n}{Z}$ で、 c_n の範囲は $c_n < Z$ 、 $n > 1$ なの

で $1 < n < Z^2$ c_n が実数全体から選ばれる確率も $\frac{1}{Z^2}$ よって四角形のできる確率はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^{Z^2} \sum_{k=1}^{Z^2 - cZ} \frac{\frac{3}{2}c_i^2 - c_i d_k - \frac{3}{2}d_k^2 + 2c_i Z + 2d_k Z}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2} \quad \sum_{i=1}^{Z^2} \sum_{k=Z^2 - cZ}^{Z^2} \frac{Z^2 - \frac{(c_i - d_k)^2}{2}}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2} \times \frac{1}{Z^2}$$

これらを足すと $\frac{5}{6} - \frac{1}{6Z^2} - \frac{1}{3Z^4} + \frac{7}{6Z^2}$ $Z \rightarrow \infty$ なので四角形のできる確率は $\frac{5}{6}$ に収束します。

考察、結果

プログラミングで a, b, c, d をランダムに出したところ約 $\frac{5}{6}$ になったので成功したといえます。グラフ

を書いて確率を求めることによりいろいろな方法が使えるので役に立つと思いました。

正多角形の敷き詰め

土肥雅之 福岡鉄也 三上敬生

Dohi Masayuki Fukuoka Tetsuya Mikami Toshiki

Abstract

We made integer problems by using angles of regular polygons which gathered to an apex, and studied what regular polygons can be spread all over.

1. 概要

頂点に集まる正多角形の角度を利用して整数問題を作り、どんな正多角形が敷き詰められるかを調べた

2. 目的

講義を受けて、1種類の正多角形で敷き詰める場合、正三・四・六角形のみが敷き詰められることが分かった。そこで、私たちはこのテーマの拡張を試みた。すなわち、二種類以上の場合はどうなるかを研究しようと考えた。

3. 数学における敷き詰めの定義

平面上で何種類かの合同な図形を隙間も重なりもなく敷き詰めること

4. 方法

二種類、三種類、…と場合分けをして、それぞれの場合において一点に集中する図形の頂点の内角の和が 360° であることを利用して整数問題を作り、それを解いた。

5. 結果

敷き詰められる正多角形の組み合わせは

～1種類～

正三角形、正四角形、正六角形

～2種類～

(正三角形と正四角形)、(正三角形と正六角形)、(正四角形と正八角形)

(正三角形と正十二角形)

～3種類～

(正四角形と正六角形と正十二角形)、(正三角形と正四角形と正六角形)

(正三角形と正四角形と正十二角形)

～4種類～

(正三角形と正四角形と正六角形と正十二角形)

6. キーワード

敷き詰め、正 n 角形の一つの内角は $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$

ピックの定理と π の近似値計算

高力 暁成 柳原 合 山田 結可 山田 智宏

要旨

- ・自分たちで考えた「平面の分割問題」を発展させ、ピックの定理を証明した。
- ・さらに、C言語によるプログラムを用いて、 π の近似値を求めた。

1 目的

ピックの定理を証明し、それを用いて π の近似値を求める。

2 方法

独自の方法で平面上の領域を三角領域に分割する問題を考察し、分割によってできた三角領域の総数を表す式を求める。これをもとに、ピックの定理を証明する。

さらに、プログラム上で原点中心、半径 r の四分円の内部に格子多角形を作り、円の半径を大きくしていくことで π の近似値を求める。

3 結果

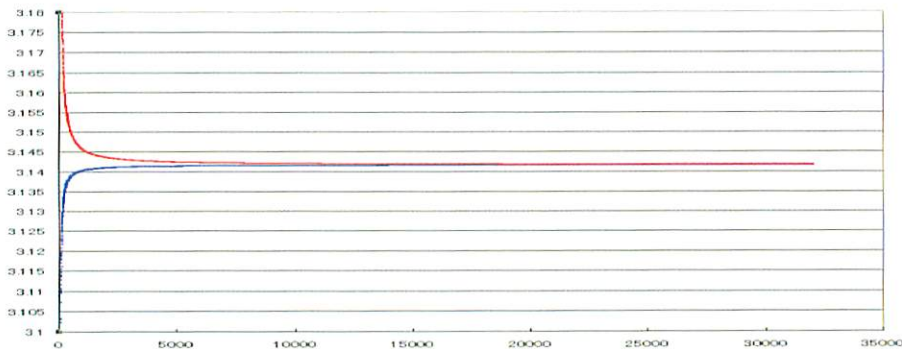
格子多角形において、外周および内部の格子点の個数をそれぞれ d および i とすると、三角領域(最小三角形)に分割したときの総数は $d + 2i - 2$ となることが証明された。

さらに、各三角形の面積がすべて $1/2$ に等しい (→引用・参考文献参照) ことから

$$s = d / 2 + i - 1$$

となること、すなわち「ピックの定理」が証明された。

次に、円の内部に格子多角形を作る方法で、 π の近似値を求めたところ、下図のようになり、近似値 3.141608267 (誤差 0.0005%) まで求めることができた。



※上からの近似曲線は比較のためにピックの定理を用いないで求めたもの。

4 展望

今後は、今回の近似とは逆に、円の外部に格子多角形を作り π の近似を求めるプログラムを考えていきたい。また、オイラーの多面体定理と領域分割問題との関連性等についても考察していきたい。

5 引用・参考文献

<http://www2.ocn.ne.jp/~mizuryu/kadai/kadai9kaitou.html> (格子三角形の面積に関する証明の部分)

6 キーワード

近似値 三角領域 π ピックの定理 プログラミング 平面の分割

ルーローの奇数多角形の一般化と重心の軌跡

Generalization of Reuleaux Polygon and its locus of gravity

嶋林 亮
Ryo Shimabayashi

Abstract

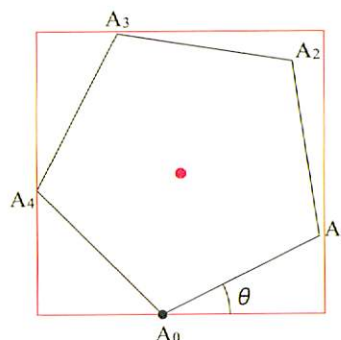
I found the Reuleaux Polygon can roll over in the square because it moves without changing its high. I calculate this movement and made the way that gives answer in all Reauleax Polygon. I used its points, lines and sharp to calculate. Finally, I found the locus of gravity.

1. 目的

高さが一定のまま回転できるルーローの多角形の性質から、正方形の中での回転が可能であると考えた。そこで奇数多角形の回転によって生じた重心の軌跡と回転の様子を数式によって一般化を試みた。

2. 方法

正方形と接する頂点の変化から回転の様子を場合分けし、そこから頂点をベクトルによって座標を求める。頂点を元に辺と弧を描き、回転の様子を作成。この回転から重心の軌跡を計算し、一般化する。これらにより全てのルーローの正奇数角形における作成を可能にした。



3. 結果

重心の軌跡は四つの楕円の組み合わせによって描かれることが分かった。これら四つは全て合同な図形であり、正方形の四隅を中心に描かれる。

4. 考察

ルーローの正多角形の極限は円であり、重心は計算式からも点へ近づいていく。つまり、円の回転は楕円四つの組み合わせの点を重心とする。

5. 結論

ルーローの正多角形の重心の軌跡は四つの楕円であり、角数を無限大に増やすと円となる。

6. 参考文献

特になし

7. キーワード

ルーローの多角形 一般化 楕円 重心 軌跡

因数と循環節の2分割和に並ぶ数についての考察
The Study of Factors and the Sum of Bisected Repetends

川本 和
Wataru Kawamoto

Abstract

$1/7 = 0.1428571428\dots$, which is a repeating decimal. I looked at the repetend, 142857. I divided it into 2 numbers, 142 and 857, and added them together, $142 + 857 = 999$, which is a row of 9s. I studied when numbers have this property, what I call the sum of bisected repetends, and I categorized fractions to find it.

1. 目的

10進法において右の例のように1/7の循環節を2分割にして足すと9が並ぶことを知り、他の進法でも同じような性質があるのかを調べた。そしてどの数がこの循環節の2分割和という性質を持っているかを公式化できないか考えた。

$1/7 = 0.1428571428\dots$
↓
142857
↓
142
+ 857

999

2. 方法

まず Mathematica を利用して 3, 4, 6, 7, 9, 10 進法においての $1/2 \sim 1/100$ の循環節を求めた。手計算によって循環節の2分割和に10進法なら9、3進法なら2、つまり g 進法の際に $g-1$ が並ぶ数を求め、それらを分母の値の違いによって分類した(分子は1でそろえた)。

3. 結果

調べた進法を g 進法としたとき、 g の値が奇数か偶数かによって分類の結果に違いがでた。そして各進法での分類には奇素数と g の因数が特に関わった。また分類しきれなかった数がある場合とない場合があった。

4. 考察

3進法においてのいくつかの分類は証明することができた。その他の数は4の倍数、もしくは素数×素数でまとめることができるのではないかと推測している。循環節の2分割和以外にも3、4分割和などがあり、 $g-1$ 以外の数が並ぶ例もあった。

5. 結論

循環節の2分割和は10進法以外でも成り立ち、多くの数はきれいに分類することが可能である。そして分類に関わっているのは奇素数、因数が主である。

6. 参考文献

- ・ 浅野史織、西原浩子　循環小数の2分割和の研究
<http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~851051/seminar07/asanonisi.pdf>
- ・ 大坪紀之　有限体と方程式の解の数
<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~otsubo/article/kiyosato.pdf>

7. キーワード

循環節　2分割和　 n 進法

R S A暗号
RSA cipher

多田 洸貴 豊澤美沙 藤下実佳

Tada Kouki, Toyozawa Misa, Fujishita Mika

Abstract

We examined the security of the RSA cipher by considering the way of decryption. We found a solution by use of Fermat's little theorem. However, it needs prime factorization of a large number, so in fact, it is impossible to decrypt. We proved that the difficulty of a prime factorization can make it impossible for outsiders to decrypt RSA cipher.

1 目的

毎日学んでいる数学が日常の生活でどのくらい役に立っているのか。

→数学的な考えが必要な RSA 暗号について調べる。

RSA 暗号の解読方法を考えることで RSA 暗号の安全性を吟味する。

2 RSA 暗号とは

Rivest Shamir Adleman が 1977 年に作成

情報社会の中で私たちの情報を守るために使用されている暗号

3 2つの鍵

暗号化と復号に別々の鍵を使うこと
(公開鍵と秘密鍵)

第三者に情報が盗まれて解読される心配はないのか？(秘密鍵なしで解読する方法はないのか？)

3 フェルマーの小定理の利用

a	a ²	a ³	...	a ⁵⁹	a ⁶⁰	a ⁶¹	...	a ¹¹⁹	a ¹²⁰	a ¹²¹	...
1	1	1	...	1	1	1	...	1	1	1	...
2	4	8	...	39	1	2	...	39	1	2	...
3	9	27	...	26	1	3	...	26	1	3	...
4	16	64	...	58	1	4	...	58	1	4	...
5	25	48	...	31	1	5	...	31	1	5	...
6	36	62	...	13	1	6	...	13	1	6	...

(mod 77)

$$X^{(7-1)(11-1)} \equiv X^{60} \equiv 1 \pmod{77} \text{となっている!!}$$

フェルマーの小定理 $X^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が利用できるのではないかな？

4 数式化

公開鍵 $n=p \times q$ (p, q は素数) とすると

フェルマーの小定理 $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$

これより $x^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$

両辺に X を掛けて、 $x^{(p-1)(q-1)+1} \equiv x \pmod{pq}$

a	a ²	a ³	a ⁴	a ⁵	a ⁶	a ⁷	a ⁸	a ²⁰	a ²¹
2	4	8	16	32	31	29	27	1	2
3	9	27	15	12	3	9	27	1	3
4	16	31	25	1	4	16	31	1	4
...
17	25	29	31	32	16	8	4	1	17

ここに注目!!!! (mod 33)

秘密鍵なしで解読できた!(素因数分解できれば)

5 まとめ

現在素因数分解されている公開鍵は約 2 3 2 桁、現在使われている公開鍵は約 6 1 7 桁

つまり、公開鍵 n はとても大きいので簡単に p と q に素因数分解することはできない

素因数分解の困難性 = RSA 暗号の安全性

6 参考 山崎圭次郎 「数を考える」 三谷政昭、佐藤伸一 「マンガでわかる暗号」 NHK テレビ 「頭がしびれるテレビ」

7 キーワード 素因数分解 フェルマーの小定理 累乗表 公開鍵暗号

多角数の拡張

発表者 上野航平 湯浅貴道 辻部壮真 山城学 山川侑太

UENO Kohei, YUASA Takamichi, TSUJIBE Soma, YAMASHIRO Manabu, and YAMAKAWA Yuta

Abstract

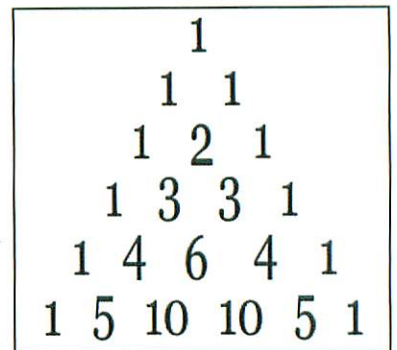
A polygonal number is a natural number which indicates the sum of dots arranged for making a certain regular polygon. We studied the sequence of regular polygons' n-dimension by raising the number of polygons' sides and dimensions with progression of differences.

