

第5回 マス・フェスタ

〈全国数学生徒研究発表会〉



日時 平成 25 年 8 月 24 日 (土)

場所 エル・おおさか (大阪)

平成25年度 科学人材育成事業
マス・フェスタ（数学生徒研究発表会）企画書

日時 平成25年8月24日（土） 午前9時30分～午後4時00分
場所 エルおおさか エルシアターおよび会議室
（大阪府中央区北浜東3-14）

<午前の部>

9:30 開会式【教頭】

校長挨拶・来賓挨拶・来賓紹介・等

10:10 5会場（エルシアターおよび会議室）での発表

15 発表

①10:15～10:35

②10:35～10:55

③10:55～11:15

④11:15～11:35

⑤11:35～11:55

11:55 昼食休憩・ポスター準備

<午後の部>

13:00 発表

⑥13:00～13:20

⑦13:20～13:40

13:40 ポスターセッション準備

13:50 ポスターセッション

15:10 ポスターセッション終了・全体会場へ移動

15:20 閉会式

全体講評

閉会の挨拶

15:45 終了

発表者記念撮影

●指導助言

満洲 俊樹 先生 大阪大学理学研究科

宇野 勝博 先生 大阪大学全学教育推進機構

森脇 淳 先生 京都大学理学研究科

國府 寛司 先生 京都大学理学研究科

入江幸右衛門 先生 大阪府立大学大学院理学系研究科

中西 康剛 先生 神戸大学大学院理学研究科

河内 明夫 先生 大阪市立大学数学研究所

町頭 義朗 先生 大阪教育大学/教育学部教養学科

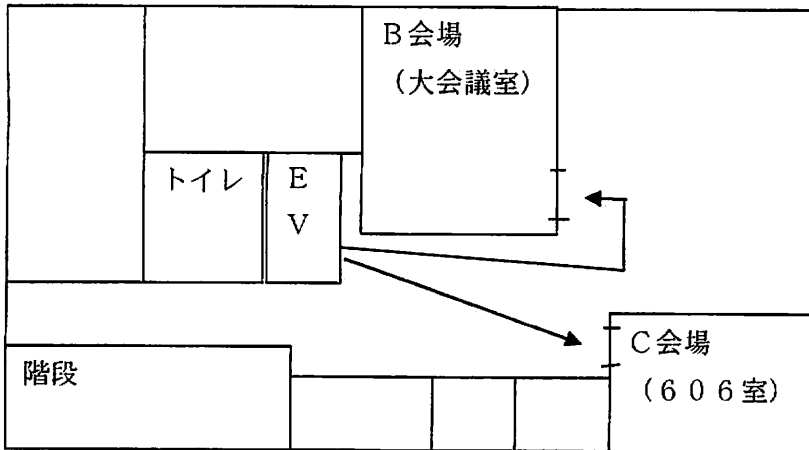
小林 毅 先生 奈良女子大学 理学部

藤田 岳彦 先生 中央大学理工学部

中川 明子 先生 大阪府教育センター

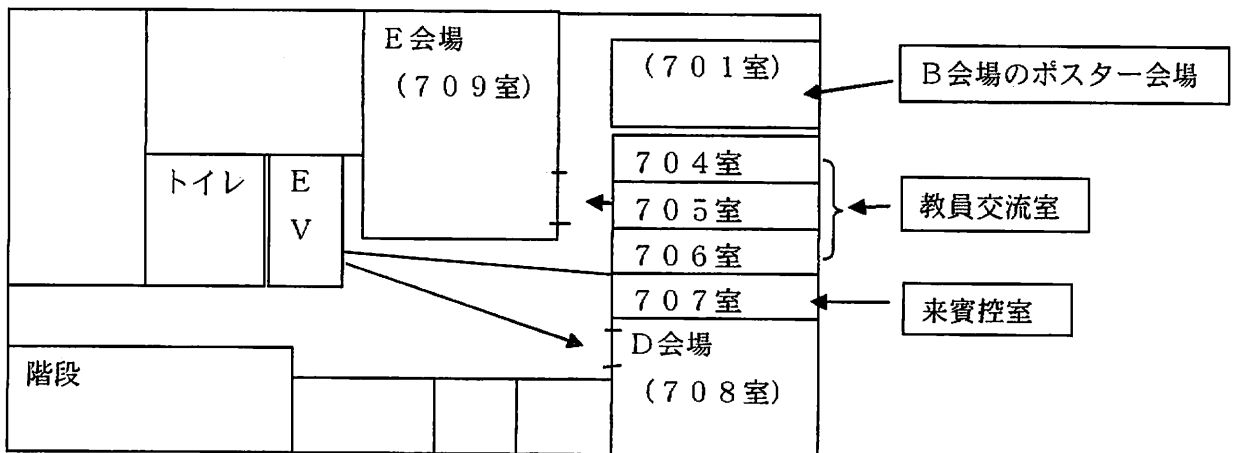
会場図

6F (B・C会場)



- 口頭発表
 - A会場 (2Fホール)
 - B会場 (大会議室6F)
 - C会場 (606室6F)
 - D会場 (708室7F)
 - E会場 (709室7F)
- ポスター発表
 - 各発表会場にて発表。
 - (ただし、B会場は701会場にて)

7F (D・E会場)



口頭発表・ポスターセッション発表会場

	分科会・ ポスター会場	発表順	校名	予定時間
1	A	1	青森県立三本木高校	10:15~
2	A	2	筑波大学附属駒場高校	10:35~
3	A	3	石川県立七尾高等学校	10:55~
4	A	4	愛媛県立松山南高等学校	11:15~
5	A	5	愛知県立豊田西高等学校	11:35~
6	A	6	立命館高等学校	13:00~
7	A	7	大手前高等学校	13:20~
8	B	1	東海大学付属高輪台高等学校	10:15~
9	B	2	広島大学附属高等学校	10:35~
10	B	3	青森県立八戸北高等学校	10:55~
11	B	4	大分県立舞鶴・上野丘・豊府高等学校	11:15~
12	B	5	福井県立藤島高等学校	11:35~
13	B	6	奈良女子大学附属中等教育学校	13:00~
14	B	7	大阪府立天王寺高等学校	13:20~
15	C	1	清真学園高等学校・中学校	10:15~
16	C	2	静岡県立磐田南高等学校	10:35~
17	C	3	香川県立観音寺第一高校	10:55~
18	C	4	名城大学附属高等学校	11:15~
19	C	5	海城高等学校	11:35~
20	C	6	大阪府立千里高校	13:00~
21	C	7	大教大附属高校天王寺校舎	13:20~
22	D	1	日立第一高等学校・附属中学校	10:15~
23	D	2	横浜サイエンスフロンティア高等学校	10:35~
24	D	3	愛知県立岡崎高等学校	10:55~
25	D	4	滋賀県立膳所高等学校	11:15~
26	D	5	高松第一高等学校	11:35~
27	D	6	大阪府立生野高等学校	13:00~
28	D	7	大阪府立大手前高等学校	13:20~
29	E	1	市川学園	10:15~
30	E	2	長野県屋代高等学校	10:35~
31	E	3	徳島県立城南高等学校	10:55~
32	E	4	京都市立堀川高等学校	11:15~
33	E	5	金光学園	11:35~
34	E	6	岡山県立岡山一宮高等学校	13:00~
35	E	7	大阪府立北野高校	13:20~

ポスター発表のみ

36	A		愛知県立明和高等学校
37	A		兵庫県立神戸高等学校
38	A		愛知県立刈谷高等学校

数列と三角関数からのデジタル信号処理への展開

Expansion from sequence and trigonometric function to process of digital signals

國本 悠人 佐々木 悠介 古沢 啓輔 増尾 彩夏

Yuto Kunimoto Yusuke Sasaki Keisuke Hurusawa Ayaka Masuo

抄録

We converted the data with a Fourier series. When we input the data into the formulas made of a Fourier series, the same data was output. Next, we smoothed the data using weighted smoothed. We adjusted A_k and B_k , and searched the images. To get sufficient digital images, only the first several coefficients of Fourier series seems to be needed.