1. 目的

p 角数 r 次元の一般項を求める。またその性質を発見する。

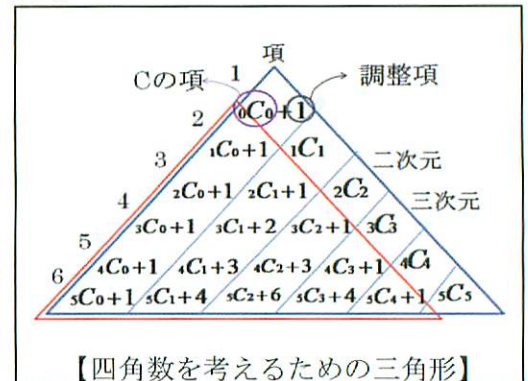
2. 方法

階差数列を用いて p 角数の 2 次元、3 次元…と次元を上げ、r 次元の一般項を推測してみた。しかし、一部分しか求められなかった。そこで、パスカルの三角形を用いて求められるのではないかと考えた。C (コンビネーション) の記号を用いることで、規則性を見つけて求めてみた。



3. 結果

パスカルの三角形に新たな項 (この項を調整項と呼ぶこととする) を加えることで、多角数の一般次元の数列を全てパスカルの三角形のような形で表すことができた。また、調整項もパスカルの三角形で表すことができたため、全ての項を C の記号であらわすことができた。



4. 考察

p 角数は、階差数列をとると公差が p-2 である等差数列であることが分かった。次元を上げると、公差が p-2 の等差数列になるまでの階差の段数も上がることが分かった。

5. 結論

p 角数 r 次元の一般項は、 $n+r-1C_r + (p-3) \cdot n+r-2C_r = {}_nH_r + (p-3) {}_{n-1}H_r$ となる。

6. 参考文献

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E8%A7%92%E6%95%B0>

多角数の意味 (二次元での) 一般化

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%95%B0>

三角数の一般次元への拡張

7. キーワード

多角数 パスカルの三角形 一般次元 階差数列

ハノイの塔
Tower Of HANOI

有安 拓 大河内 学 宮谷 健太郎
Ariyasu Taku, Okochi Manabu, and Miyatani Kentaro

Abstract

Tower of Hanoi is a puzzle game where the object is to move several different-sized plates with a hole in the middle from one bar to another, without placing a smaller plate on top of a larger one. We found through the research a connection to the binary system, predicting which plates would move next, where it would move to, as well as the least number of steps required to complete the game.

1. 目的

身近に存在するシンプルなパズルゲームを数学を用いて、より深く探究していくこと。パズルを通して、自らの力で考え、探究する力を養う。

2. 方法

自作のハノイの塔を使って、どうすれば最も少ない手数でパズルを解き明かせるかを調べて、そのデータを元に検証を行った。

また、繰り返しパズルを行い、いかに早く且つ正確に解き明かせるかを高校数学の知識を用いて証明した。

3. 結果

n 枚の円盤で構成されたハノイの塔を攻略するには、 $2^n - 1$ 手が必要であることが分かった。

4. 考察

パズルという、誰にでも馴染みのあるものでも、深く探究することによって数学の観点から検証出来た。

5. 結論

探究過程でハノイの塔と2進法が深く関わっていることに気付き、それを用いることで、より容易且つ迅速にパズルが解き明かせることを発見した。

6. 参考文献

「第三の理」のホームページ

7. キーワード

ハノイの塔 二進法 漸化式 最少手数 地球滅亡

曜日を求める数式

井上 滉士

Abstract

I made one expression which enables us to find what an optional day of the week is. It follows the rules of the Julian calendar and the Gregorian calendar, but is too long and complex for us to use it without a computer.

1. 目的

任意の日付の曜日を求められる式を、ユリウス暦とグレゴリオ暦の規則に従い、1つの式で表す。

2. 方法

曜日を求めたい日の日付を西暦 a 年 b 月 c 日とした時、1年1月1日からの経過日数を a, b, c で表し、それを 7 で割った余りで曜日を判断する。また、日付によってユリウス暦とグレゴリオ暦が切り替わるように式を作る。紀元前年に関しては、年数に負の符号を付けて計算する。

3. 結果

$$F = A - 7 \left\lfloor \frac{A}{7} \right\rfloor \quad \text{但し, } F \text{ が } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ の時, それぞれ, 日, 月, 火, 水, 木, 金, 土}$$

$$A = a + 2b + c + 3 + \left\lfloor \frac{5}{9}b \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{b+7}{10} \right\rfloor + \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{|T|}{T} \cdot \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$T = -365a + \frac{365|a|}{2a} - 30b - c - \left\lfloor \frac{5}{9}b \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{b+7}{10} \right\rfloor + 29,68 \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{|T_1|}{T_1} \cdot \frac{P_1 - P_2}{2}$$

$$P_1 = \left\lfloor \frac{10a + b + 467}{30} \right\rfloor + 1, \quad P_2 = -\frac{|a|}{2a} + \frac{1}{2}$$

$$T_1 = -365a - 30b - c - \frac{5023}{2} - \left\lfloor \frac{5}{9}b \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{b+7}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10a + b + 467}{30} \right\rfloor$$

$$S_2 = \frac{P_3 + P_4}{2} + \frac{|T_2|}{T_2} \cdot \frac{P_3 - P_4}{2}, \quad P_3 = \left\lfloor \frac{10a + b - 3}{40} \right\rfloor - 1, \quad P_4 = 1 + \left\lfloor \frac{10a + b - 3}{40} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10a + b - 3}{1000} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10a + b - 3}{4000} \right\rfloor$$

$$T_2 = -365a - 30b - c + 578137 - \left\lfloor \frac{5}{9}b \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{b+7}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10a + b - 3}{40} \right\rfloor$$

4. 考察

式が極めて長く複雑になってしまった。これ以上式を短縮させるとしたら、根本から考え方を考えるしかないと思われる。

5. 結論

当初から分かっていたことだが、実用性は無い。式の短縮は難しい。

6. 参考文献

国立天文台 HP <http://www.nao.ac.jp/>

7. キーワード

ユリウス暦, グレゴリオ暦, 閏年

1906 筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba
交通の最適化
Optimization of the traffic

平野 正徳
Masanori Hirano

Abstract

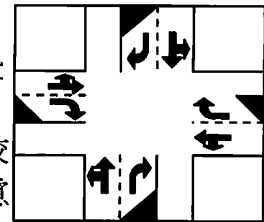
As one example of optimization of traffic, setting the condition, I calculated optimization of the traffic light. Then the result show that best time of the traffic light can be calculated from inflow. And then I think that this optimization can adapt the case of more lanes.

1. 目的

自動車が普及した現在において、交通の最適化は渋滞を減らすためには欠かせないものとなっている。その中で、どのように最適化することができるのかを考えるに当たり、まずは交差点における信号の時間の最適化を数学的に考えることにした。

2. 方法

まずは右図のような場合を考える。この縦直進を α [台/秒]、横直進を β [台/秒]、横右折・横左折・縦右折・縦左折を γ [台/秒]と置き、黄色は3秒、赤は3秒、車の間隔は1台目は青になった1秒後、それ以降は平均3秒おきに停止線を超えると設定し(学校前の計測データより)、計算を行った。また、今回は歩行者を考慮に入れないことにした。



3. 結果

それぞれの信号の長さは $\frac{30(\text{その道の流入量})}{1-3(\text{全流入量})} - 2$ と表すことができる。また、 $3(\alpha + \beta + 4\gamma) < 1$ が条件である。これを超えるときは流入量が流出量を上回る。

4. 考察

流入量が流出量を上回ってしまう場合、車線を拡張しなければ対応できないが、その場合、それぞれの道の流入量を車線数で割った数にすればよいと考えられる。

5. 結論

交差点における交通の最適化は数学的に計算することが可能であると考えられる。

6. キーワード

交通 最適化 信号

Senior High School at Komaba, University of Tsukuba
 正多角形の面積と等しい面積の正方形の作図

How to construct squares in equal areas to those of the regular polygons

波多野 広希
 Hiroki Hatano

Abstract

I calculated the areas of regular polygons, and then I drew the squares in equal areas to those of the regular polygons. It was important to connect directly constructing with calculation.

1. 目的

計算を利用することによって、正多角形の面積と同じ面積の正方形を作図できるか工夫する。

2. 方法

正 n 角形を、合同な n 個の二等辺三角形に分割する。二等辺三角形の面積を三角関数を用いて求めて n 倍する。正方形の 1 辺の長さは面積に根号をつけた値であるから、これを作図できる形に変形する。

3. 結果

三平方の定理や方冪の定理を使うことで、正三角形、正六角形、正八角形、正五角形、正十角形、正十二角形、正十五角形、正二十四角形など作図可能であった。

4. 考察

$$n=2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \quad (n \geq 3, p=0,1,2,\dots, q=0,1, r=0,1)$$

のとき、正 n 角形と面積が等しい正方形を定規とコンパスで作図できる。

5. 結論

三平方の定理や方冪の定理を使うことにより、正多角形の面積と同じ面積の正方形を作図することができる。

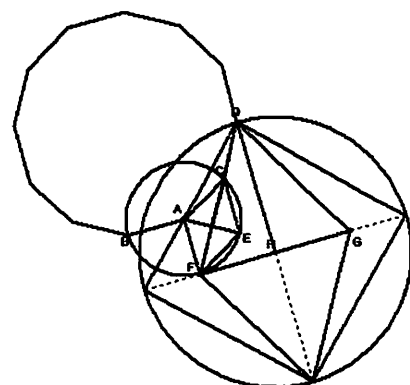
6. 参考文献

(なし)

7. キーワード

作図 正多角形

(右の図は比較的簡単な正十二角形の場合)



ボールの軌跡

The locus of the ball

上田 正幸 嶋田 侑眞 柳川 龍之介

Masayuki Ueda, Yuma Shimada, and Ryunosuke Yanagawa

Abstract

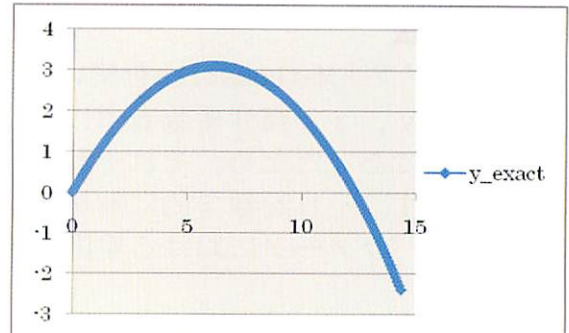
We examined a relationship between the distance and the angle of incidence by calculation and using Excel, we also considered the result that we got through our work.

1. 目的

初期高度がある場合のもっとも飛ぶ角度を調べ、その投射角度について考察する。

2. 方法

ボールに空気抵抗ははたらかないものとする。
物理の公式を用いて初期高度がない場合の最も飛ぶ角度を計算する。エクセルによるシミュレーションを使い、投射角を 40° から 50° の間で 0.1° ずつ変化させて飛距離が最大になるときの角度を調べる。

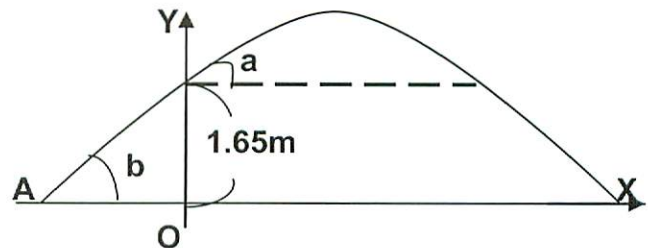


3. 結果

初期高度がない場合は、 45° が最も飛ぶ。
初期高度がある場合、例えば 1.65m の人の場合、 41.6° が最も飛ぶ。

4. 考察

なぜ初期高度があると、 45° より小さい 41.6° で最も飛ぶのか考えたところ、 a の角度が 41.6° の時に b の角度が 45° になるのではないかと考えた。A 地点における接線の傾きを考えた。



5. 結論

初期高度がない場合は 45° で初期高度 (1.65m) がある場合は 41.6° 。 45° より小さい角度で最も飛ぶ事がわかった。なぜ 41.6° で最も飛ぶのか証明する必要がある。

6. 参考文献

「Excel による数値解析」 北陸電力ミックスオイラープロジェクトチーム 著

7. キーワード

斜方投射 シミュレーション 放物線 微分

結び目に対する解析的アプローチ

An analytical approach to knots

大木圭佑 濱中克巳 松浦昌海 吉田識人 村田一真

Keisuke Oki · Katsumi Hamanaka · Masami Matsuura · Norito Yoshida · Kazuma Murata

Abstract

We have decided to examine everyday phenomena on mathematic grounds. Then we assumed that it would be easy to express a knot of strings by function, and undertook the research. First, we represent a knot of strings by function. Next, we simplify it and find out the law. Finally, we discover the conditions of making a knot.

1. 目的

①ひもの結び目を関数で表す。②関数を簡略化する。③各パラメータにおける規則性を見出す。④関数が結び目となる条件を探し出す。

2. 方法

関数ソフトMathematicaを使い、既成の関数（リサーチ曲線、リマソン曲線など）を x 、 y 、 z で媒介変数表示にし、結び目を関数で立体的に作る。既成の関数が三角関数であったため、それぞれのパラメータをマクローリン展開して近似し、整関数に直す。それを数学的に解析し、よりきれいで簡略化した結び目に直す。その過程で各パラメータにおける規則性を見出し、結び目全体における規則性を探す。

3. 結果

結び目を x 、 y 、 z を整関数のパラメータで表すことができた。リサーチ曲線を用いた結び目に成功。しかし、これは8の字結びであったため、よりシンプルである一重結びを目指した。元とする関数をリマソン曲線に変更。リマソン曲線を用いての一重結びに成功。

4. 考察

一重結びは、 x, y, z それぞれの式に対して3次, 4次, 5次関数を用いることで表すことができる。また、8の字結びはリサーチ曲線を用いて表すことができた。このことから、8の字結びも多項式で表すことができると思われる。

5. 結論

すべての結び目は多項式で各パラメータを表すことができると思われる。

6. 参考文献

高等学校 数学C 改訂版（啓林館） http://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_knot
https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1949/44/1/44_1_11/_article

7. キーワード

Knot, figure-eight knot, half-knot, taylor expansion, Maclaurin's expansion

コインと天秤

竹内孝 亀島祐貴 出戸貴也 石川宗 稲吉隼

Abstract

The question is how we can discriminate a false coin from 11 real ones, which are the same in appearance as a false one, by using a balance three times. We research the solution of this question, and how many coins can be distinguished when we use a balance n times. Furthermore we research the case with other conditions.

1.目的

見た目は同じだが、重さが本物とは異なる偽コインが1枚含まれている。 n 回天秤を使うとき最大何枚のうちから偽コインを判別することができるのかを調べる。さらに、偽コインの枚数を増やした場合についても考察する。

2.方法

まず偽コインを1枚含む場合、3回天秤を使ったときについて考え、そこから n 回天秤を使ったときについて予想し、証明する。証明は逐次近似解法と機械的解法を試みた。

3.結果・考察

3回天秤を使ったときは偽コインを含むコインの総数が13枚まで判別できる。同様に1、2、4回するときも調べると表1のようになった。

天秤の回数	1	2	3	4	...	n
コインの枚数	1	4	13	40	...	?