目的

JPEG 画像は、JPEG フォーマットという形式で記述されたテキストファイルである。このテキストファイルから、画像データのみを取り出し、解析することで、写真の特徴を捉えることができるのではないかと考えた。

方法

画像データを抽出し、エクセルで処理・解析を行った。まず、フーリエ級数を用いてデータを変換する。その後、スムージングを行い、データの軽量化を図る。

結果

フーリエ級数を用いることによって、以下の数列にデータを変換することができた。

$$F_n = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} A_k \cos\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} B_k \sin\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)$$

また、この際に計算される $A_k \cdot B_k$ の値の使用数を変えることによって、データ量を減らしつつ画像生成する、スムージングを行った。

考察

スムージング後の画像を比較すると、データ量の増加に伴って、元の画像に近い画像が得られる。よって、画像を認識するために画素数はそれほど必要ないのではないかと考察できる。また、写真の光の強度はほぼ連続な値となる。写真にイレギュラーデータを混ぜると、写真のみでは確認できないため、写真に暗号を混ぜたり、画像を加工したりすることに使えるのではないかと考えた。

結論

JPEG 写真からデータを取り出すには、C 言語などを用いて自分たちでプログラムを作成することが必要である。これができれば写真データに暗号を埋め込むことも可能となる。

参考文献 「<http://siisise.net/jpeg.html>」

キーワード フーリエ級数 スムージング

Expansion From Sequence and Trigonometric Function to Process of Digital Signals

Yuto Kunimoto,
Yusuke Sasaki,
Keisuke Furusawa
and Ayaka Masuo
Sanbongi High School

Introduction



Analyzing this image by using sequence and trigonometric functions

Materials and Methods

We used 65 thousand pixel images.

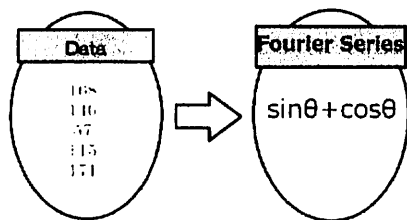
- 1 The format of images.
- 2 Fourier series.
- 3 Smoothing the data.

About JPEG Format

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B	2C	2D	2E	2F
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	3A	3B	3C	3D	3E	3F
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	4A	4B	4C	4D	4E	4F
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	5A	5B	5C	5D	5E	5F
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	6A	6B	6C	6D	6E	6F
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	7A	7B	7C	7D	7E	7F
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	8A	8B	8C	8D	8E	8F
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	9A	9B	9C	9D	9E	9F
A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	AA	AB	AC	AD	AE	AF
B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	BA	BB	BC	BD	BE	BF
C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	CA	CB	CC	CD	CE	CF
D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	DA	DB	DC	DD	DE	DF
E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	EA	EB	EC	ED	EE	EF
F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	FA	FB	FC	FD	FE	FF

Conversion of Image Data by using a Fourier series

A Fourier series puts the data into the sum of sin or cos functions.



Converting of Image Data by using a Fourier series

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) \cos\left(2\pi \frac{ln}{N}\right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \\ l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) \sin\left(2\pi \frac{ln}{N}\right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \\ l = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) \sin\left(2\pi \frac{ln}{N}\right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ l = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{array} \right.$$

Converting of Image Data by using a Fourier series

$$F_n = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} A_k \cos\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} B_k \sin\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)$$

$$A_k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} F_n \cos\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$B_k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} F_n \sin\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)}{\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2\left(2\pi\left(\frac{kn}{N}\right)\right)}$$

RESULTS

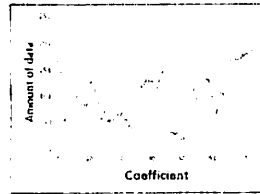


Figure 2: Original data input



Figure 3: Results (output)

Weighted smoothing

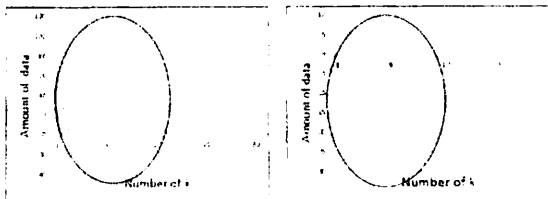


Figure 4: Values of A_k

Figure 5: Values of B_k

Weighted smoothing

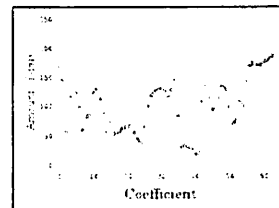


Figure 6: Original data input

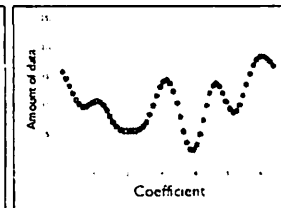
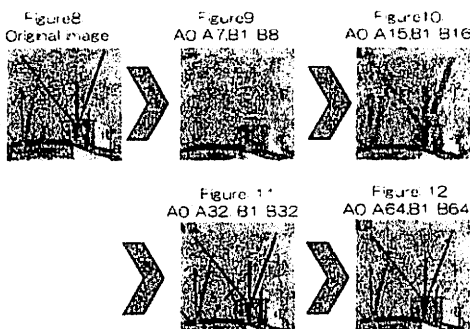


Figure 7: Result data (output)

Weighted smoothing



DISCUSSION Image processing

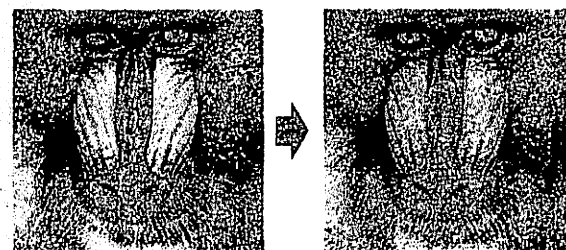


Figure 13: Original data

Figure 14: adjusted data

DISCUSSION
Mixing images
with passwords



Figure15: Original data

Put irregular data
into this red circle

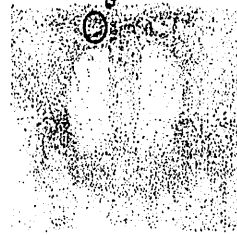


Figure16: Irregular data in

DISCUSSION
Mixing images with passwords

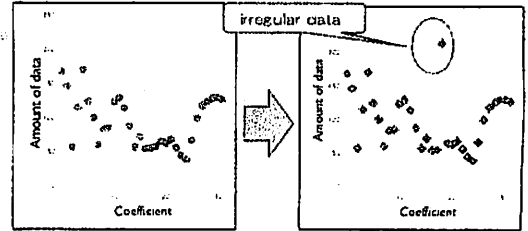


Figure17: before

Figure18: after

Literature Cited

<http://siisise.net/jpeg.html>

ACKNOWLEDGEMENTS

Professor Kazuyuki Tanaka
of the Graduate School of information Sciences,
Tohoku University.

Associate Professor Masashi Imai
of the Departments of Science and Technology,
Hiroaki University.

Mr. Satoshi Fukushima, Mr. Akihiro Hatayama, and
Mr. Peter Weeks of Sanbongi High School.

Thank you very much
for helping with our study.

2424 筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba
SIR モデルの考察
Consideration of SIR-model

平野正徳
Masanori Hirano

Abstract

I researched SIR-model. First, I tested the simulation by Euler's Method. Next, I tested the approximation between SIR-model and Logistic curve. Finally, I researched on how to expect the infection transmission. In the result, I got the result that we can probably expect the infection transmission in the case that the simulation and the approximation is propriety.

1. 目的

感染症の感染者数の広がりをモデル化した SIR モデルは微分方程式となっているため、外形、数値等が非常にわかりづらい。そこでこのモデルを時間 t を変数とする数式で表記しようと考えた

2. 方法

①まず初めに、SIR モデルのシミュレーションをオイラー法で行い、妥当性を確認しようとした。②その後、SIR モデルとロジスティック曲線を近似することの妥当性について調べた。③最終的にロジスティック曲線への近似の仕方を研究した。①②は Microsoft Office 2013 Excel を使用して調べ、③は数式変換で行った。

3. 結果

①②において、妥当性があるかどうかを調べたところ、妥当性があると断言できる数値的評価の方法がなかったため、結論をつけることができなかったが、もしそれに妥当性があるとした場合に③で近似ができそうであることが確認できた。また、それと同時に感染予測ができそうであることまで確認ができた。

4. 考察

まだ、完全に近似できるとは言い切れないが、近似できそうだと考えている。また、感染予測にはまだ改善の余地があるため、引き続き継続研究を行いたい。また、妥当性の評価方法はこの研究の肝であるため、慎重に正しい方法を探したい。

5. 参考文献

モデル化とシミュレーション. 実教出版

6. キーワード

SIR モデル ロジスティック曲線 モデル化 シミュレーション オイラー法

SIRモデルの考察

筑波大学附属駒場高等学校
平野 正徳

この問題について詳しく解説する書籍は、現時点では見当たらない。また、引用する数値はすべて推定値とする。

動機

この教科書を見ている時…
ある感染症のモデル化とシミュレーションの例題があった

教科書の問題

保育園の園児数は50人とし、最初の感染者は1人とする。すべての園児について、感染者と接触する機会が1日に0.5回とする。また、感染者と接触して感染する確率は0.1とし、感染してから回復するまでの期間は平均1週間とする。
この場合のストックは、感染可能者数、感染者数、免疫保持者数で、これらに関係付けるフローは、感染と回復である。
<中略>