表1から天秤を n 回使ったときのコインの枚数を

表1

a_n とすると、 $a_n = 3a_{n-1} + 1$ と考えられる。一般項を求めると、 $a_n = (3^n - 1)/2$ 。

よって天秤 n 回使ったとき $(3^n - 1)/2$ 枚のコインが判別可能であると考えられる。

4.結論

天秤 n 回使ったとき最大 $(3^n - 1)/2$ 枚のコインが判別可能である。また、本物と分かっているコインが1枚あるとき、最大 $(3^n + 1)/2$ 枚のコインが判別可能である。偽コインの枚数が増えた場合については考察中である。

5.参考文献

筑波大学付属駒場高校 卒業論文集 結城智康 「偽硬貨判別法」

6.キーワード

偽コイン 天秤 コード化

実用数 Practical Numbers

加藤 優希 山本 竜也 吉岡 亜瑞彩

ABSTRACT

We were interested in the relationship between natural numbers and their divisors. Thus, we found a book written about practical numbers and decided to study them. The book shows using a binary number but we wanted to show the relationship between natural number and the divisors by other proof. We were able to show a practical number by Mathematical Induction that we learned in our senior high school and find the factors for a practical number.

1. 目的

実用数の規則性または法則がないかなどを数学的帰納法を用いて発見する。

2. 研究方法

数学的帰納法をもちいて証明した。

実用数とは、自然数 N の約数の和で1から N までの整数を全て表すことのできる数。約数は一度しか使えない。

本研究では $\alpha, \beta, \gamma \dots$ を全て素数とし、 $2 < \alpha < \beta < \gamma < \dots$ とする。 $a, b, c, d \dots$ を全て自然数とする。

(例) $8(2^3)$ の場合 8 の約数 1, 2, 4, 8

$1=1$ $2=2$ $3=1+2$ $4=4$ $5=1+4$ $6=2+4$

$7=1+2+4$ $8=8$ \therefore 実用数である

2^a の約数の和で $2^{a+1}-1$ までの自然数を全て表す証明

(i) $a=1$ のとき

$2^1=2$ 2 の約数は、1, 2 なので、

$1=1$ $2=2$ $3=1+2$

となり、 $2^{1+1}-1$ まで表すことができる。

(ii) $a=k$ のとき

2^k の約数の和で1から $2^{k+1}-1$ までの全ての自然数を表すことができると仮定する (A)

$a=k+1$ のとき $2 \cdot 2^k$ と表せるので

2^{k+1} の約数の和で、(A)より1から $2^{k+1}-1$ までの全ての自然数を表すことができる。

このとき 2^{k+1} の約数で使っていない数は、 2^{k+1} のみ。

$2^{k+1}-1$ の次は 2^{k+1} なので、二つの数を足した

$2^{k+2}-1$ まで表すことができる。

(i)(ii)より、 2^a の約数の和で、

$2^{a+1}-1$ までの自然数を全て表すことができる。

$\therefore 2^a$ は実用数となる。

同様に $2^a \alpha, 2^a \alpha^b, 2^a \alpha^b \beta \dots$ を証明した。

3. 結果

$N = 2^a \alpha^b \beta^c \gamma^d \dots$ が実用数になるためには N を素数で表した時に小さい素数から順に掛けていって調べればよい。

$$\alpha \leq (2^{a+1} - 1) + 1$$

$$\beta \leq (2^{a+1} - 1) \frac{\alpha^{b+1} - 1}{\alpha - 1} + 1$$

$$\gamma \leq (2^{a+1} - 1) \frac{\alpha^{b+1} - 1}{\alpha - 1} \frac{\beta^{c+1} - 1}{\beta - 1} + 1$$

.

.

.

全て成り立つ場合 N は実用数である。

4. 参考文献 (参考にしたWebページのURL)

1) 矢ヶ部 巖, 大学のへの数学, 2001年2月号

5. キーワード

自然数, 約数, 実用数, 数学的帰納法

$(-1) \times (-1) = +1$
minus one multiplied by minus one becomes plus one

中村文哉, 谷口了胤
Fumiya Nakamura, Norithugu Taniguchi

Abstract

We were interested in it and tried to prove it by using two ways.

First, we used a distributive law. Second, we used complex number and pointed it on a unit of circle and proved by using additional theory.

1、目的

身近な疑問であった『 $(-1) \times (-1) = +1$ 』を証明する。
同様に『 $(-1) \div (-1) = +1$ 』も証明する。

2、方法

- ① 分配法則を利用する。
- ② 実数から複素数まで視野を広げ、横軸を『実軸』、縦軸を『虚軸』とし、単位円上に点を取り、加法定理を利用する。

3、結果

- ①、②どちらでも証明することができた。

4、考察

複素数で表すと『 $(-1) \times (-1) = +1$ 』と『 $(-1) \div (-1) = +1$ 』は単位円上では同じ点だが、偏角がそれぞれ 2π 、 0 と異なる。

5、結論

『 $(-1) \times (-1) = +1$ 』、『 $(-1) \div (-1) = +1$ 』は実数以外でも証明できる。

6、参考文献

虚数の情緒

7、キーワード

分配法則 虚数 複素数 実軸 虚軸 単位円 偏角 加法定理

サグラダファミリ教会の魔方陣

明治学園中学高等学校 中学2年 岡田昌樹

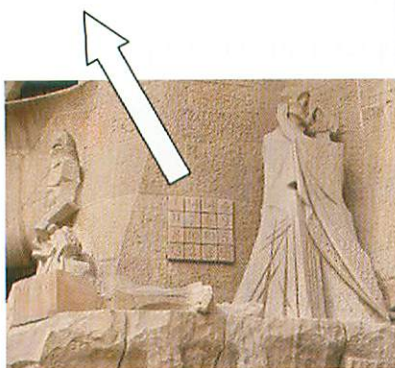
●研究目的

スペインのバルセロナのサグラダファミリアという教会に、次のような魔方陣がある。

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

この魔方陣は、合計が 33 になる数字の組み合わせが 310 通りあるという記載がある。

そこで、今回の研究はこの 310 通りの足し算を全てを見つけることを目的とした。



●研究内容

まず最初に、「組み合わせ」とはどのような意味かを考えた。

i) 「組み合わせ」の定義 I

- ① 足し合わせる数は 4 つで繋がっていてもよい(例: $1+13+9+10$) ⇒ **86** 通り
- ② 同じ組み合わせでも、順序が違えば別の足し算とする(例: $1+13+9+10$ と $1+13+10+9$)
- ③ 10 や 14 が 2 回出てくる足し算は、それぞれを区別しない
- ④ 10 や 14 が 1 回しか出てこない場合は、10 や 14 と区別する。 ⇒ **1992** 通り

ii) 「組み合わせ」の定義 II

- ① たし合わせる数は何個でもよく、魔方陣上で繋がっていてもよい。
- ② 順序が違ってても、同じ組み合わせなら同じ足し算とする。 ⇒ **202** 通り

iii) 「組み合わせ」の定義 III

魔方陣のルールとして、次のようなものがある。

縦、横、対角線、S 字、ななめの合計が全て等しい ⇒ **312** 通り

●結果

結局、310 通りという数はでてこなかった。iii) ででた 312 通りを「約」310 通りということで記載したのか、それともただの間違いかという結果になった。

数学を用いた文様出力プログラムの制作 Programming Computers to Draw Various Patterns by Using Mathematics

伊藤 夏海 丹司 宙
Natsumi ITO Oki TANJI

Abstract

In our SSH math classes, we try to program computers to draw various patterns on screens by using math. We are going to present you how we programmed computers and what patterns appeared on screens by this program. Then we would like to think about its possibilities.

1. はじめに

私たちの学校における SSH 数学の授業では“数学とコンピュータを用いてモノを作る”活動を行っている。私たちは“文様出力プログラムの制作”をテーマに同活動を行い、一応の結果・結論を得た。今回は、以上について発表させて頂く。

2. 方法

数学とコンピュータを用いてのモノ作りの手順は常に一定ではないが、大凡の場合、次の手順をたどればモノ作りは上手く行くと考えられる。

①作りたいモノを理想化する. →②理想化されたモノを数式化する. →③得られた数式を用いてプログラムを作る(コンピュータ化). →④画面にモノ(映像)を出力する.

私たちもこの手順により“文様出力プログラム”の制作を試みた。

3. 結果

左端の図は完成したプログラム(の一部)、右2図はその実行結果である。



4. 考察・結論

- ・例えば、文様付きの製品を生産する場合「どのような文様にすべきか」を検討しなければならないであろう。こういった場面では、私たちが制作したプログラムは大いに役立つであろう。
- ・しかし、n88 互換 basic 言語で作ったプログラムは実行速度が遅く“画面上で様々な文様を自在に作ることでできるプログラム”の完成とまでは行かなかった。前記の「大いに役立つ」という所までに至らなかったわけである。この問題は描画速度の速い他の言語を用いる事で解決され得るが、その言語とは何であろうか。

5. キーワード 数学 コンピュータ モノ作り n88 互換 basic

フィボナッチ数列と Euclid 互除法に関する一定理

文責：海城高等学校 1 年

恩田直登

Abstract We obtain a relation between Fibonacci sequence and Euclidian algorithm.

1. 目的 Euclid 互除法に関する Lamé の定理の拡張を試みる.

2. 方法 Fibonacci 数列と Euclid 互除法を組み合わせることによって拡張を試みた.

3. 結果

3.1. 定義 2 つの自然数 A と $B(B < A)$ の最大公約数 $G(A, B)$ を求める為の Euclid 互除法の適用回数を $En(A, B)$ と定義する.

(例) $G(17, 10) = G(10, 7) = G(7, 3) = G(3, 1) = 1$ より $En(17, 10) = 4$

3.2. 主定理 数列 $\{a_n\}$ について, 漸化式: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci 数列) が成り立つとき, $A = a_{n+2} + a_n, A, B \in \mathbb{N}, A > B$ を満たすならば最大の $En(A, B)$ は n である.
また, このときの B のひとつは a_{n+2} である.

3.2.1 例 1 $n=4$ の場合, 主定理より次の結果が得られる;

$A = a_{4+2} + a_4 = 11$ かつ $A > B$ ならば, $En(A, B)$ の最大値は 4 である. そのときの B のひとつは $a_4 = 8$ である.
いま,

$$En(11, 1) = 1$$

$$En(11, 2) = En(11, 5) = En(11, 10) = 2$$

$$En(11, 3) = En(11, 4) = En(11, 6) = En(11, 9) = 3$$

$$En(11, 7) = En(11, 8) = 4$$

より, $A = 11$ かつ $A > B$ を満たす $En(A, B)$ の最大値は 4 であり, このときの B は 7 と 8 であり, 確かに 8 が含まれている.

3.2.2 例 2 $n=5$ の場合, 主定理より次の結果が得られる;

$A = a_{5+2} + a_5 = 18$ かつ $A > B$, ならば, $En(A, B)$ の最大値は 5 である. そのときの B のひとつは $a_5 = 13$ である.
いま,

$$En(18, 1) = En(18, 2) = En(18, 3) = En(18, 6) = En(18, 9) = 1$$

$$En(18, 4) = En(18, 8) = En(18, 12) = En(18, 15) = En(18, 16) = En(18, 17) = 2$$

$$En(18, 10) = En(18, 14) = 3$$

$$En(18, 5) = En(18, 7) = 4$$

$$En(18, 11) = En(18, 13) = 5$$

より, $A = 18$ かつ $A > B$ を満たす $En(A, B)$ の最大値は 5 であり, このときの B は 11 と 13 であり, 確かに 13 が含まれている.

4. 参考文献 数学の花束 (中村滋・著, 岩波書店, 2008)

5. キーワード Fibonacci 数列 Euclid 互除法 Lamé の定理

円順列の一般公式

文責：海城高等学校 1年 増田康隆

Abstract We obtain a formula of the number of circle permutation that reveals how many ways to put several matters on a circle.

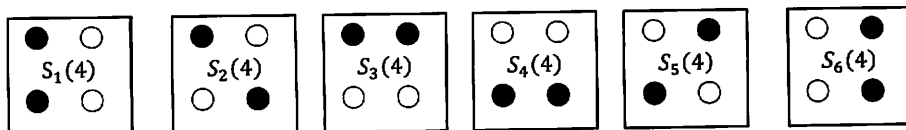
1. 目的 円状にいくつかの異なるものを並べた時の、回転して異なる置き方の種類を発見する。
2. 方法 まず具体的に少ない個数の場合から調べ、群論の概念 (Burnside の定理など) を援用して一般の場合についての公式を導く。

3. 結果

3・1 記号の説明

- ① $S(n) := \{ \text{各頂点に名前を付けた正 } n \text{ 角形の各頂点 (} n \text{ 個) に } p_1 \text{ 個の } \square_1, p_2 \text{ 個の } \square_2, p_3 \text{ 個の } \square_3, \dots \text{ を置いてできる置き方全体 (但し, } S(n) \text{ の要素を各 } i = 1, 2, 3, \dots \text{ で表す)} \}$
- ② $T(n) := \{ \text{頂点を区別しない正 } n \text{ 角形の各頂点 (} n \text{ 個) に } p_1 \text{ 個の } \square_1, p_2 \text{ 個の } \square_2, p_3 \text{ 個の } \square_3, \dots \text{ を置いてできる置き方全体 (但し, } T(n) \text{ の要素を各 } j = 1, 2, 3, \dots \text{ で表す)} \}$

[(例) “正方形の 4 つの頂点に 2 個の黒玉と 2 個の白玉を置いてできる ${}_4 C_2 = 6$ 通りを置く場合の” $S(4)$]



(注) この例から分かるように、単に $S(n)$ ではなく、白玉や黒玉の個数の様々な場合が考えられるので “...” が必要である (すなわち、『“...” の $S(n)$ 』ということ)。記号に反映させると煩雑になるのでこのようにしてある。
 $T(n)$ も同様。

③ f_k : 正 n 角形の重心の周り $\frac{360^\circ}{n} \times k$ 回転

[先程の例では、 $f_1 \left(\begin{array}{cc} \bullet & \circ \\ \bullet & \circ \end{array} \right) = \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \bullet & \bullet \end{array} = S_4(4)$]

$T_1(4)$	$T_2(4)$
$S_1(4), S_2(4), S_3(4), S_4(4)$	$S_5(4), S_6(4)$

④ p_1, p_2, p_3, \dots の、1 を含む公約数を a_1, a_2, a_3, \dots ($a_1 > a_2 > a_3 \dots$) とする。

[先程の例では、 $a_2 = 1$ で、 $f_{\frac{1}{2}}(S_1(4)) = S_4(4)$, $S_1(4), S_4(4) \in T_1(4)$]

$\sim T(4) = \{T_1(4), T_2(4)\}$ の図 \sim

⑤ $S^{f_k} \left(\frac{n}{a_i} \right) := \{ S(n) \text{ において、} f_k \text{ 回転で重複するものを同一とみなした置き方全体} \}$

$= \{ p_1/a_1 \text{ 個の } \square_1, p_2/a_2 \text{ 個の } \square_2, \dots \text{ の置き方 } S \left(\frac{n}{a_i} \right) \text{ (} i=1, 2, \dots \text{)} \}$ ⑥ $X := \#T(n) =$ (求める場合の数)

3・2 得られた公式

上記のもとで、

$$X = \frac{1}{n} \left[|S^{f_0}(n)| + (a_1 - 1) |S^{f_{a_1}} \left(\frac{n}{a_1} \right)| + (a_2 - 1) \left\{ |S^{f_{a_2}} \left(\frac{n}{a_2} \right)| - |S^{f_{a_1}} \left(\frac{n}{a_1} \right)| \right\} + (a_3 - 1) \left\{ |S^{f_{a_3}} \left(\frac{n}{a_3} \right)| - |S^{f_{a_2}} \left(\frac{n}{a_2} \right)| - |S^{f_{a_1}} \left(\frac{n}{a_1} \right)| \right\} + \dots \right]$$

を得る。特に p と q が互いに素 (最大公約数が 1) のとき、 $X = \frac{1}{n} |S^{f_0}(n)|$ で与えられる。

3. 例 [先程の例では、 $X = \frac{1}{4} \left\{ |S^{f_0}(4)| + (2-1) |S^{f_{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{2} \right)} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{4!}{2!2!} + (2-1) \frac{2!}{1!1!} \right\} = 2$ で、確かに 2 通りとなる。]

1. $n = 8, p_1 = 4, p_2 = 4, a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1$ より、 $X = \frac{1}{8} \left\{ |S^{f_0}(8)| + (4-1) |S^{f_{\frac{1}{4}} \left(\frac{8}{4} \right)} \right\} + (2-1) \left\{ |S^{f_{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{2} \right)} \right\} - |S^{f_{\frac{1}{4}} \left(\frac{8}{4} \right)} \right\} + 0$
 $= \frac{1}{8} \left\{ \frac{8!}{4!4!} + (4-1) \frac{2!}{1!1!} + (2-1) \left(\frac{4!}{2!2!} - \frac{2!}{1!1!} \right) \right\} = 10$

5. a, a, b, b, c, c, c, c の 8 個の文字全体を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。ただし、回転して重なり合う並びは同じ並びとする。 [3 文字への拡張]

$$X = \frac{1}{8} \left\{ |S^{f_0}(8)| + (2-1) |S^{f_{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{2} \right)} \right\} = \frac{1}{8} \left(\frac{8!}{2!2!4!} + (2-1) \frac{4!}{1!1!2!} \right) = 5$$

4. 参考文献 『対称性からの群論入門』アームストロング著 (佐藤訳) (1998, Springer)

5. キーワード 円順列 群論 Burnside の定理

マスフェスタに向けての大手前高校の取り組み事例

－「のぞみ」(数学課題研究授業)－

大手前高校では、マスフェスタに向けて、授業と行事を効果的に配置し教育効果を高めるよう工夫をしています。2年生の前期に実施するSSH科目「のぞみ」についてご紹介いたします。

【概要】

大手前高校では、SSH科目の一つとして「のぞみ」を実施しています。この科目は、①数学に対する興味関心を高め、②数学的論理力・思考力・表現力を養い、③科学への探究心を高める、ことを目的としています。具体的には、1単位に相当する時間を利用して、科学する上で必要となる統計学を学んだり、数学に関する課題研究を行っています。研究内容は、純粋数学、身の回りの数学など多岐にわたっています。毎年7月に実施する2泊3日の宿泊研修「サマースクール」では、160人が30程のグループに分かれプレゼンテーション大会を実施しますが、その様子は壮大なものです。

【ねらい】

①数学に対する興味関心を高める

数学は日々の授業の中でも学習が進められていますが、その特徴である抽象化のためにだんだんと日常から遠くに追いやられていくように感じられます。数学をもう少し身近なものに感じることをめざします。

②数学的論理力・思考力・表現力を養う

人の営みの中で、数学的論理力・思考力・表現力を養うことはとても重要なことだと考えています。色々な場面でその力が問われています。特に、科学する上でこれらのスキルを習得することは必要不可欠です。課題研究の取り組みの中で総合的な力として養っていきます。

③科学への探究心を高める

文理を問わず、各分野への課題研究を進めるにあたってのプレ研究と位置づけています。ここで得た経験を踏まえ次の課題研究へステップアップします。

【発表テーマ例】

ガチャボンの確率と期待値、二階から目薬、はやく決着をつけよう(じゃんけん)、郵便切手の問題、立体の最短経路とパスカルの三角形、フェルマー点、空間充填立体、多角形の拡張、散歩でみつけた平面充填、四次元におけるパスカル三角形

ガチャポンの確率と期待値

大阪府立大手前高等学校 2年8組 F班
岩間 柳瀬 前岡 松山 中川 吉成

概要

私たちは、ガチャポンの確率や期待値について興味を持ち、何種類の場合でも使える公式、即ち、n種類の場合の一般式について求めてみた。

序論

今回求めてみたのは、以下の場合の確率と期待値である。

- i) n種類のカチャポンで、1度も重複せずにコンプリートできる確率。
- ii) n種類のカチャポンで、コンプリートするまで回す回数の期待値。

本論

i) まず、2~4種類の場合の確率を求めてみた。

・2種類... $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

・3種類... $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

・4種類... $1 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{64}$

以上より、n種類を1度も重複することなくコンプリートできる確率は

$$1 \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$$

ii) まず、回数の期待値の計算公式として、

$$(\text{回数}) \times (\text{1回あたりに出現する確率}) = 1$$

となるような(回数)を求めることで、回数の期待値が計算できることを利用した。

(公式証明)

1回の試行で事象Aが起こる確率をpとし、1-p=qとする。

n回目に初めてAがおこるとして表を作る。

回数	1	2	3	4	...	n
確率	p	qp	q ² p	q ³ p	...	q ⁿ⁻¹ p

回数の期待値を E_n とすると

$$E_n = 1p + 2qp + 3q^2p + \dots + nq^{n-1}p \quad \dots \textcircled{1}$$

$$qE_n = qp + 2q^2p + \dots + (n-1)q^{n-1}p + nq^n p \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②

$$(1-q)E_n = p + qp + q^2p + \dots - nq^n p = \frac{p(1-q^n)}{1-q} - nq^n p$$

$$= \frac{p(1-q^n) - n(1-q)q^n p}{1-q} = \frac{npq^{n+1} - (n+1)pq^n + p}{1-q}$$

$$E_n = \frac{npq^{n+1} - (n+1)pq^n + p}{(1-q)^2} = \frac{nq^n(pq - p) - pq^n + p}{(1-q)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

よって、Aが1回起こる確率がpのとき

Aが起きるまでの回数の期待値は $\frac{1}{p}$

まず、2~4回のときの期待値を求めてみた。

・2種類: 3回

残りの種類	確率	期待値
2	2/2	2
1	1/2	2

・3種類: 5. 5回

残りの種類	確率	期待値
3	3/3	3
2	2/3	3/2
1	1/3	3

・4種類: 8. 3回

残りの種類	確率	期待値
4	4/4	4
3	3/4	4/3
2	2/4	4/2
1	1/4	4

以上より、n種類をコンプリートするためにガチャポンを回す回数の期待値Tは

$$T = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} + \dots + n$$

実際にサイコロを使って、2~4種類の場合のすべて集めるのにかかった回数の平均を出してみた。

(なお、実験総数は各100回)

種類	2	3	4
回数	2.9	5.61	8.2

結論

i) n種類のカチャポンで、1度も重複することなくコンプリートできる確率は

$$T = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} \dots + n$$

ii) n種類のカチャポンで、コンプリートするまで回す回数の期待値Tは $\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$

今後の課題

- ・今回は、すべて等しい確率で出るときに限っての数値しか求められなかった。だから、確率が他とは違う「レア」がある場合では、数値がどう変化するのかしらべてみたい。

回数の期待値の一般式については、さらに簡単にできると思うので、研究の継続が必要だと思う。

参考文献

- ・山本弘のSF秘密基地

二階から目薬

2 - 2 國重 明日香 富田 倫子 留河 愛梨 福田 紘子 藤田 陽光 米田 美波

●概要

日本のことわざには、数学的にその確率などについて検証できそうだと考えられるものがある。その中で今回私たちは、「二階から目薬」ということわざを取り上げた。

私たちは階段の段差を利用して、実際に高さ3mからクリアファイルに書いて的に向かって水滴を落とす実験を行い、落下点の分布や命中率を多方面から数学的に考察してみることにした。

●実験方法

命中率について念頭においておくべきことは

- ・二階から目薬を落とすときは的である目を狙っている、つまり水滴はランダムに落ちるわけではないこと
- ・命中率には個人差があり実験を繰り返していくうちに命中率が上がっていくこと

である。

これらを考慮して実験の結果は複数人の平均をとることとし、落とすのが上手になり過ぎないように100回で実験を終了とする。

そして個人差による命中率の差が非常に大きいことから今回実験を行った集団の結果が二階から目薬の命中率であるとは言えないため命中率ではなく落下点の分布を調べることとし、また、個人差の無いような実験方法として目をつぶって目薬を落とす実験を行い、そこで得られる命中率について調べる。

分布を調べる実験では、的を点で表し中心である的からどれだけ離れているかで分布を表すこととする。命中率を調べる実験では、的を半径3cmの円で表し100回中何回入ったかを命中率とする。

以上より実験内容を以下の通りに設定する。

< 実験内容 >

高さ3mのところから目薬を100回落とす

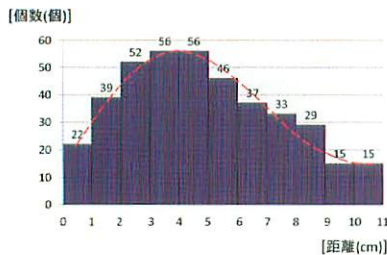
- ① 中心の点の的を狙って落とし、落下点の分布のしかたを調べる。
- ② 目をつぶってランダムに落とし、命中率を調べる。

●実験結果①：狙って落とす

400回分の結果より落下点に印をつけていく。

中心の点から半径□cm～□cmに水滴がいくつ落ちたかを数え上げ、グラフに表すと落下点の分布は以下の通りとなった。

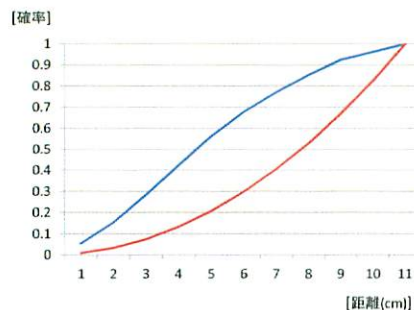
距離(cm)	個数(個)
0~1	22
1~2	39
2~3	52
3~4	56
4~5	56
5~6	46
6~7	37
7~8	33
8~9	29
9~10	15
10~11	15



命中したのみならず

次に、半径何cm以内いくつ落ちたかを数え、全体の個数で割って確率とし、ランダムに落とすときの確率と比較してみた。

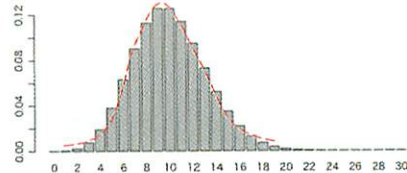
距離(cm)	個数(個)
0~1	22
~2	61
~3	113
~4	169
~5	225
~6	271
~7	308
~8	341
~9	370
~10	385
~11	400



●ポアソン分布 (参考)

一般的に起こる確率の低い事象が1単位区間(1km、1時間あたりなど)に起こる確率を「ポアソン分布」と言う。例：ある交差点で1時間に起きる事故の件数、ある国道で1kmの間にあるコンビニの数

全く起こらないわけではないが、度々起こる事象でもないので両端が下がったグラフになる。



<http://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/stat/poisson.php> 「ポアソン分布」より

※参考

1単位区間に平均してλ回起こる事象が、ある単位区間にちょうどk回起こる確率 P_k は

$$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ である。}$$

eは、 $e=2.718281828459045\dots$ と続く無理数で、自然対数の底である。

二階から目薬も10回ごと、100回ごとなどある単位で区切ってグラフを作成すれば上図のような分布になると思われるが今回は時間の都合上実験ができませんでした。

●実験結果②：ランダムに落とす

5人に実験を行ったところ、結果はそれぞれ

$$\frac{4}{100}, \frac{3}{100}, \frac{5}{100}, \frac{5}{100}, \frac{4}{100}, \text{ より、命中率の平均は } \frac{4.2}{100}$$

となった。

ここで命中率について考える。

目をつぶってランダムに的に目薬を落とすとき、的のどこに落ちることも同様に確からしいと言える。そのときの命中率は

$$\frac{\text{的の面積}}{\text{ファイルの面積}} \text{ に等しい。}$$

これより私たちはランダムに落とした場合の命中率でπを含む等式を立ててπの近似値を求めることを考えた。ここで面積を調べると

$$\text{ファイル：縦} \times \text{横} = 30.7 \times 22 \\ \text{的：半径} \times \text{半径} \times \pi = 3 \times 3 \times \pi = 9\pi \text{ より、命中率は } \frac{9\pi}{30.7 \times 22}$$

以上より

実験で求めた命中率 = 図形で求めた命中率 という等式を立てて

$$\frac{9\pi}{30.7 \times 22} = \frac{4.2}{100}$$

これを解いて $\pi = 3.151866666\dots$

実際のπの値は $\pi = 3.1415926535\dots$

よって今回の実験でπの近似値を求めることができた。

●まとめ

二階から目薬について狙う場合とランダムの場合に分けて実験し、それぞれについて考察した。狙う場合、落下点の分布に注目してグラフをつくると、狙って落とす方がランダムに落とすよりも命中率が高いことが確かめられた。ランダムの場合、的のどこに落ちるのも同様に確からしいことに注目して実験結果と図形的に求めた命中率で等式を立て、πの近似値を求めた。