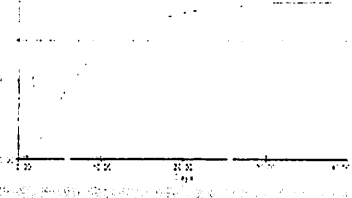
教科書の問題(続き)

感染=感染可能者数×出会い頻度×感染率
回復=感染者数/回復期間
<中略>
シミュレーションのための時間設定は次の通りにする。
時間の単位:日 期間:開始0日 終了40日
時間間隔:0.25 計算方法:ルンゲクッタ法
(対談出版「モデル化とシミュレーション」
p.120,121より抜粋)

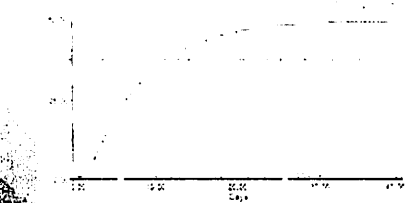
問題をまとめると

感染=0.05×感染可能者数×感染者数
回復=感染者数/7
時間の単位:日 期間:開始0日 終了40日
時間間隔:0.25 計算方法:ルンゲクッタ法

教科書の問題の結果



でも、50人全員が感染するモデルは不自然ではないか…
⇒モデルが適当ではないのか



ということで…

検索してみると、このモデルはSIRモデルというものだとわかった
このモデルについて研究することにした

SIRモデルの導入

SIRモデルの定義

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) &= \gamma I(t) \end{aligned}$$

β : 感染率 γ : 回復率 S : 感受性保持者
 I : 感染者 R : 免疫保持者 t : 時間

SIRモデルの特徴

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{一定}$$

γ 回復率は病気から回復した人と死亡者の率である

SIRモデルと生データ

SIRモデルをオイラー法によりシミュレーションを行う

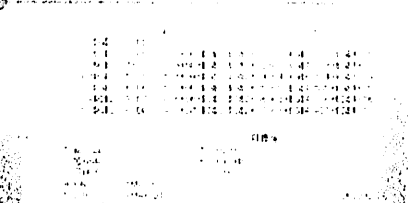
生データは2009年の新型インフルエンザを使用
理由①: 免疫保持者がほとんどいなかった
②: 季節性とは異なる季節に発生したため、
生データがきれいにとられ、
温度による影響も小さい

設定

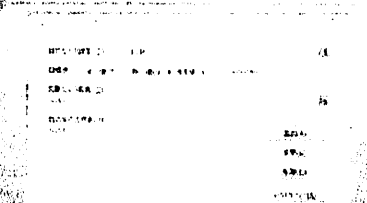
総人口 : 1.27億人
感染者累計 : 2063万人
感染者数ピーク : 259日
スタート時感染者: 3人
計算間隔 : 1日

感染率、回復率を変数とし、その解を求める
(Microsoft Office 2013 Excelを使用(ソルバー機能))

Excelの設定



ソルバーの設定



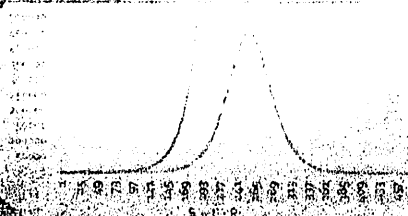
結果

感染率: 0.637692046/127000000

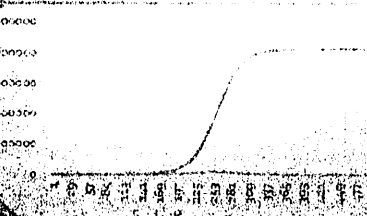
回復率: 0.585

回復率が大いことは様々な要因が考えられる
ex.) 感染するとすぐに隔離される

結果グラフ①



結果グラフ②



SIRモデルとロジスティック曲線

ロジスティック曲線とは

$$\frac{dN}{dt} = r \left(\frac{K-N}{K} \right) N$$

で表される。

もとは生物の個体数の変動の式で、
個体数が増えれば、エサ等が不足し、
個体数の増加が減るというのを再現した式

二者の近似

まず、ロジスティック曲線は下の式で表される

$$N = \frac{K}{1 + a \cdot b^x} \quad (\text{ただし } 0 < b < 1)$$

この式の便利な点

- ① xをn倍してもbの値を変更すればOK!
- ② x軸をmずらしてもaの値を変更すればOK!
- ⇒ xが連続数ならa,bを変えればOK!

近似設定

Microsoft Office 2013 Excelを使用
(ソルバーも含む)

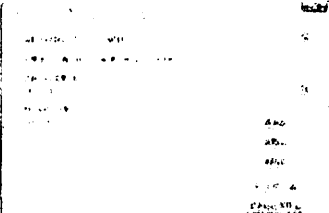
SIRモデルのデータは最初のシミュレーション値を使用

近似方法: 最小二乗法
Rの収束値の9020001になるt=609まで近似。

Excelの設定

セル	数値	セル	数値
A1	1	D1	1
A2	2	D2	2
A3	3	D3	3
A4	4	D4	4
A5	5	D5	5
A6	6	D6	6
A7	7	D7	7
A8	8	D8	8
A9	9	D9	9
A10	10	D10	10
A11	11	D11	11
A12	12	D12	12
A13	13	D13	13
A14	14	D14	14
A15	15	D15	15
A16	16	D16	16
A17	17	D17	17
A18	18	D18	18
A19	19	D19	19
A20	20	D20	20
A21	21	D21	21
A22	22	D22	22
A23	23	D23	23
A24	24	D24	24
A25	25	D25	25
A26	26	D26	26
A27	27	D27	27
A28	28	D28	28
A29	29	D29	29
A30	30	D30	30
A31	31	D31	31
A32	32	D32	32
A33	33	D33	33
A34	34	D34	34
A35	35	D35	35
A36	36	D36	36
A37	37	D37	37
A38	38	D38	38
A39	39	D39	39
A40	40	D40	40
A41	41	D41	41
A42	42	D42	42
A43	43	D43	43
A44	44	D44	44
A45	45	D45	45
A46	46	D46	46
A47	47	D47	47
A48	48	D48	48
A49	49	D49	49
A50	50	D50	50
A51	51	D51	51
A52	52	D52	52
A53	53	D53	53
A54	54	D54	54
A55	55	D55	55
A56	56	D56	56
A57	57	D57	57
A58	58	D58	58
A59	59	D59	59
A60	60	D60	60
A61	61	D61	61
A62	62	D62	62
A63	63	D63	63
A64	64	D64	64
A65	65	D65	65
A66	66	D66	66
A67	67	D67	67
A68	68	D68	68
A69	69	D69	69
A70	70	D70	70
A71	71	D71	71
A72	72	D72	72
A73	73	D73	73
A74	74	D74	74
A75	75	D75	75
A76	76	D76	76
A77	77	D77	77
A78	78	D78	78
A79	79	D79	79
A80	80	D80	80
A81	81	D81	81
A82	82	D82	82
A83	83	D83	83
A84	84	D84	84
A85	85	D85	85
A86	86	D86	86
A87	87	D87	87
A88	88	D88	88
A89	89	D89	89
A90	90	D90	90
A91	91	D91	91
A92	92	D92	92
A93	93	D93	93
A94	94	D94	94
A95	95	D95	95
A96	96	D96	96
A97	97	D97	97
A98	98	D98	98
A99	99	D99	99
A100	100	D100	100

ソルバーの設定



結果

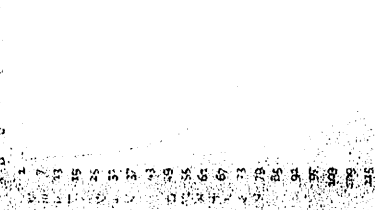
ソルバーで求めた結果
a=711257.1005
b=0.949428384
相関係数:0.999999932

未解決の問題
相関係数という評価は妥当か?

結果のグラフ



結果のグラフ②



SIRモデルをロジスティック曲線で表す

Iのみを変数とする式を得たい

なぜなら
SIRモデルから直接値を得るのは難しい
もつとも弱い部分

これが近似を行うことのメリットではないか...