早く決着をつけよう ~じゃんけんと派生ルールの検証と勝敗確率の一般化~

大阪府立大手前高等学校 2年2組E班

東 上 加 世 田 大 畑 隠 岐 川 崎

概要

私たちが物事を決める際によく用いられる「じゃんけん」。一回勝負して勝負がつく確率は $\frac{2}{3}$ と知られている。しかし、大人数でじゃんけんを行うときはなかなか勝敗がつかないもの。ここでよく用いられる派生ルール(多い勝ち、少ない勝ち)があるのだが、調べてみても一般の式が見当たらない。そこで、私たちは派生ルールの勝敗確率を一般式で表せるかを試みた。

準備

派生ルール(多い勝ち、少ない勝ち)についてだが、個人間のルールの相違があっては困るので次のように定義する。

- 多い勝ち・・・多数決の原理に従ってもっとも多く出ている手を勝ちとする。
また、最も多く出ている手が2種類ある場合はその2つの手を勝ちとする。
- 少ない勝ち・・・最も少なく出ている手を勝ちとする。
また、最も少なく出ている手が2種類ある場合はその2つの手を勝ちとする。

ただし、どちらのルールにおいても出ている手がすべて同じ数である場合は引き分けとなる。

考え方

多い勝ち、少ない勝ち、どちらにしてもどの手が一番多い、少ないかを考えなければならぬ。そこで、グー一人、チョキ何人、パー何人といった組み合わせを考えることで勝敗が決まる確率を求める。

n人(n≧3)で勝負するとき、
 $a \leq b \leq c$
 a, b, c とも0以上の整数
 $a + b + c = n$

これらをもとに組み合わせ
 (a, b, c) を考え、これらを並び替えて左から
 グー、チョキ、パー、を出す人数とする。

例・・・(0, 2, 2) 並び替えて・・・

- (0, 2, 2)
- (2, 0, 2)
- (2, 2, 0)

この方法で、多い勝ち、少ない勝ち、(普通の)じゃんけんを表す。まず3~6人の場合を考える。

検証方法

- 3~6人でじゃんけん、多い勝ち、少ない勝ちを1回としたとき、勝敗がつく確率を考え方を示して求める。
- 結果よりわかることを考察する。
- 考察をもとに、n人で多い勝ち、少ない勝ちを1回としたときの勝敗がつく確率を式で表せるかを考える。
- ※n人で対戦すると述べているが、1人だと対戦にならない。
また、2人だと、多い、少ない勝ちでは対戦にならないので、 $n \geq 3$ とする。
- 先ほどの考え方、 (a, b, c) の組み合わせを用いて考える。

I. n = 3のとき、組み合わせは {0,0,3}, {0,1,2}, {1,1,1}

- {0,0,3}の時、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して3人を3人にわけ方は $c_2 c_3$ 通り、よってこのときの場合の数は $c_1 \times c_2 \times c_3 = 3$ (通り)
- {0,1,2}のとき、並べ方は3通り、それぞれに対して3人を1人、2人にわけ方は c_1 通り、よってこのときの場合の数は $3! \times c_1 = 18$ (通り)
- {1,1,1}のとき、並べ方は1通り、また、3人を各1人にわけ方は $c_1 \times c_2 \times c_3$ 通り、よって、この時の場合の数は $1 \times c_1 \times c_2 \times c_3 = 6$ (通り)

- i)じゃんけんの時
勝負がつくのは{0,1,2}の組み合わせのとき、よって、求める確率は $\frac{18}{3^3} = \frac{2}{3}$
- ii)多い勝ち、少ない勝ちの時
勝負がつくのは{0,1,2}の組み合わせのとき、よって、求める確率は $\frac{18}{3^3} = \frac{2}{3}$

II. n = 4のとき、組み合わせは {0,0,4}, {0,1,3}, {0,2,2}, {1,1,2}

- {0,0,4}のとき、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して4人を4人にわけ方は c_2 通り→合計3通り
- {0,1,3}のとき、並べ方は3通り、それぞれに対して4人を1人、3人にわけ方は c_1 通り→合計24通り
- {0,2,2}のとき、並べ方は3通り、それぞれに対して4人を各2人にわけ方は c_2 通り→合計18通り
- {1,1,2}のとき、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して4人を1人、1人、2人にわけ方は $c_1 \times c_2 \times c_3$ 通り→合計36通り

- i)じゃんけんの時
勝負がつくのは、{0,1,3}, {0,2,2}の組み合わせのとき。
よって、求める確率は $\frac{24 + 18}{3^4} = \frac{14}{27}$
- ii)多い勝ち、少ない勝ちの時
勝負がつくのは、{0,1,3}, {1,1,2}の組み合わせのとき、よって、求める確率は $\frac{24 + 36}{3^4} = \frac{20}{27}$

III. n = 5のとき、組み合わせは {0,0,5}, {0,1,4}, {0,2,3}, {1,1,3}, {1,2,2}

- {0,0,5}のとき、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して5人を5人にわけ方は c_2 通り→合計3通り
- {0,1,4}のとき、並べ方は3通り、それぞれに対して5人を1人と4人にわけ方は c_1 通り→合計30通り
- {0,2,3}のとき、並べ方は3通り、それぞれに対して5人を2人と3人にわけ方は c_2 通り→合計60通り
- {1,1,3}のとき、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して5人を1人と1人と3人にわけ方は $c_1 \times c_2 \times c_3$ 通り→合計60通り
- {1,2,2}のとき、並べ方は c_1 通り、それぞれに対して5人を1人と2人と2人にわけ方は $c_1 \times c_2 \times c_3$ 通り→合計90通り

- i)じゃんけんの時
勝負がつくのは、{0,1,4}, {0,2,3}の組み合わせのとき、よって、求める確率は $\frac{30 + 60}{3^5} = \frac{10}{27}$
- ii)多い勝ち、少ない勝ち、
勝負がつくのは{0,0,5}の組み合わせでないとき、よって、求める確率は $1 - \frac{3}{3^5} = \frac{80}{81}$

IV. n=6のとき、組み合わせ {0,0,6}, {0,1,5}, {0,2,4}, {0,3,3}, {1,1,4}, {1,2,3}, {2,2,2}

- {0,0,6}のとき→合計3通り
- {0,1,5}のとき→合計36通り
- {0,2,4}のとき→合計90通り
- {0,3,3}のとき→合計60通り
- {1,1,4}のとき→合計90通り
- {1,2,3}のとき→合計360通り
- {2,2,2}のとき→合計90通り

全体の組合せの数は 3^6

- i)じゃんけんの時
勝負がつくのは{0,1,5}, {0,2,4}, {0,3,3}の組み合わせのとき、よって求める確率は $\frac{36 + 90 + 60}{3^6} = \frac{62}{243}$
- ii)多い勝ち、少ない勝ちの時
勝負がつくのは、{0,0,6}, {0,3,3}, {2,2,2}の組み合わせでないとき。
よって、求める確率は $1 - \frac{17}{3^6} = \frac{64}{81}$

V. n=7以降も同様の考えを用いると次のようになった。

	3人	4人	5人	6人	7人	8人	9人	n人
じゃんけん	2/3	14/27	10/27	62/243	14/81	254/2187	170/2187	
多い勝ち	2/3	20/27	80/81	64/81	728/729	2116/2187	2000/2187	
少ない勝ち	2/3	20/27	80/81	64/81	728/729	2116/2187	2000/2187	

- ・4人以上で行くと、派生ルールのほうが、じゃんけんよりも勝負が決まりやすい。
- ・派生ルールはnの条件によっては、確率は高くなっていく。
- ・多い勝ちと少ない勝ちでは同じ人数での勝敗確率は同じ。
- ・5人、7人で派生ルールを用いたときの確率が異常に高い。

派生ルールでは、基本的に(勝敗が決する)確率は高いことが分かった。そこで、勝負がつかないターンを考えることで一般にn人の場合での勝負がつく確率の計算に挑む。

一般(n人)の場合

表より、5人、7人の確率は異常に高い。このうち、5人のときを考えてみると、勝負がつかないのは{0,0,5}の組み合わせの時だけだった。

勝負がつかない組み合わせにはパターンがあるかもしれない

そこで、3~6人のときの勝負がつかない組み合わせを抜き出した。

- $n = 3 \cdots \{0,0,3\}, \{1,1,1\}$
- $n = 4 \cdots \{0,0,4\}, \{0,2,2\}$
- $n = 5 \cdots \{0,0,5\}$
- $n = 6 \cdots \{0,0,6\}, \{0,3,3\}, \{2,2,2\}$

組み合わせが $\{0,0,n\}$ 、 $\{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$ 、 $\{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}\}$ のときは勝負がつかない。

- i) nが6の倍数のとき
勝負がつかない組み合わせは、 $\{0,0,n\}$ 、 $\{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$
 $\{0,0,n\}$ は並べ方が c_1 通り、それぞれに対してn人をn人にわけ方は c_2 通り
 $\{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$ は並べ方が c_1 通り、それぞれに対してn人を各 $\frac{n}{2}$ 人にわけ方は $\frac{n!}{(\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!}$ 通り
 $\{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$ は並べ方が c_1 通り、それぞれに対してn人を各 $\frac{n}{2}$ 人にわけ方は $\frac{n!}{(\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!}$ 通り
 よって、勝負がつかない場合の数は $3 + 3 \times \frac{n!}{(\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!} + \frac{n!}{(\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!} = 3 + \frac{3 \cdot n!}{(\frac{n}{2})^2}$
 なので、求める確率は、 $1 - \frac{3 + \frac{3 \cdot n!}{(\frac{n}{2})^2}}{3^n} = 1 - \frac{3}{3^n} \left\{ 1 + \frac{n!}{(\frac{n}{2})^2} \right\}$
- ii) nが3の倍数だが6の倍数でないとき
勝負がつかない組み合わせは、 $\{0,0,n\}$ 、 $\{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}\}$
 i)と同じように考えて、勝負がつかない場合の数は $3 + \frac{n!}{(\frac{n}{3})^3}$
 よって、求める確率は、 $1 - \frac{3}{3^n} \left\{ 3 + \frac{n!}{(\frac{n}{3})^3} \right\}$
- iii) nが2の倍数だが6の倍数でないとき
勝負がつかない組み合わせは、 $\{0,0,n\}$ 、 $\{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\}$
 i)と同じように考えて、勝負がつかない場合の数は $3 + \frac{3 \cdot n!}{(\frac{n}{2})^2}$
 よって、求める確率は、 $1 - \frac{1}{3^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{n!}{(\frac{n}{2})^2} \right\}$
- iv) nが2の倍数でも3の倍数でもないとき
勝負がつかない組み合わせは、 $\{0,0,n\}$ のみ
 i)と同じように考えて、勝負がつかない場合の数は 3通り
 よって、求める確率は、 $1 - \frac{3}{3^{n-1}}$

結論

n人(n≧3)でそれぞれのルールで一回試合を行ったときの勝敗が決まる確率は、次のようにあらわすことができると考えられる。

ルール	nが6の倍数	nが3の倍数だが6の倍数ではない	nが2の倍数だが6の倍数でない	nが2の倍数でも3の倍数でもない
多い勝ち	$1 - \frac{3}{3^n} \left\{ 1 + \frac{3 \cdot n!}{(\frac{n}{2})^2} \right\}$	$1 - \frac{3}{3^n} \left\{ 3 + \frac{n!}{(\frac{n}{3})^3} \right\}$	$1 - \frac{1}{3^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{n!}{(\frac{n}{2})^2} \right\}$	$1 - \frac{3}{3^{n-1}}$
少ない勝ち				
じゃんけん	$\frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$			

3人から9人までは具体的な値から派生ルールはじゃんけんよりも確率が高いことは示せた(3人は除く)。n≧4のとき、派生ルールがじゃんけんよりも確率が高いことは証明できた。

課題

さらに効率のよいルールを自分たちで作りに挑戦する。

郵便切手の問題

大阪府立大手前高校 2年2組H班 瓦井 太雄・平土井 悟・喜田 将司・篠原 大和・村橋令隆



1. 郵便切手の問題とは？

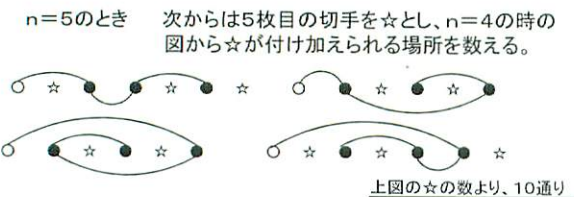
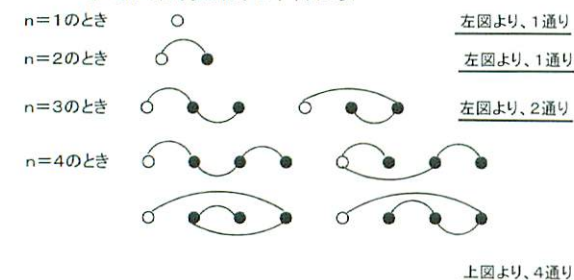
切り離されていない横1列に並んだn枚の切手を考えたとき、左端の切手が表向きで1番上になるようにすべての切手を折り込む方法は何通りあるか？
という未解決問題である。
ただし、折る順番が違っても結果が同じものは1つとする。

2. 内容のまとめ

テーマは「郵便切手の問題」。
ある切手の枚数nまでについて折り方の総数を求められる多項式を作ることを目的に決めた。
高校数学で学んだ漸化式のような考え方でアプローチをして、今回はn=7までの場合で使えるものを作った。

3. n=1~7の数え方

ルール {
・SL (Sainte-Laguë) 図形を用いて数える。
・○、●を1枚の切手として考える。
・○が左端の切手を表し切手同士をつなぐ弧は折る順番を表す。
・○から出る弧は必ず上半平面の弧



n=6, 7...のときも同様にSL図形を書いていき、6枚目、7枚目の切手の置くことができる場所を☆で記し、その数を数えていくと、n=6のときは24通り、n=7のときは66通りという結果が得られる。