方法

R(t)を得られればS(t), I(t)は得られる
なぜなら

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

$$S(t) = \text{Total} - I(t) - R(t)$$

だからだ。
数式変換でR(t)を得ることとする
ロジスティック曲線は最大値が必要である

解法

ロジスティックの最も傾きが急になる部分(変曲点)を
調べる

$$\left(\frac{K}{1+a \cdot b^t}\right)'' = 0$$

$$= \left(\frac{K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot (-1) \cdot (1+a \cdot b^t)'\right)''$$

$$= \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot (1+a \cdot e^t \log b)\right)''$$

$$= \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot (a \cdot \log b \cdot b^t)\right)''$$

$$= \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2}\right)' \cdot (a \cdot \log b \cdot b^t) + \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2}\right) \cdot (a \cdot \log b \cdot b^t)'$$

$$= \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^3} \cdot (-2) \cdot (1+a \cdot b^t)'\right) \cdot (1+a \cdot \log b \cdot b^t) + \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2}\right) \cdot (a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t)'$$

$$= \left(\frac{2K}{(1+a \cdot b^t)^3} \cdot (a \cdot \log b \cdot b^t)\right) + \left(\frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot (a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t)'\right)$$

$$= \left(\frac{K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t\right) \cdot \left(\frac{2}{(1+a \cdot b^t)} \cdot a \cdot b^t - 1\right)$$

ここまでまとめると

$$\left(\frac{K}{1+a \cdot b^t}\right)'' = 0$$

これを計算すると

$$\left(\frac{K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t\right) \cdot \left(\frac{2}{(1+a \cdot b^t)} \cdot a \cdot b^t - 1\right) = 0$$

解法 続き

$$\left(\frac{K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t\right) \cdot \left(\frac{2}{(1+a \cdot b^t)} \cdot a \cdot b^t - 1\right) = 0$$

$$\left(\frac{K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot a \cdot (\log b)^2 \cdot b^t\right) \neq 0 \text{ より}$$

$$\left(\frac{2}{(1+a \cdot b^t)} \cdot a \cdot b^t - 1\right) = 0$$

$$\frac{2}{(1+a \cdot b^t)} \cdot a \cdot b^t = 1$$

$$2a \cdot b^t = 1 + a \cdot b^t \quad (\because 1 + a \cdot b^t \neq 0)$$

$$a \cdot b^t = 1$$

$$b^t = \frac{1}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

$$t = \log_b \frac{1}{a} = -\log_b a = -\frac{\log a}{\log b}$$

よって $t = -\frac{\log a}{\log b}$ のとき傾きが最大

この時の値は $\frac{K}{2}$ である。

このことからロジスティックの最大値Kは
R(t)の傾きが最も強い時のR(t)の2倍

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

よりその時はI(t)が最大

その点をt=mとおくと

$$\frac{dI(m)}{dt} = \beta S(m)I(m) - \gamma I(m) = I(m)(\beta S(m) - \gamma) = 0$$

$$S(m) = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$R(m) = T - S(m) - I(m) = T - \frac{\gamma}{\beta} - I(m)$$

$$K = 2T - \frac{2\gamma}{\beta} - 2I(m)$$

ここで

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

を使うと

$$I(t) = \frac{dR(t)}{\gamma} = \frac{-K}{(1+a \cdot b^t)^2} \cdot (a \cdot \log b \cdot b^t)$$

よって

$$I(m) = \frac{-K}{(1+1)^2} \cdot (\log b) = -\frac{K \log b}{4\gamma}$$

元に戻って代入すると

$$K = 2T - \frac{2\gamma}{\beta} + \frac{K \log b}{2\gamma}$$

$$K - \frac{K \log b}{2\gamma} = 2T - \frac{2\gamma}{\beta}$$

$$K \left(1 - \frac{\log b}{2\gamma} \right) = 2T - \frac{2\gamma}{\beta}$$

$$K = \frac{2T - \frac{2\gamma}{\beta}}{1 - \frac{\log b}{2\gamma}}$$

結果

得られたロジスティック曲線の式は以下の通り

$$R(t) = \frac{2T - \frac{2\gamma}{\beta}}{1 - \frac{\log b}{2\gamma}} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot b^t}$$

③ 実用可能性の検討

$$R(t) = \frac{2T - \frac{2\gamma}{\beta}}{1 - \frac{\log b}{2\gamma}} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot b^t}$$

この式にどれくらい有用性があるかを検討

β , γ を与えてその条件下で
最初D日間のR(t)のシミュレーションデータから
最小二乗法でa,bを求める

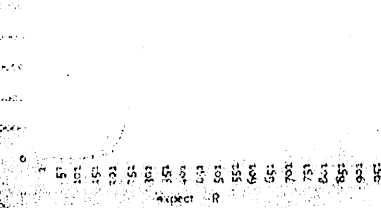
Excelの設定

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

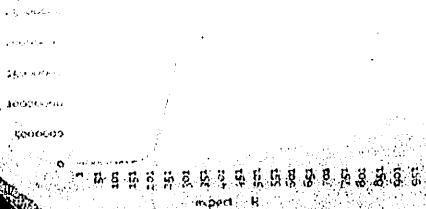
ソルバーの設定

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

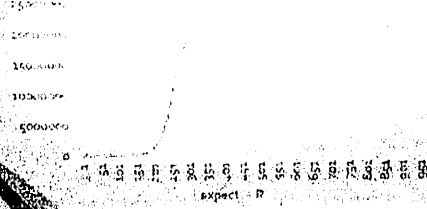
結果のグラフ(D=50)



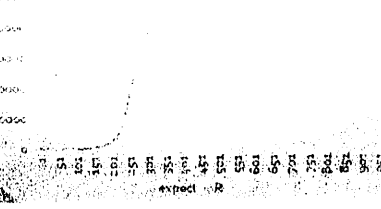
結果のグラフ(D=75)



結果のグラフ(D=100)



結果のグラフ(D=125)



結果のまとめ

D=100~125くらいではほぼ曲線が一致しているように見える

R(100)=5422 R(125)=19740
であり、最終的な累計感染者数が2063万人であることから考えれば
感染者数が0.1%以下で感染者数の推移が予想できるのでは

③ 今後の課題

- ・さらにいろいろなケースで検証
- ・精度の向上
- ・ β , γ の求値の方法の研究
- ・生データによる実際の予測実験
- ・評価の方法、最小二乗法の妥当性の検討

③ 引用・参考文献

1. 正司和志、高橋泰吉、モデル化とシミュレーション 千代田区 簿録出版 2004、ページ 120-121 ISBN4-491-10071-5
2. 日本経済新聞 新型インフルエンザ 7月6日 日本経済新聞 (オンライン) 日本経済新聞 2010年8月12日 (引用日 2013年8月7日) http://www.nikkei.com/artic.../DGMNAS201207G_S0A210C1CC0006/
3. 国立感染症研究所、インフルエンザA(H1N1)の流行状況—更新9、国立感染症研究所 感染症情報センター (オンライン) 国立感染症研究所 2009年12月25日 (引用日: 2013年8月7日) http://idsc.nih.gov/japanese/swine_influenza/2009idsc/09idsc29.html
4. 国立感染症研究所、インフルエンザA(H1N1)の流行状況—更新5、国立感染症研究所 感染症情報センター (オンライン) 国立感染症研究所 2009年8月11日 (引用日: 2013年8月7日) http://idsc.nih.gov/japanese/swine_influenza/2009idsc/09idsc25.html

③ 使用したソフト

Microsoft Office 2013 Exce.
同ソフトのアドインであるソルバー機能も使用

STELLA 10.0.3
「モデル化とシミュレーション」で使用されていた
モデル化ソフト
<http://www.iseesystems.com/software/Education/StellaSoftware.aspx>

③ 本日の資料のダウンロード

本日の資料は以下のリンクからダウンロードできます

<http://db.tt/z69RFI8y>



また、断りなく変更・削除する場合がありますので
予めご了承ください。

2424 筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba
冪乗時の余りの周期
The cycle of the remainder. (About X^n)

波多野 広希
Hatano Hiroki

Abstract

"Find all values of X , two-digit natural numbers, which satisfy $X^{40} \equiv X \pmod{100}$." This question was introduced by a student in my school. What seems to be the easiest way is to use the Euler's theorem ($a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$). Then, I decided to try to investigate the behavior of the "remainder".

1. 目的

自然数 x の n 乗をある自然数 m で割った際の余りが n に伴ってどう変化するか表計算ソフトで調べたところ、一定の周期性が確認された。これが何に起因するのか、 x, n, m を定めた時に現れる周期を実際に計算せずに求められるか、探ることにした。

2. 方法

まず m が 8 や 16、27 の場合について、 m より小さい自然数を冪乗して余りが何らかの周期を見せるまで手計算を繰り返した。また m が 1000 の場合や 5040 の場合についてはコンピューターを使って周期を調べた。その後、得られたデータを基に素因数などを考えていく方針をとった。(しかしここにそれを書く余白はない。)

3. 結果

中国剰余定理の適用により、 x の n 乗について m の各素因数 (の冪) が作る周期の最小公倍数が求めるべき周期であることが確認された。

4. 考察

結果から考えて、 m が素数の場合で考えればよいことがいえる。(しかしながら実際の作業なしでの方法まだ得られておらず、さらにこの現象はある程度知られていること(単位元の個数などにも関わる内容)だったのだと後々判明した。)

5. 感想

短期間のうちに独力でここまで進められたと解釈し、さらに掘り下げていきたい。

6. 参考文献

(なし)

7. キーワード

整数 合同式 周期

2424 筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba
弦の長さの和に関する考察

A Consideration about the sum of the length of chords

林 俊介 (2年)

Shunsuke Hayashi

Abstract

There is a regular $2n+1$ sided polygon inscribed in a circle and we name the vertexes of it $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}, A_{2n+1}$. Plot point P on the arc A_1A_{2n+1} and put the length of a line segment PA_i to x_i . I verified whether this formula is completed or not: $(x_1+x_3+x_5+\dots+x_{2n-1}+x_{2n+1})=(x_2+x_4+x_6+\dots+x_{2n-2}+x_{2n})$

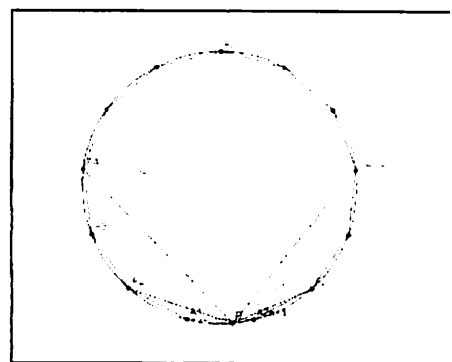
1. 目的

正 $2n+1$ 角形 $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}A_{2n+1}$ があり、弧 A_1A_{2n+1} 上に点 P をとる。線分 PA_i の長さを x_i とするとき、次の式が成立するという予想について検証する。

$$x_1+x_3+x_5+\dots+x_{2n-1}+x_{2n+1}=x_2+x_4+x_6+\dots+x_{2n-2}+x_{2n}$$

2. 方法

トレミーの定理を用いる。さまざまな四角形の取り方があるが、証明に役立ちそうなのは、 $A_1 \sim A_{2n+1}$ のうち連続した3点と P によってできる四角形と思われる。またトレミーの定理を用いる際、 $x_1 \sim x_{2n+1}$ 以外の長さも出てくるため、線分 A_1A_2 の長さを a 、線分 A_1A_3 の長さを b とおいた。



3. 結果

$A_1 \sim A_{2n+1}$ のうち連続した3点と P によってできる四角形に関して、考えられるすべての四角形でトレミーの定理を用いて、すべての式を足し合わせると、

$$(2a+b)(x_1+x_3+x_5+\dots+x_{2n-1}+x_{2n+1})=(2a+b)(x_2+x_4+x_6+\dots+x_{2n-2}+x_{2n})$$

となり、両辺を $2a+b$ で割ることで目的の式を得られた。

4. 考察

$A_1 \sim A_{2n+1}$ までのうち連続した3点を選ぶのがポイントで、そうすることで $x_1 \sim x_{2n+1}$ 以外の長さの使用を極限まで抑えられたのがポイントだと思われる。このほかにも三角関数や複素数を用いた証明方法も存在するかもしれない。

5. 結論

予想は確かに成立する。形の整った綺麗な性質を得られた。

6. 参考文献：なし

7. キーワード

正多角形 トレミーの定理

シグナルの定理
Theorems of traffic signals

林田 昂大
Hayashida Kodai

Abstract

I think about traffic signals' workings mathematically. This research uses the time of traffic signals' every color to find theorems.

1. 目的

信号機に関する数式を発見し、その数式を利用したノンストップで歩行、走行する方法を探る。

2. 方法

まず、ある経路を選ぶ。そして、その経路にある各信号機の各色の点灯時間を調べる。調べた数値で図や表を作り、右図のように一度文字に置き換えて数式を生み出す。

3. 結果

信号機の各色の点灯時間のデータで数式を出すことができた。ノンストップ歩行、走行に必要な式は不等式で表すことができ、周期の回数を変えて式に代入すれば何通りもの範囲のパターンが出てくる。

4. 考察

信号機と信号機の間で生じる点灯開始の時間差の範囲をもっとしぼりこみ、明確にする必要がある。

5. 結論

ノンストップで歩行、走行するには、通過する際に立ちはだかる信号機の各色の点灯時間の数値をシグナルの定理に代入し、ある程度信号機までの距離の間隔を把握しておく必要がある。

6. 参考文献

なし

7. キーワード

信号機 シグナルの定理 ノンストップ歩行 ノンストップ走行

信号機	赤	青	一周期
A	65	35	100
B	70	30	100
C	52	18	70

単位 秒

信号機	赤	青	一周期
A	a	100-a	100
B	b	100-b	100
C	c	70-c	70

シグナルの定理

石川県立七尾高等学校
林田昂大 木森喜大

シグナルの定理 I

同じ地点の信号機については次のことが成り立つ。

赤:R 青:B 黄:Y 一周期:1Cy とすると、
歩行者(Wa)

$$R(Wa) + B(Wa) = Cy$$

車(Dr)

$$R(Dr) + B(Dr) + Y(Dr) = Cy$$

シグナルの定理 II

- ある地点から信号機Aを赤信号を避けて歩行するとき、必要な時間tは次のように表される。

$$Cy(k-1) + R(Wa) \leq t \leq kCy$$

- 信号機Aを渡りきった所から信号機Bを赤信号を避けて歩行するとき、必要な時間tは次のように表される。

$$G(A \sim B) + Cy(k-1) + R(Wa) \leq t \leq G(A \sim B) + kCy$$

* R(Wa)、Cyは渡りきる信号機の点灯時間

シグナルの定理 III

- ある地点から信号機Aを赤信号を避けて走行するとき、必要な時間tは次のように表される。

$$Cy(k-1) + R(Dr) \leq t \leq kCy - Y(Dr)$$

- 信号機Aを走行しきった所から信号機Bを赤信号を避けて走行するとき、必要な時間tは次のように表される。

$$G(A \sim B) + Cy(k-1) + R(Dr) \leq t \leq G(A \sim B) + kCy - Y(Dr)$$

* R(Dr)、Y(Dr)、Cyは走りきる信号機の点灯時間

関数グラフアートの研究

Research of functional graphic art

住田悠太郎 斎藤弥晃 高野航洋 白石夏輝

Yutaro Sumida Hiroaki Saito Koyo Takano Natsuki Shiraishi

Abstract

We research of functional graphic art. We visualize some buildings with various functions. Various curved lines are used surrounding us. Finding such points by drawing graphic art, we would like to improve the sense of math.

1. 目的

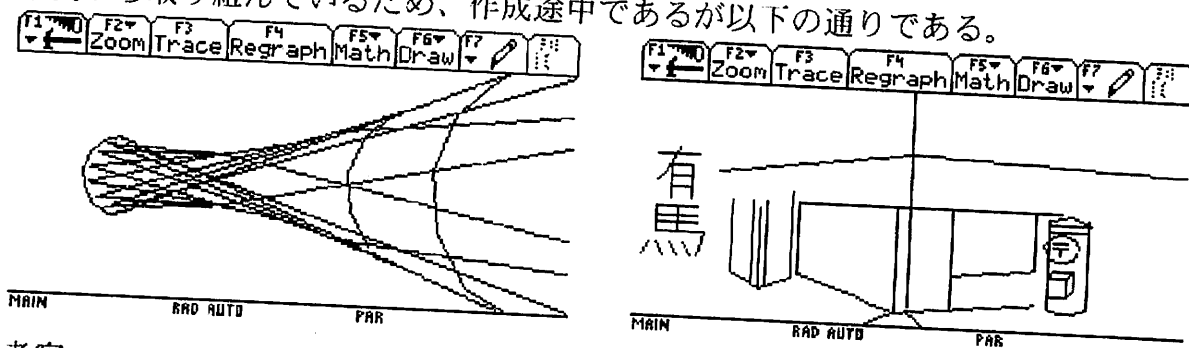
関数グラフアートを通して、関数、グラフに対する知識を深め、建築物における数学の有用性を理解する。

2. 方法

関数電卓を用いる。数式を関数電卓に打ち込むことでいろいろなグラフをかく。変域や他の数式などを組み合わせて、ひとつの絵（アート）を作成する。なお、数式は媒介変数表示で表すことにする。

3. 結果

本年度から取り組んでいるため、作成途中であるが以下の通りである。



4. 考察

建築物の曲線部分をどのように表現するかがカギである。現在、どの曲線が適しているのか模索している状況である。また立体的に表すうえでどの角度から建築物をとらえるかが重要である。

5. 結論・展望

大阪城やポートタワーを訪れ、たくさんの助言を頂いた中でグラフアートを作っていると、身の回りには様々な関数が姿を変えて存在していることが分かった。作品はまだまだ作成段階であるが、引き続き粘り強くグラフアートの作成に取り組んでいきたい。