4. 多項式での近似

・内容...ここで、3で求めた切手の枚数が1~7の折り方の総数 {1, 1, 2, 4, 10, 24, 66} を数列と見て、これを求める多項式を作る。

Step1

まず、この数列が基本的な漸化式の様形で表せないか考える

- ①前項との(階)差...{0, 1, 2, 6, 14, 42}となり、一貫した規則性は見られない。
- ②前項との比...{1, 1, 2, 2, 2.5, 2.4, 2.75}となり、①と同様規則性は見られない。
- ③その他...フィボナッチ・トリボナッチ数列との差、階差の階差の...などいろいろな数字を取り、調べたがどれも規則性は見られなかった。

そこで、原点に戻り、元の数列を有限数列 $\{a_n\}$ 、その階差数列を $\{b_n\}$ とおき、基本的な

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ の形になる } \{b_n\} \text{ の一般項を考える。}$$

Step2

$\{b_n\}$ の一般項の作成

$\{b_n\}$ は $\{0, 1, 2, 6, 14, 42\}$ となる有限数列

- ①n=1のとき、0になればいいので $(n-1) \cdot \text{①}$
- ②n=2のとき、1になればいいので①のまま
- ③n=3のとき、2になればいいので①のまま

- ④n=4のとき、6になるには①の項では3足りない。
そこで、nが1~3のときは0となりn=4のとき3となる項を付け加える。

$$\frac{1}{2} (n-1)(n-2)(n-3) \cdot \text{②}$$

- ⑤n=5のとき、①と②の和は16になるので、14にするため、④と同様にすると...

$$-\frac{1}{12} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot \text{③を加える}$$

- ⑥n=6のときも同様にすると、

$$\frac{17}{120} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdot \text{④を加える。}$$

よって①~④の項を足し整理をすると

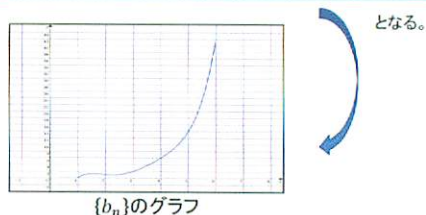
$$b_n = \frac{17n^5 - 265n^4 + 1605n^3 - 4535n^2 + 5938n - 2760}{120}$$

という一般項 b_n が得られた。

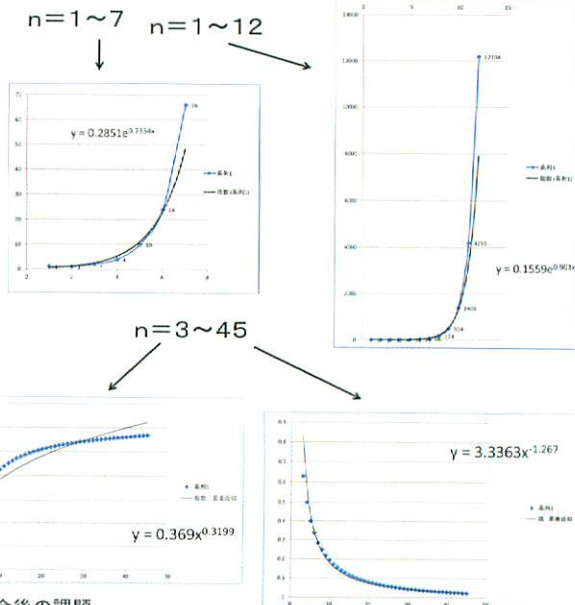
よって、切手が1~7枚のとき、

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{17n^5 - 265n^4 + 1605n^3 - 4535n^2 + 5938n - 2760}{120}$$



<参考> 切手の枚数と折り方の総数の関係(指数と累乗)



5. 今後の課題

今回作った式は、多項式で考えたのでかなり複雑になりこの問題を考えるにあたって実用性が低くなってしまった。
さらに、指数関数・対数関数や累乗との関連性が強そうなので、それについてももっと詳しく調べていきたい。
今後は、今回作った式のひとつひとつをグラフにして調べるなどして、よりシンプルかつ扱いやすい式を作れるようにしていきたい。

6. 参考文献

- ・「人に話したくなる数学おもしろ定理」 著:関根章道/技術評論社,平成18年出版
- ・「Focus Gold 数II+B 改訂版」 新興出版社啓林館,出版

立体の最短経路とパスカルの三角形

大手前高校2年 小田 薫・村田 篤哉・八里 公也・森下 拓也・東谷 健太・吉野 聖人

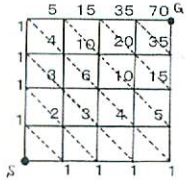
概要

立体の最短経路について考え、それとパスカルの三角形がどのように関係しているのか調べた。

調べたことまとめ

- (I) 立体とパスカルの三角形の関係について考えた
- (II) $\frac{(l+m+n)!}{l!m!n!}$ と $\frac{n!}{p!q!r!}$ ($p+q+r=n$) について考えた

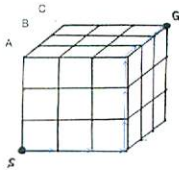
(I) まず始めに、パスカルの三角形と平面上の最短経路の関係調べた



左図の平面でSからGへの最短経路は70通りと確認できる

左図で斜めの線に沿った数の列はそれぞれ二項係数 nCr ($0 \leq r \leq n$) の $n=1, 2, \dots, 8$ の一部であり、パスカルの三角形の数の配列の一部になっている。

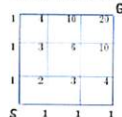
では立体の場合、パスカルの三角形はどのように関係しているのか?



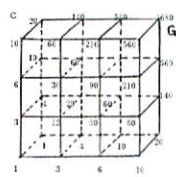
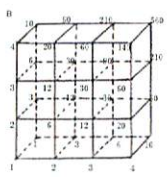
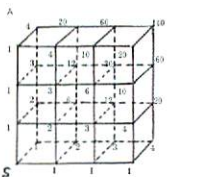
縦3 横3 高さ3 の立体で考える。

平面の場合と比較して考えると立体の最短経路は左下手前の3数を足し合わせていった数となる。

また点Sを含む面はいずれも

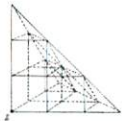


の(パスカルの三角形を含む)形である。



A,B,Cの3つのブロックに分けると、SからGへの経路の道順は上の通りである。(いかにもパスカルの三角形に関係ありそうな数の配置である。)

では、この立体を模型のように点Sを含む面(パスカルの三角形を含む面)を対角線に沿って切開した立体の一部分(三角錐)で考える。

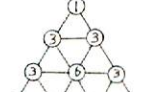
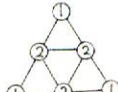


この立方体の一部分と道順を組み合わせると、右図のようになる。



この図は「立体的なパスカルの三角形」と考えることができる。

- 性質 ● 側面は平面的なパスカルの三角形
- 断面図は下図となる



● 平面的なパスカルの三角形では、
「ある数はその一つ上の行の隣接する左右の数の和」で求めたが、

立体的なパスカルの三角形では、
※「ある数は一つ上の行の隣接する3つの数の和」で求めることができる。

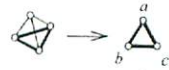
※これは立体の最短経路で「左、下、手前の3数を足し合わせる」ことを違う見方で考えたものである。

● 平面的なパスカルの三角形の場合、2項 $(a+b)^n$ の各項の係数を並べたものだったが、この立体の場合は以下のように、

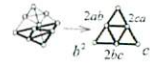
3項 $(a+b+c)^n$ の各項の係数を並べたものになっている。

<(a+b+c)^n の展開>

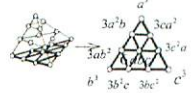
$n=1$ のとき $(a+b+c) = a+b+c$



$n=2$ のとき $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2ab+2bc+2ca$



$n=3$ のとき $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2 + 6abc$



次元が1つ上がる(平面→立体)と、項数が1つ増えた $(a+b)^n \rightarrow (a+b+c)^n$ 。

(II) (I) で調べたように、立体の最短経路の道順は $(a+b+c)^n$ を展開した各項の係数をならべたものであることが分かった。

1年の数Aで次のことを学んだ。

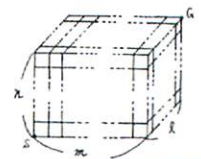
$$(a+b+c)^n \text{ の展開について } a^p b^q c^r \text{ の係数は } \frac{n!}{p!q!r!} (p+q+r=n)$$

また、立体の最短経路について一般的に考えると

1辺の長さが1の立方体を右図のように

縦にl個、横にm個、高さにn個

積み重ねたとき、SからGへの最短経路は $\frac{(l+m+n)!}{l!m!n!}$ 通り存在する。

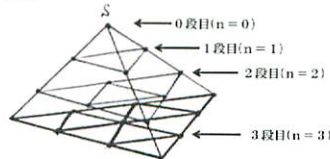


この2つ $\frac{n!}{p!q!r!} (p+q+r=n) \dots \textcircled{1}$

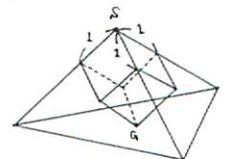
$\frac{(l+m+n)!}{l!m!n!} \dots \textcircled{2}$ が似ていることに気付いた。

このことを次のように考えた

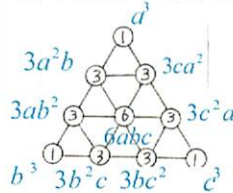
図①



図②



図①は(1)の縦、横、高さ3の立方体からできた立体的なパスカルの三角形で、点Sを0段目とし、3段目の底面は下の図のようになる。



これは、 $(a+b+c)^n$ で $n=3$ のとき展開した係数を並べたもので中心の6は項abcの係数となる。

即ち、 $p=1, q=1, r=1$ で

$$\frac{n!}{p!q!r!} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$$

と表すことができる。

また図②は、図①と同様に立方体の一部である。

図②のように、この立体は縦1、横1、高さ1の立方体を内部に含んでいる。

このとき点Gは3段目の底面の中心6と一致する。

$l=1, m=1, n=1$ でSからGへの最短経路は、

$$\frac{(l+m+n)!}{l!m!n!} = \frac{(1+1+1)!}{1!1!1!} = 6 \text{ (通り) と計算することができる。}$$

以上より

$$\frac{n!}{p!q!r!} (p+q+r=n) \text{ と } \frac{(l+m+n)!}{l!m!n!} \text{ は同じことをしているということがわかった。}$$

今後の課題

今回は、パスカルの三角形を立体的に考えたが、次は $(a+b)^n$ で n がマイナスのときにどうなるか調べたい。

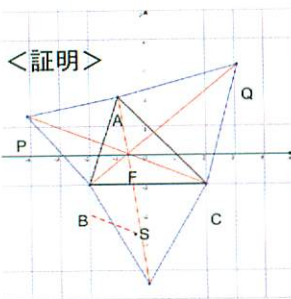
フェルマー点

大阪府立大手前高等学校 2年4組G班

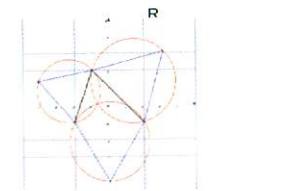
峰元 良太・鹿野 真史・山本 裕也・砂辺 泰山・鈴木 陽久・古橋 直也

<概要>

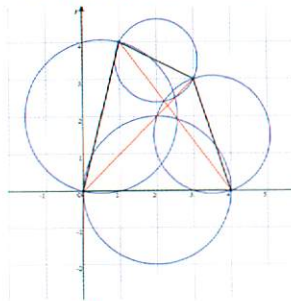
- フェルマー点の定義は、
 1. 三角形の各頂点からの距離の合計が最短になる点。
 2. $\triangle ABC$ 内の点 F のうち $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$ となる点(等角中心)である。
 私たちはフェルマー点を多角形に応用できないかどうか調べた。



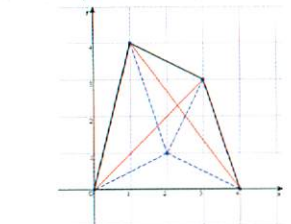
☆上記の2.を満たす点Fは1.を満たすことを証明する。
 FR上にBF=BSとなる点SをFR上にとる。
 $\angle BFS = 60^\circ$ より、 $\triangle BFS$ は正三角形
 $\therefore BF = FS$
 $\triangle BFC$ と $\triangle BSR$ において
 $BC = BR, BF = BS$ (正三角形の性質)
 $\angle FBC = 60^\circ - \angle SBC$
 $\angle SBR = 60^\circ - \angle SBC$
 よって、 $\angle FBC = \angle SBR$
 二辺夾角相等で、 $\triangle BFC \cong \triangle BSR$
 $\therefore CF = SR$
 以上より、 $AF + BF + CF = AF + FS + SR$
 ここで、 $AF + FS + SR \geq AR$
 (等号成立はA, F, S, Rが一直線上にあるとき)
 $\angle AFS = 60^\circ \times 3 = 180^\circ$ より
 A, F, S, Rが一直線上にある。
 $\therefore AF + BF + CF = AR$
 よって、 $AF + BF + CF$ は最短!!



<四角形のフェルマー点>



三角形の場合は、 $360/3 = 120^\circ$ より、
 四角形の場合は $360/4 = 90^\circ$ だと考え、
 実際に 90° を作ってみる。
 ⇨各辺を直径とする円の交点を結べばよい!!
 グラフ作成ソフトで適当な四角形を作り、
 その円を描いてみた。
 円の交点を結んでいくと、対角線に一致することが分かった。



四角形の内部に適当に点を取り、その点から四角形の各頂点を結ぶ。
 上記の三角形のときと同様に、一直線上に並べば最短である。
 その直線は四角形の対角線である。

以上2つより、フェルマー点是对角線の交点ではないか!?

平面ベクトルを用いた証明

証明にあたって、東北大学の過去の入試問題を参考にしました。
 上記の問題では三角形について扱っていましたが、当証明ではそれを四角形に応用しました。

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{x}$ を任意の平面ベクトル とするとき、
 $|\vec{a} - \vec{x}| \geq |\vec{a}| - |\vec{x}|$ であることを示す。
 一般に、平面上のベクトル \vec{X}, \vec{Y} に対して、
 $|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \cos \theta$ (θ は \vec{X} と \vec{Y} のなす角) が成り立ち、 $|\cos \theta| \leq 1$ だから、
 $|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \geq |\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cos \theta$ が成り立つ。
 等号は、 \vec{X}, \vec{Y} が平行であるときに成り立つことも分かる。
 この事実を用いると、

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} |\vec{a} - \vec{x}| \geq \left| \vec{a} - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right|$$

 が成り立つ。
 よって、 $|\vec{a} - \vec{x}| \geq |\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ が成り立つ。

四角形の内部の点 X から各頂点までの距離の和 $|X\vec{A}| + |X\vec{B}| + |X\vec{C}| + |X\vec{D}|$ が最少になるような X を求める。

A, B, C, D の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする。
 先に示した不等式より

$$|X\vec{A}| = |\vec{a} - \vec{x}| \geq |\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$|X\vec{B}| = |\vec{b} - \vec{x}| \geq |\vec{b}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$|X\vec{C}| = |\vec{c} - \vec{x}| \geq |\vec{c}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$$|X\vec{D}| = |\vec{d} - \vec{x}| \geq |\vec{d}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$$

これらの辺を加えて

$$|X\vec{A}| + |X\vec{B}| + |X\vec{C}| + |X\vec{D}| \geq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| - \vec{x} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} + \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \right)$$

$\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} + \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \vec{0}$ を満たすとき、

四つベクトルの角のをそれぞれ求める。

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}_1, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{e}_2, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \vec{e}_3, \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \vec{e}_4$ とすると $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = |\vec{e}_4| = 1$ である。

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \theta_1, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos \theta_2, \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 = \cos \theta_3, \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_1 = \cos \theta_4$$

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0} \dots \textcircled{1}$$

①と、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ をそれぞれ掛け合わせて、

$$1 + \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_4 = 0$$

$$\cos \theta_2 + 1 + \cos \theta_2 + \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_3 + 1 + \cos \theta_3 = 0$$

$$\cos \theta_4 + \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos \theta_3 + 1 = 0$$

これらの両辺を足して、

$$4 + 2(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_4) + 2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3)\} = 0$$

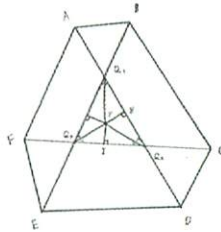
これを計算すると、 $\cos \theta_1 = \cos \theta_3, \cos \theta_2 = \cos \theta_4$

$$\therefore \theta_1 = \theta_3, \theta_2 = \theta_4$$

よってこのとき四つのベクトルの始点是对角線の交点と一致する。

六角形のフェルマー点

六角形 $ABCDEF$ でAとD、BとE、CとFを結ぶ
 点 P_1 がAD上にあるとき $AP_1 + P_1D$ は最小となる。
 同様に、点 P_2 がBE上にあるとき $B_2P_2 + P_2E$ は最小となる。
 点 P_3 がCF上にあるとき $C_3P_3 + P_3F$ は最小となる。



このことより、私たちは、
 AD、BE、CFからの距離の総和が最短になる点が
 六角形 $ABCDEF$ のフェルマー点ではないかと考えた。

ADとBEの交点を Q_1 、

BEとCFの交点を Q_2 、

CFとADの交点を Q_3 とする。

AD、BE、CFからの距離の総和が最短になるのは、
 Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_1 からの距離が最短になればよい。

まず、 Q_1Q_2 と Q_2Q_3 において、2辺からの距離が最短になるのは、
 $\angle Q_1Q_2Q_3$ の二等分線をとると、

その直線上の一点であることが分かる。

$\angle Q_1Q_2Q_3$ の二等分線上に任意の点 P をとり、

$\angle PHQ_2 = \angle PIQ_3 = 90^\circ$ となるように H, I を定める。

$\triangle PQ_2H$ と $\triangle PIQ_3$ において、 $\angle PQ_2H = \angle PIQ_3$ (二等分線) $\therefore \textcircled{1}$

$\angle PHQ_2 = \angle PIQ_3$ (条件より) $\therefore \textcircled{2}$

$PQ_2 = PQ_3$ (\therefore 共通) $\therefore \textcircled{3}$

①、②、③より $\triangle PQ_2H \cong \triangle PIQ_3$ で、 $PH = PI$ だから
 角の二等分線は Q_1Q_2 と Q_2Q_3 からの距離が最短となる点の集合である。①

同様に、 $\angle Q_2Q_3Q_1, \angle Q_3Q_1Q_2$ においても角の二等分線をとると、

この3つの直線は1点で交わる。

この点は $Q_1Q_2Q_3$ の内接円の中心である。

よって、六角形 $ABCDEF$ のフェルマー点は $Q_1Q_2Q_3$ の内接円の中心であると予想できる。

課題

六角形のきちんとした証明を行いたい。
 また、今回は六角形までだったが機会があればn角形についての証明も行いたい。
 まったく立体について触れていないので、次は考えてみたい。

空間充填立体

大阪府立大手前高校
2年6組E班 家田涼平 鹿嶽社一 澤田直人 山本憲弘 市田貴大

1、動機

私たちは、これまでの「数学レポート」で、平面充填できる図形を比べ、どの図形が最も短い辺の長さで、大きな面積が得られるかを考えてきた。これを空間充填立体にも拡張して考えた。

2、概要

三つの空間充填立体について、同じ表面積の時の体積の比較を行う。
【空間充填】・・・空間内を図形で隙間なく埋め尽くす操作

取り上げる立体

・ $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体・・・辺の比が $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ の三角形四つでできる立体
・ 角切り四面体・・・正八面体の頂点を切り落とした正方形六面正六面体八面で構成される立体

立方体

三つの立体について最も少ない表面積で最も体積の大きいものを調べる。

$2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体と立方体

まず $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体を考える。

1つの面の面積を求める。

$2a$ の辺を底辺とすると高さは $(\sqrt{3}a)^2 - a^2 = \sqrt{2}a$

よって面積は $\frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$

$2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体の表面積を S_1 として

$$S_1 = 4\sqrt{2}a^2$$

$2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体の体積を V_1 とする。

$\triangle AED$ は辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ より直角二等辺三角形
よって $\triangle BCD$ を底面としたとき高さは AE となるから

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \sqrt{2}a^2 \times \sqrt{2}a = \frac{2}{3}a^3$$

次に表面積を $4\sqrt{2}a^2$ に統一した立方体を考える。

1つの面の面積は $4\sqrt{2}a^2 \times \frac{1}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$

立方体の体積を V_2 とする。 $V_2 = \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2}\right)^3 = \sqrt{\frac{16\sqrt{2}}{27}}a^3$

以上より $V_1 = \frac{2}{3}a^3$ $V_2 = \sqrt{\frac{16\sqrt{2}}{27}}a^3$

a は正の整数より V_1 と V_2 の大小比較には a^3 の係数の $\frac{2}{3}$ と $\sqrt{\frac{16\sqrt{2}}{27}}$ を比較すればよい。

$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{27}} \quad \text{よって} \quad \frac{2}{3} < \sqrt{\frac{16\sqrt{2}}{27}} \quad \therefore V_1 < V_2$$

立方体と角切り八面体

次に立方体と角切り八面体について比較する。

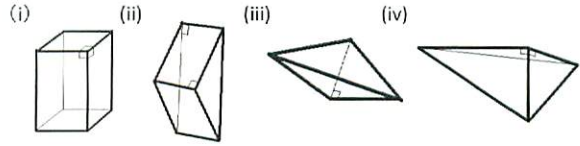
右図のような角切り八面体を考える。
一辺を a とする。(a は正の実数)

一辺 a の正六角形が8個、正方形が6個あるので、

$$\text{表面積は} \quad 8 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6 \times a^2 = 12\sqrt{3}a^2 + 6a^2$$

次にこの体積を V_3 として V_3 を求める。

V_3 を求めるとき、いくつかの部分に分ける。

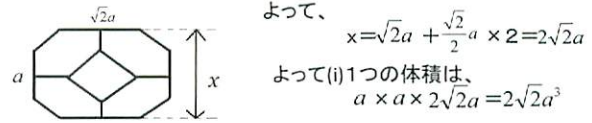


(i)について高さは、八面体を横から見た下図の x の長さである。

角切り八面体は以上の四つの部分で構成される。

$$(i) \times 1 + (ii) \times 4 + (iii) \times 8 + (iv) \times 8$$

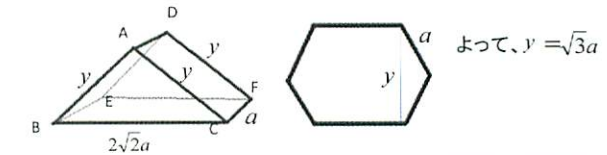
(i)について高さは、八面体を横から見た下図の x の長さである。



よって、 $x = \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a \times 2 = 2\sqrt{2}a$

よって (i)1つの体積は、 $a \times a \times 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}a^3$

(ii)について、左上図の y は、表面の六角形では左下図の長さである。



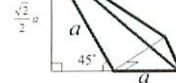
ここで、 $\triangle ABC$ の底辺を BC としたとき、高さは、 $\sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = a$
よって、(ii)1つの体積は、 $\triangle ABC$ を底面として、

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a \times a \times a = \sqrt{2}a^3$$

(iii)について

高さは $\frac{\sqrt{2}}{2}a$
底面は直角二等辺三角形

よって、(iii)1つの体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$



(IV)について $z = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = a$

よって、(IV)1つの体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times a \times 2\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

以上より $V_3 = 2\sqrt{2}a^3 + \sqrt{2}a^3 \times 4 + \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \times 8 + \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \times 8 = \frac{28\sqrt{2}}{3}a^3$

次に表面積を $12\sqrt{3}a^2 + 6a^2$ に統一した立方体を考える

1つの面の面積は $(12\sqrt{3}a^2 + 6a^2) \times \frac{1}{6} = 2\sqrt{3}a^2 + a^2$

よって一辺は $\sqrt{2\sqrt{3}a^2 + a^2} = \sqrt{2\sqrt{3} + 1}a$

立方体の体積を V_4 とする。 $V_4 = \left(\sqrt{2\sqrt{3} + 1}a\right)^3 = \sqrt{37 + 30\sqrt{3}}a^3$

以上より $V_3 = \frac{28\sqrt{2}}{3}a^3$ $V_4 = \sqrt{37 + 30\sqrt{3}}a^3$

a^3 の係数を比較する。 $\frac{28\sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{1568}{3}}$

ここで $522 < \frac{1568}{3} < 523$ また $1 < \sqrt{3} < 2$ より $67 < 37 + 30\sqrt{3} < 97$

よって $\frac{28\sqrt{2}}{3} > 37 + 30\sqrt{3}$ より $V_3 > V_4$

よって同表面積では体積は角切り八面体 > 立方体 > $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ 四面体の順になる。よって表面積の観点で見ると、角切り八面体が三立体の中では最も効率よく空間充填できる。

今研究の利用・今後の課題

- ・空間充填立体の条件を求めること
- ・角切り八面体よりもさらに小さい表面積でより大きな体積を取れる立体を探す

多角数の拡張

大阪府立大手前高校 2-6 G班

辻部 壮真

湯浅 貴道

上野 航平

山城 学

山川 侑太

1. 概要

私たちは多角数に興味を持ち研究してみることにした。
多角数とは下の図のように正多角形の形に点を並べたときにそこに含まれる点の総数にあたる自然数である。



2. 三角数、四角数の一般項

$$\{a_n\}: 1 \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad 10 \quad \dots$$

$$\{b_n\}: 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$$

階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $b_n = n + 1$ より、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

これは $n=1$ のときも成り立つ 以下同様

四角数
同様に考えると、 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) = n^2$

3. p角数の一般項

次にp角数の一般項について考えてみた。

図の六角数の例からもわかるように、n番目の項からn+1番目の項になるときの点の数が(n+1)個の辺が(p-2)本増え(p-3)個の重複があるので、

p角数の階差数列を $\{b_n\}$ とすると
 $b_n = (p-2)(n+1) - (p-3) = (p-2)n + 1$
よって、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{(p-2)k + 1\} = \frac{1}{2}\{(p-2)n^2 - (p-4)n\}$$

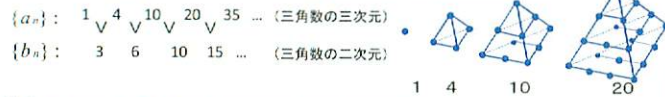
4. 多角数の三次元への拡張

次に多角数の三次元について考えてみた。

多角数の三次元とは、正多角錐の形に点を並べたときに、そこに含まれる点の総数である。
ここで、p角数r次元の一般項を $a_{p,r,n}$ と表すことにする。

(1) 三角数の三次元の一般項

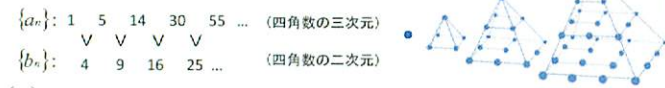
下の図は三角数を三次元に拡張したものである。
これは三角錐数と呼ばれる数であるが、ここでは「三角数の三次元」と呼ぶ。



$\{b_n\}$ は二次元の三角数の第二項を初項とする数列なので、

$$a_{3,3,n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

(2) 四角数の三次元の一般項(四角錐数の一般項)



$\{b_n\}$ は二次元の四角数の第二項を初項とする数列なので、

$$a_{3,4,n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

5. p角数のn次元の一般項(p角錐数の一般項)

p角数三次元の階差数列はp角数二次元の第二項を初項とする数列なので、

p角数の三次元 $a_{p,3,n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\{(p-2)k^2 - (p-4)k\} = \frac{1}{6}\{(p-2)n^3 + 3n^2 - (p-5)n\}$

同様にして、p角数の四次元を求めるときは三次元の数列を階差数列とし、

p角数の四次元 $a_{p,4,n} = \frac{1}{24}\{(p-2)n^4 + 2pn^3 - (p-14)n^2 - 2(p-6)n\}$

p角数の五次元 $a_{p,5,n} = \frac{1}{120}\{(p-2)n^5 + 5(p-1)n^4 + 5(p+4)n^3 - 5(p-13)n^2 - 6(p-7)n\}$

p角数の六次元 $a_{p,6,n} = \frac{1}{720}\{(p-2)n^6 + 3(3p-4)n^5 + 5(5p+2)n^4 + 15(p+12)n^3 - 2(13p-176)n^2 - 24(p-8)n\}$

これをもとにr次元の一般項を推定したところ、

$$a_{p,r,n} = \frac{1}{r!} \left[(p-2)n^r + \frac{(p-2)(r-1)^2 - (p-4)(r-1)}{2} n^{r-1} + \dots \right]$$