6. キーワード

関数 グラフ 媒介変数表示 曲線 芸術


関数グラフアートの研究

～グラフが作り出す芸術～

松山南高校 2019年
 高橋 貴寛
 白田 夏輝
 佐田 悠太郎
 高野 皓洋

動機

- ・作前の中品に刺激を受けた。
- ・2次元に2次元をグラフで表せようになり、さらに図形に興味をもちた。
- ・グラフアートを通して、数学の面白さについてさらに深く学びたいと思った。



手段

・関数用紙を使う。



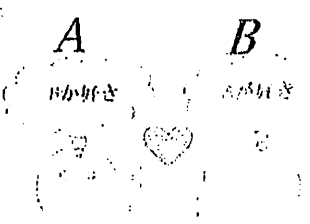
媒介変数表示

(例) $y = x^2 + 2x - 3$


$x = t$
 $y = t^2 + 2t - 3$

A B

Aが好き Bが好き



t



媒介変数表示の利点

関数用紙・・・ $y=f(x)$ でしか式を立てられない。
 $y = ax + b$ などの式を立てられない。


しかし・・・

媒介変数表示を使うと
 ①は定数で、②は変数。

・・・ t の形でなくとも関数用紙に表すことができる。

(例) $P = \cos t, Q = \sin t$

$x = t \cos \theta + a$
 $y = t \sin \theta + b$



現状

工大蔵
 前橋大

日本武道館

東京大学

筑波大学

千葉大学

東北大学

北海道大学

青森大学

岩手大学

宮城大学

秋田大学

山形大学

福島大学

茨城県立水戸第一高校

茨城県立水戸第二高校

茨城県立水戸第三高校

茨城県立水戸第四高校

茨城県立水戸第五高校

茨城県立水戸第六高校

茨城県立水戸第七高校

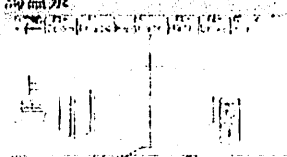
茨城県立水戸第八高校

茨城県立水戸第九高校

茨城県立水戸第十高校

有馬温泉

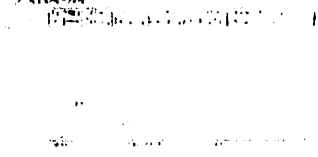
有馬温泉の歴史と温泉の成分



- ・お湯の成分を調べた
- ・湯気があふいている

大阪城

大阪城の歴史と見どころ



- ・歴史の地をめぐっての歴史を学ぶことができた
- ・お城の歴史を学ぶことができた

・内陣だけではわからない箇所がある。




・使うべき図像の見方が難しい。



わからない部分について

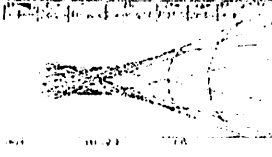
- ・二次関数?
- ・指数関数?

図像の見方について




ポートタワー

ポートタワーの歴史と見どころ



- ・お城の歴史を学ぶことができた
- ・神戸の歴史と文化を感じることができた



すべて直線
の図像

班別研修へ行った場所

1. 神戸ポートタワー
2. 大阪歴史博物館



質問内容

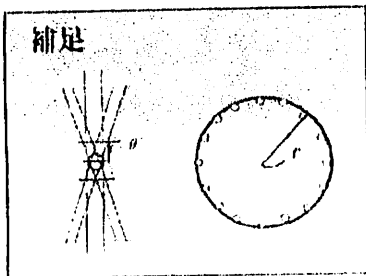
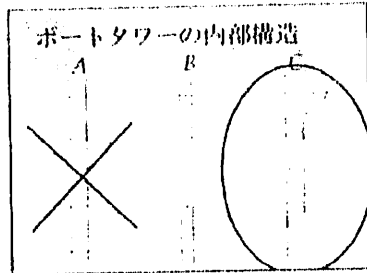
- ・内陣だけではわからない箇所がある
- ・お城の歴史を学ぶことができた

クイズの答えは……!

神戸ポートタワーとは？

1. 田母野のバイパス橋の観光タワー
2. 別名は「日本企業の旗をイメージ」

1. すべてが旗のイメージが使われていないのに、曲がって見える。
この不思議な構造を理解することで、よりリアルな作品を作成できる！

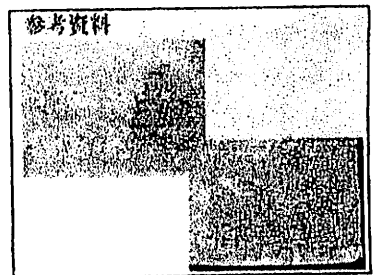


大阪歴史博物館とは？

1. 都市「おおさか」を
紹介する歴史系博物館
・市民参加型の博物館
2. 大阪の歴史と文化に関する
情報センター

他、難波宮のサイトミュージアム
博物館のネットワーキング

**大阪城の構造などを詳しく
理解することができる！**



いただいたアドバイス

興味だけで見ただけの情報は
足りないから、自分自身で調べることも大切
また、見るのが、あつた方がいい
説明は、自分の言葉で、自分の言葉で、自分の言葉で

「お城らしさ」を表現するために・・・
しやももなどの細いところを丁寧に表現する。



PINEAPPLE と p 進数

発表者 鈴木祐斗 堀剣太郎

SuzukiYuto HoriKentaro

Abstract

I wonder whether the product of "APPLE" and something is "PINEAPPLE". Then, I got an idea. It was " $nx=p^s*t+m$ ". I thought that formula uses not only solving that question, but also using other questions. And I study about this general property.

1. 目的

APPLE と何をかけると PINEAPPLE になるだろうか? と考え始め、覆面算の考えを用いた解法を試みた。その問題を解くための式から p 進数など、いつもの数学と違う視点からのアプローチを行った。

2. 方法

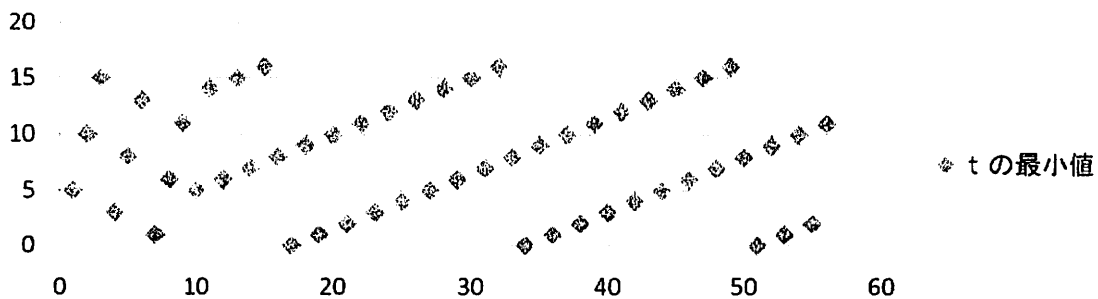
下記の式へ数値を実際に入れて計算することでどのような関係性があるか調べる。

$nx=p^s*t+m$ n : $g.c.d(n,p)=1$ となる任意の自然数 p : 位取りの底
 m : 任意の自然数 s : m の桁数 x : 変数 t : 適当な自然数

3. 結果

例: $n=17$ $p=10$ のときの t の最小値である。横軸: m 縦軸: t の値

t の最小値



このような一定の数値の動きがあることがわかった。

4. 考察

n を固定するために最小となる t は上の図のように一定になる。

これからは数論を学び、更に式を満たす最小の x, t と n, m, s との関係式を一般化させたい。

5. キーワード

p 進数 覆面算 自然数 PINEAPPLE

PINEAPPLEと p進数

愛知県立豊田西高等学校
ss科学部数学班
鈴木祐斗 堀剣太郎

りんごにあるものをかけたら
パイナップルになった!
なにをかけたでしょうか? りんご → APPLE
パイン → PINEAPPLE
かける → ×
あるものを適当な数 x として ($x \in \mathbb{N}$)
APPLE × x = PINEAPPLE
つまり、覆面算です。

覆面算とは

- 数字の代わりに文字が置いてある。
- 適当な数字を入れて
計算式が実際成り立つように数字を入
れる問題。
- 通常は10進数で考える。

例

$$\begin{array}{r} \text{egg} & & 977 \\ + \text{soy} & \longrightarrow & + 105 \\ \hline \text{soul} & & 1082 \end{array}$$

先ほどの問題の答えの一つとしては
 $24450 \times 20001 = 489024450$
 APPLE PINE APPLE
 比較すると合っていることが
 わかります。

考えて思いついたこと

下一桁が1, 3, 7, 9ならば
 一桁の数字をかけても
 下一桁の数字は
 同じにならない?

表にするとこうなる。

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

下一桁だけ見ると数字は同じにならない

式にしてみた

$$nx = p^s \times t + m$$

p 位取りの底

m 任意の自然数

s mの桁数

n $\gcd(n,p)=1$ となる任意の自然数

nに適当な自然数xをかければ下s桁をmとすることが可能である。
という式である。

例えば

10進数つまり $p=10$

$n=13$, $m=15$ ならば

$x=55$ で

$$13 \times 55 = 715$$

$$= 7 \times 10^2 + 15 \quad \text{である。}$$

置換算なので
10進数で解いてみた
 $nx = p^s \times t + m$

$$\text{APPLE} \times X = 10^5 \times \text{PINE} + \text{APPLE}$$

$$\text{APPLE}(X-1) = 10^5 \times \text{PINE}$$

ここで、一つ重要な法則を少し説明する。

『この 10^5 はなくてもよい』

$(x-1)$ は変数である。

ならばこの数に10倍100倍しても問題ないなのである。

つまり

$$\text{APPLE}(X-1) = \text{PINE}0$$

としてもよいのである。

また右辺の一桁は0、桁数は等しいため
 $A < 5$ 、Eは5か0、 $X-1$ は2か4

こうして $24450 \times 2 = 48900$
 $24450 \times 2 \times 10000 = 48900 \times 10000$
 $24450 \times 20000 + 24450 = 489000000 + 24450$
 $24450 \times 20001 = 489024450$
 となる。

ここで $nx = p^s \times t + m$
の性質を説明しよう。

$p=10$, $n=17$, $m=15$ とする

式は $17 \times 95 = 10^2 \times 16 + 15$

となるが

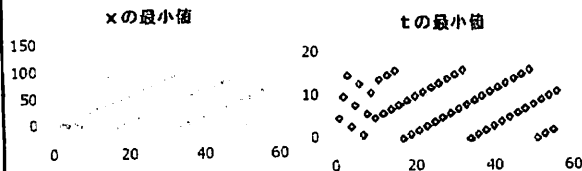
$17 \times 195 = 10^2 \times 33 + 15$ もまた式を満たす。

$x=195, 295, 395 \dots$ と変化させても式を満たす。

つまり式を満たすxに最小値が存在する。

このことからtにも最小値が存在する。

13
最小値をグラフにする。n=17 p=10 として
横軸にm 縦軸にそれぞれx,tの最小値をとる。



14
見てわかるように図はどちらも
一定の間隔をとっていることがわかる。
さらに10を境に変化の仕方が変わっている。

これまででわかっていること
任意のtに関して $0 \leq t < n$
任意のmを満たす $x_{\min(m)}$ は $x < p^s$

15
 $m = p^s$ のとき最小となるtの値は一定

$m = 1$ のときのxの最小値をaとして

$m = p^s$ のとき最小となるxは $a \times p^s$

16
任意のs桁のmに対しての $x_{\min(m)}, t_{\min(m)}$
は一定の変化をする。

そしてその変加量を i_t, i_x として $t_{\min(m)} + i_t < n$
のときに $m+1$ のときの $t_{\min(m+1)}$ となり、

$t_{\min(m)} + i_t > n$ のときには
 $m+1$ のときの $t_{\min(m+1)} = t_{\min(m)} + i_t - n$ となる。
xの場合はnを p^s に換えて同じ作業をする。

17
上の i_t はsけたにおいて $m=1$ の場合と
 $m=p^s+1$ を調べるだけで十分である。

また、 i_x も同様である。
これらは桁数が同じならば変化する値もまた
同じであることによる。

18 これからの課題

I_t は桁が増えると循環することが
わかっている。

しかしどのように循環するか、
また i_t を n, p, s を
用いて一般化させていない。

これから n, p, s を用いて一般化させていきたい。

因数と循環節の2分割和についての研究
The Study of Factors and the Sum of Bisected Repetends

川本 和、田中涼音
Wataru Kawamoto, Ryoto Tanaka

Abstract

$1/7 = 0.1428571428\dots$, which is a repeating decimal. I looked at the repetend, 142857. I divided it into 2 numbers, 142 and 857, and added them together, $142 + 857 = 999$, which is a row of the same numbers. I studied when numbers have this property, which I call the sum of bisected repetends, and I categorized numerous fractions in order to learn about it

1. 目的

循環節の2分割和にはどの数が並ぶのか、また、どのような分数の場合にこの性質が成り立つのかの一般化を試みた。10進法以外での関係についても考えた。

2. 方法

まず Mathematica を利用して3, 6, 7, 9, 10進法における $1/2 \sim 1/300$ の循環節を求めた。手計算によって循環節の2分割和に並ぶ数を求め、それらを分母の値の違いによって分類した(分子は1でそろえた)。この時、循環節の長さが奇数の場合は省いて考えた。

$1/7 = 0.1428571428\dots$
↓
142857
↓
142
+857

999

3. 結果

g 進法における循環節の2分割和に並ぶ数は、 $(g - 1)$ が最も多かった。そして $(g - 1)$ と共通の因数を持つ数 $\{(g - 1)を除く\}$ が次に多かった。分類は一部を除いてできた。

4. 考察

分類や並ぶ数には、記数の因数が深く関わっていた。また循環節の2分割和に並ぶ数は、分母にある一定の数をかけ、それを合同式を用いることによって分類できることが分かった。一部においては証明もできた。

5. 結論

循環節の2分割和は10進法以外でも成り立ち、多くの例において、分母の値によってきれいに分類することが可能だった。そして分類には奇素数と因数が関わっていた。

6. 参考文献

- ・浅野史織、西原浩子 循環小数の2分割和の研究
- ・芹沢正三 素数入門 株式会社講談社、2003年12月2日、第3刷発行
- ・小島 定吉、初等整数論

7. キーワード

循環節 2分割和 因数 g 進法 奇素数

循環節の2分割和とは？

$1/7 = 0.142857142\dots$ ➡ 循環節数

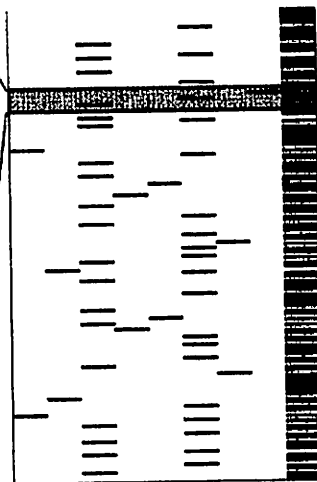
$$\begin{array}{r} + \\ \hline 999 \end{array}$$

同じ数が並ぶ

結果(偶数)

例: 10進法

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
61								■	■
63								■	■
65								■	■
66						■		■	■
68								■	■
69			■					■	■
70								■	■
73								■	■
76								■	■



9が並ぶ場合

10進法 $1/7 = 0.14285857 = 999$

(i) $N = p^k$

(ii) $N = 2N_1$

(iii) $N = 5N_1$

(iv) その他



$1/N_1$

⇒循環節の2分割和
には9が並ぶ

$$1/7 \times 2$$

$$= 1/14 = 0.071428285 = 999$$

これまでのまとめ

- $1/N$ を g 進展開



$N = p^k, 4, 2p^k$ なら2分割和に $(g-1)$ が並ぶ
($p =$ 奇素数)

- 循環節の2分割和に並ぶ数の割合は、 $(g-1) > (g-1)$ と共通因数を持つ数 > その他の数、となった。
- 合同式を用いて分類することができた。
- g, N ともに、分類では、因数が大きく関わっている。

コーヒーカップの描く軌跡
The locus of a coffee cup

細見真矢
Shinya Hosomi

Abstract

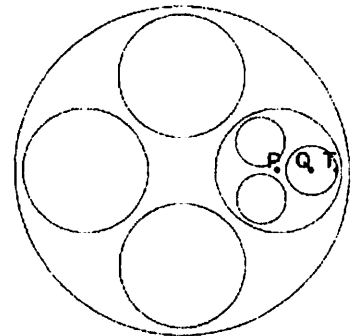
A coffee cup in an amusement park draws complex loci because the person, turntable, and the whole coffee cup revolve at different speeds. It can be analyzed by using computer. When the ratio of angular velocities is simple, the locus has some rules, but if the ratio is complex, the locus is appears complex.