となった。しかし、一部分しか求めることができなかった。

6. パスカルの三角形の利用

(1) 三角数とパスカルの三角形

パスカルの三角形の中に三角数の列が含まれていることを知り、多角数の拡張にパスカルの三角形が利用できないかと考えた。
右図は、パスカルの三角形である。
二次元の数列に注目し、その階差数列を考えると、先ほど求めた数列に等しいことがわかる。

三角数二次元の一般項は、 $a_{3,2,n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
三角数三次元の一般項は、同様に、 $a_{3,3,n} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$

右図は、パスカルの三角形をCの記号を使って表したものである。これを用いて、二次元の一般項をCを使って表すと、 $a_{3,2,n} = n+1C_2$

三次元の一般項をCを使って表すと、 $a_{3,3,n} = n+2C_3$
以上のことより、三角数の次元の一般項をCを使って表すと、 $a_{3,r,n} = n+r-1C_r$

(2) 四角数のr次元の一般項

左図は、四角数をパスカルの三角形の形になるように並べたものである。

左下の図の赤三角形の調整項の部分に注目すると、パスカルの三角形と等しくなる。

二次元のCの項は、 $n+1C_2$ となる。

また、青三角形の二項目は赤三角形の初項となるから調整項は $n \geq 2$ の時、 nC_2 となる。よって、二次元の一般項は

$$\begin{cases} a_{4,r,n} = 1 & (n=1) \\ a_{4,r,n} = n+1C_2 + nC_2 & (n \geq 2) \end{cases}$$

同様に、三次元は、
 $a_{4,3,n} = n+2C_3 + n+1C_3 \quad (n \geq 2)$
これらより、四角数r次元の一般項は

$$\begin{cases} a_{4,r,n} = 1 & (n=1) \\ a_{4,r,n} = n+r-1C_r + n+r-2C_r & (n \geq 2) \end{cases}$$

(3) 五角数のr次元の一般項

続いて、五角数について考える。
赤三角形の調整項に注目すると、

四角数と比べて、2倍になることが分かる。Cの項は、四角数と変わらないので、

五角数r次元の一般項は
 $\begin{cases} a_{5,r,n} = n+r-1C_r + 2 \cdot n+r-2C_r & (n \geq 2) \end{cases}$

7. p角数のr次元の一般項

左図は、p角数の一般項を、パスカルの三角形の形に表したものである。
左下の図は、p角数の一般項を、Cを使って表したものである。

p角数の階差数列の公差はp-2より、公差の調整項は(p-3)となる。

パスカルの三角形の性質を維持しているので調整項はパスカルの三角形を(p-3)倍した並びに等しく、

Cの項は前述と変わらないので次のようになる。

p角数r次元の一般項は、

$$\begin{cases} n=1 \text{ の時} & a_{p,r,n} = 1 \\ n \geq 2 \text{ の時} & a_{p,r,n} = n+r-1C_r + (p-3) \cdot n+r-2C_r \\ & = nH_r + (p-3) \cdot n-1H_r \end{cases}$$

これを計算すると、以下のことが分かった。

$$\begin{cases} r \text{ 次元において、} & n^r \text{ の係数は } \frac{1}{r!} \times (p-2) \\ & n^{r-1} \text{ の係数は } \frac{r-p+2}{r(r-1)} \end{cases}$$

8. 今後の課題

- ・高次元の点の配置を可視的にあらわすこと。
- ・ $a_{p,r,n}$ をHの式で表わせたことから、重複組合せとの関連性を調べること。

散歩で見つけた平面充填

大手前高校
2年8組A班

在田愛菜 城谷郁美 瀬戸小百合
二口陽香 松本詩織 山本桃子

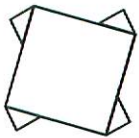
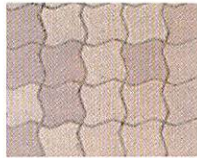
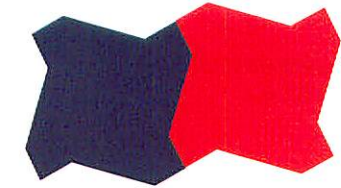
1.概要

ふと道を見下ろすと道路が1種類の同じ形のレンガで敷き詰められていることに気付いた。また、そのようなレンガを敷き詰めて舗装された道路はいたるところにあり、道によってさまざまな形のレンガが使われていることがわかった。実際に道路に使われているタイルの2種類についてどのような仕組みで敷き詰められているのか、また、その理由をみんなで考えた。

なお、平面充填とは二次元において一つの平面を一種類または複数種類の平面図形で隙間なく敷き詰めることである。

2.確認

(I) まずは下の図形から見ていく。

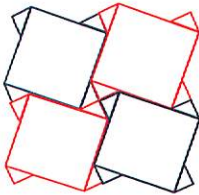


一つの図形を取り出す。
向かい合う辺の長さはそれぞれすべて等しい。

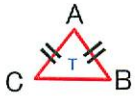
各辺を内側に延長する。

→真ん中に大きな正方形と周りに三角形が4つできる。
(この三角形をひとつ取り出し、Tとする)

この図だけでは分かりにくいので、元の敷き詰められた図で見てみる。



元の図形は全て合同なのでひとつの三角形の頂点をそれぞれA,B,Cとすると、三角形TはAB=ACの二等辺三角形である。このTと同じ三角形が4つ集まって、小さな四角形ができている。

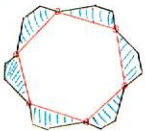


この四角形の一辺は全て三角形Tの斜辺であるので、この四角形の4辺は等しい長さ。また、上図から2本の対角線もそれぞれ長さが等しいので、この四角形は正方形と言える。

よって(I)のタイルは大きな正方形と三角形4つが集まった小さな正方形での平面充填であることがわかった。

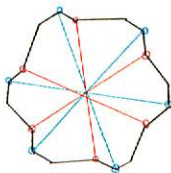
(II) 次に下の図形について見ていく。

この図形には6つの突起があり、それぞれの内側の点を結ぶと六角形が現れる。対応する各辺の長さはそれぞれ等しいのでこの六角形は正六角形である。



しかし、この図形を正六角形と何らかの図形の組み合わせたとみると突起部分の説明ができない。

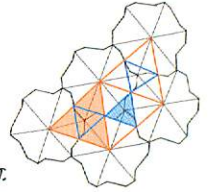
そこで、この図形の向かい合う頂点どうしを結んでみると全ての線分が一点で交わった。



したがってこの図形は点対称であることがわかる。このことを使って考えていく。

①それぞれの図形の点対称の中心を結ぶ。すると大きな三角形SができるのでこれをSとする。

②次にこの図形の辺とSの辺が交わる点を結ぶ。すると小さな三角形TができるのでこれをTとする。

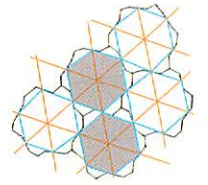


③ここで、対称の中心から、二つの対応する中心までの距離は等しいので、大きな三角形Sは正三角形。

小さな三角形Tのそれぞれの頂点はSの辺の中点なので中点連結定理よりTも正三角形。

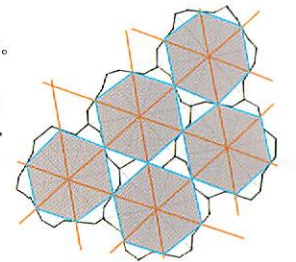
④正三角形S,Tのそれぞれの辺を延長してS,Tを作っていくと図の影の部分のような六角形ができ、

これはすべて正三角形Tの一辺であるので正六角形である。



⑤続いて大きな正六角形に影をつけていくと、あいたに正三角形Tがあるのがわかる。

したがってこれは正六角形と正三角形の敷き詰めに組み合わせたものだけといえる。



正三角形Tはそれぞれのタイルの突起部分が組み合わさってできている。このことにより、

- ㊤通常の正六角形の充填より辺や角の数が多くなっている。
- ㊦一つの図形が他の図形と触れ合うところが多くなっている。

3.理由

・デザイン性

㊤より

- ・レンガとレンガの間に雨水が入って水はけがよくなる
- ・レンガの凸部分がかみ合うので道路の隆起などでずれにくい
- ・月日の経過により角が削れてもできる隙間が少ない

㊦より

- ・点ではなく辺と辺が接するので横方向からの力が分散される

4.今後の課題

今回は道路のタイルの平面充填の仕組みを理解し、その利点を考えたので、それを活かして実用化できるような新しいタイルを作りたいと思う。

四次元におけるパスカル三角形

大阪府立大手前高等学校 田村康貴 中鉢大介 辻啓人
2年8組 G班 南上和也 穂本幸助 山本将也

1. 概要

私たちは授業で聞いたパスカルの三角形に興味を持ち、パスカルの三角形が三次元に拡張できることを知った。そこで四次元ではどのようにして表すことができるのかを考えてみた。

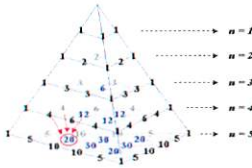
2. 調べたこと

①基本となるパスカルの三角形

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & 1 & & 1 \\
 1 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a+b)^0 = a^0 + b^0 \\
 (a+b)^1 = a^1 + 2ab + b^1 \\
 (a+b)^2 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^3 = a^3 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a+b)^4 = a^4 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
 \end{array}$$

②三次元への拡張

三次元でパスカルの三角形を表すと次のようになるということを知った。



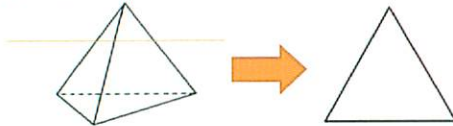
<http://www1.c3-net.ne.jp/kato/pasucal/index.html>

3. 考察

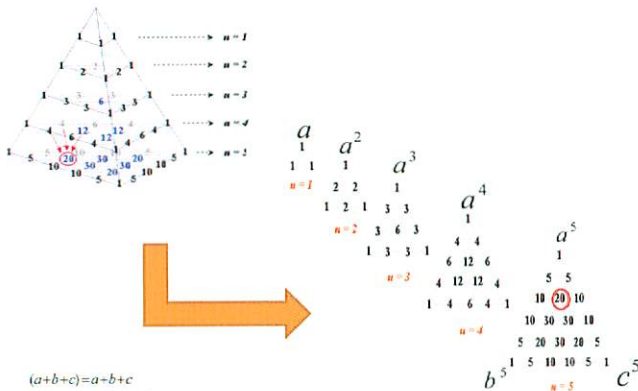
同じように四次元に拡張しようとしたが、四次元を表すのは困難なので断面を考えた。

<断面>

(i) 三次元の断面



図のように三次元である正四面体を底面と平行に切ると断面は二次元（正三角形）である。



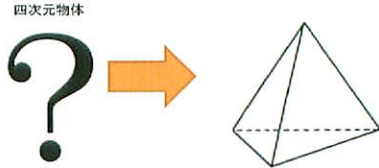
$$\begin{array}{l}
 (a+b+c) = a+b+c \\
 (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
 (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3b^2a + 3a^2c + 3c^2a + 3b^2c + 3c^2b + 6abc \\
 (a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4a^3b + 4b^3a + 4a^3c + 4c^3a + 4b^3c + 4c^3b + 6a^2b^2 + 6b^2a^2 + 6a^2c^2 + 6c^2a^2 + 12a^2bc + 12ab^2c + 12abc^2 \\
 (a+b+c)^5 = a^5 + b^5 + c^5 + 5a^4b + 5b^4a + 5a^4c + 5c^4a + 5b^4c + 5c^4b + 10a^3b^2 + 10b^3a^2 + 10a^3c^2 + 10c^3a^2 + 10a^2b^3 + 10b^2a^3 + 20a^2bc^2 + 20a^2cb^2 + 20a^2c^2b + 20a^2b^2c + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30a^2c^2b
 \end{array}$$

文字の次数は隣り合う数字間の距離を1とすると (最大次数-頂点からの最短距離) } ①

(例) 赤丸の20は $(a+b+c)^5$ の展開式の a^3bc の係数となる。

(ii) 四次元の断面

断面はn-1次元(線の断面は点(一次元→零次元)、面の断面は線(二次元→一次元)・・・)なので四次元の断面は三次元になると予想できる。



四次元のパスカルの三角形の断面は正四面体になると考えられる。まず四項の数式を展開すると、

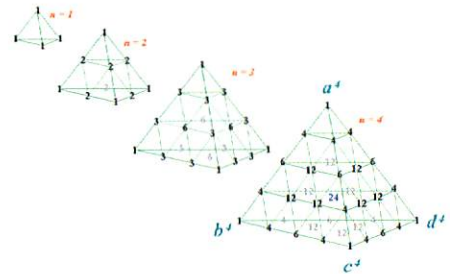
$$(a+b+c+d)^1 = a + b + c + d$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2da + 2ac + 2bd$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3b^2a + 3a^2c + 3c^2a + 3a^2d + 3d^2a + 3b^2c + 3c^2b + 3b^2d + 3d^2b + 3c^2d + 3cd^2 + 3da^2 + 3ac^2 + 3bd^2 + 6abc + 6bcd + 6cda + 6dab$$

$$(a+b+c+d)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4a^3b + 4b^3a + 4a^3c + 4c^3a + 4a^3d + 4d^3a + 4a^3c + 4b^3d + 4d^3b + 4c^3d + 4d^3c + 4bd^3 + 6a^2b^2 + 6b^2a^2 + 6a^2c^2 + 6c^2a^2 + 6a^2d^2 + 6d^2a^2 + 6b^2c^2 + 6c^2b^2 + 12a^2bc + 12ab^2c + 12abc^2 + 12a^2bd + 12abd^2 + 12abd^2 + 12a^2cd + 12acd^2 + 12acd^2 + 12b^2cd + 12bc^2d + 12bcd^2 + 24abcd$$

これを図にしてみると、



上図のように四次元のパスカルの三角形の断面を表すことができた。3の①と同様に頂点に近づくほどその頂点の文字の次数は大きくなる。

4. 課題

今回は四次元を断面で表したが、四次元の断面が三次元になるのはあくまで予想なので違う考え方で四次元のパスカルの三角形を表すことができるようにしたい。また四次元の断面が三次元になることも証明したい。

平成 24 年度 大阪府立大手前高等学校 コアSSH「数学」 マスフェスタ報告書

平成 25 年 (2013 年) 3 月 1 日 初版第 1 刷

発行 大阪府立大手前高等学校 数学科
大阪府大阪市中央区大手前 2-1-11

電話 06(6941)0051

FAX 06(6941)3163

HP <http://otemae-hs.ed.jp/>

本書を無断で複写・複製することを禁ずる