1. 目的

遊園地にあるコーヒーカップは、複数の円運動が混ざった複雑な軌跡を描く。コンピュータを用い、この動きのシミュレーションを試みる。

2. 方法

3種類の大きさの円をそれぞれ違う角速度で回転させる。大円盤、中円盤を「皿」、小円盤を人が乗るカップ、点Tを人に見立てている。点Tの座標は位置ベクトルで表している。パラメーターは角速度 a , b , c と周回数を表す l の4つがある。



3. 結果

角速度の比それぞれで、ある程度の規則性がみられる軌跡が数多く得られた。逆回転する円が含まれる場合でも、そうでない場合と同じく規則性がみられる。

4. 考察

角速度の比が簡単な場合は規則性があるが、簡単でない場合は非常に複雑な軌跡となり、規則性は現在のところ見いだせていない。

5. 結論

3つも円運動が組み合わさると、複雑な軌跡を生み出す。特別な場合でのみ、簡単な規則性がみられる。

6. 参考文献

数学のいずみ コーヒーカップの描く軌跡

7. キーワード

位置ベクトル サイクロイド 角速度

オイラーの多面体定理の拡張

大阪府立大手前高校

石原寿剛 島崎直人 中川拓真 長谷川祐輝 早戸洋介

1. 序

私たちは、主に、正単体、超立方体、正軸体について、 n 次元の立体の m 次元要素の数を調べていき、規則性がないかを考えた。そして、正単体、超立方体、正軸体においてシュレーフリの定理が成り立つことの証明を試みた。

2. 研究の手順

1. 正単体、超立方体、正軸体についての理解
2. n 次元の立体の m 次元要素についての規則性の発見および一般化
3. 正単体、超立方体、正軸体において、定理が成り立つことの証明

次元	正単体	m次元要素の数					次元	超立方体	m次元要素の数				
		0	1	2	3	4			0	1	2	3	4
0	点	1					0	点	1				
1	線分	2	1				1	線分	2	1			
2	正三角形	3	3	1			2	正方形	4	4	1		
3	正四面体	4	6	4	1		3	立方体	8	12	6	1	
4	正五胞体	5	10	10	5	1	4	正八胞体	16	32	24	8	1

次元	正軸体	m次元要素の数				
		0	1	2	3	4
0	—					
1	—					
2	正方形	4	4	1		
3	正八面体	6	12	8	1	
4	正十六胞体	8	24	32	16	1

3. 結果

n 次元の立体における m 次元要素の数を e_m とすると、 $\sum_{m=0}^n (-1)^m e_m = 1$ が成り立つことが分かった。

正単体、超立方体、正軸体において、 $\sum_{m=0}^n (-1)^m e_m = 1$ が成り立つことを証明できた。

4. 参考文献

ウェブサイト

『ポリトープ-Wikipedia』 ja.wikipedia.org/wiki/ポリトープ

『単体-Wikipedia』 ja.wikipedia.org/wiki/単体

『超立方体-Wikipedia』 ja.wikipedia.org/wiki/超立方体

『正軸体-Wikipedia』 ja.wikipedia.org/wiki/正軸体

『ゾム VRML ギャラリー』 www.zome.com

『BIGLOBE 百科事典』 jiten.biglob.ne.jp

オイラーの多面体定理の拡張 資料

大阪府立大手前高校：石原寿剛 島崎直人 中川拓真 長谷川祐輝 早戸洋介

定義

単体

$r+1$ 個の点 (の位置ベクトル) a_0, a_1, \dots, a_r があり、これらすべての点が \mathbb{R}^n の $r-1$ 次元以下の部分空間に含まれることはない (これを一般の位置にあるという) ものとする。このとき、

$$\left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_r \geq 0 \right\}$$

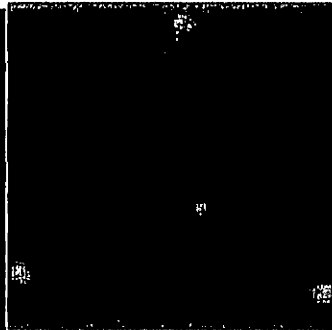
を、 a_0, a_1, \dots, a_r によって生成される (あるいは張られる) r 次元単体 あるいは単に r 単体という。別の表現をすると、「 $r \leq n$ ならばどの $r+1$ 個の点も $r-1$ 次元の超平面に同時に含まれることのない」ような $n+1$ 個の点からなる集合の凸包を単体と呼ぶ。

そして、辺の長さがすべて等しい単体を正単体と呼び、

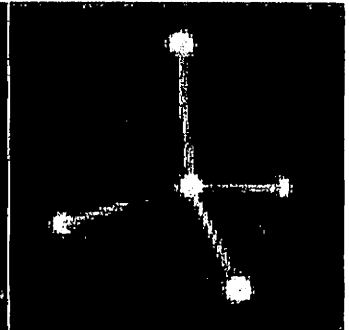
- 0 次元正単体は、点。
- 1 次元正単体は、線分。
- 2 次元正単体は、正三角形。
- 3 次元正単体は、正四面体。
- 4 次元正単体は、正五胞体。



2次元正単体(正三角形)



3次元正単体(正四面体)



4次元正単体(正五胞体)

次元	正単体	m次元要素の数				
		0	1	2	3	4
0	点	1				
1	線分	2	1			
2	正三角形	3	3	1		
3	正四面体	4	6	4	1	
4	正五胞体	5	10	10	5	1

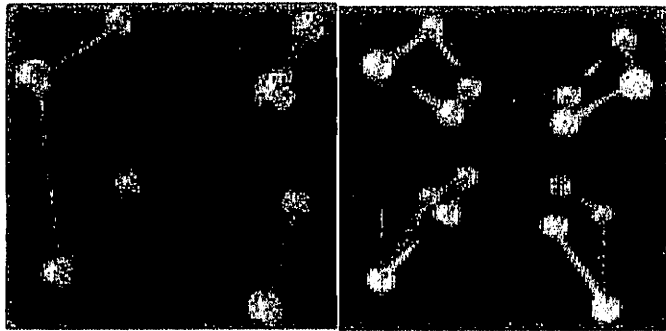
超立方体

$(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$

を頂点とし、最も近い（距離 2 の）頂点同士を辺で結んだもの。

複号は全ての組み合わせを取る。

- 0次元超立方体は、点
- 1次元超立方体は、線分
- 2次元超立方体は、正方形
- 3次元超立方体は、立方体
- 4次元超立方体は、正八胞体



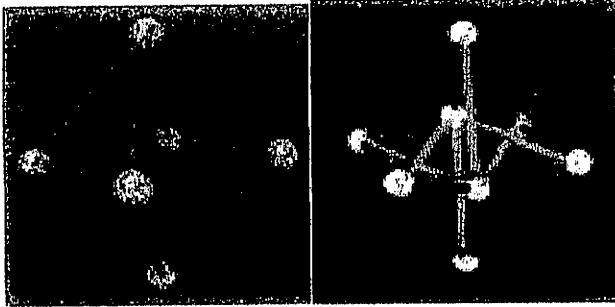
3次元超立方体(立方体) 4次元超立方体(正八胞体)

次元	超立方体	m次元要素の数				
		0	1	2	3	4
0	点	1				
1	線分	2	1			
2	正方形	4	4	1		
3	立方体	8	12	6	1	
4	正八胞体	16	32	24	8	1

正軸体

正軸体を作図するには、座標 $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$ の巡回

$(\pm 1, 0, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, \pm 1)$ を頂点とし、最も近い(距離 $\sqrt{2}$)の2点ずつを辺で結んだもの。



3次元正軸体(正八面体) 4次元正軸体(正16胞体)

次元	正軸体	m次元要素の数				
		0	1	2	3	4
0	—					
1	—					
2	正方形	4	4	1		
3	正八面体	6	12	8	1	
4	正十六胞体	8	24	32	16	1

m次元要素

0次元要素... 頂点

1次元要素... 辺

2次元要素... 面

3次元要素... 胞

4次元要素... 4次元面

⋮

⋮

のように、定義する。

シュレーフリの定理

孔や密度のない n 次元ポリトープの m ($0 \leq m \leq n$)次元要素の数を c_m とすると、

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m c_m = 1$$

が成り立ち、これをシュレーフリの定理と呼ぶ。

正多点体を創る

大阪府立大手前高校 2年6組

松田隼一朗 阪口雄太 西川寛太郎 山下航平 山本雷斗

1.abstract

正多面体と呼ばれる図形は5種類のみであるが、それを拡張したものも存在する。我々は多面体の頂点に着目することで均整のとれた図形を新たに創り出すという研究を行った。

2.定義

多点体: 幾つかの頂点が成す図形

正多点体: 超球に内接し、頂点間の位置エネルギーの総和が極小となる凸な多点体

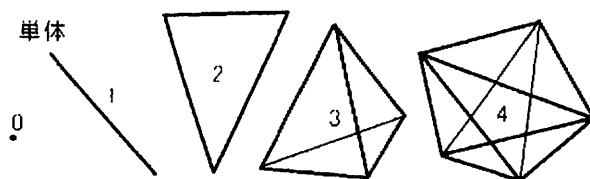
3.正多点体の構成

外接 D 次元球の半径を1に固定する。斥力を与えて D 次元 n 点体の頂点を位置エネルギーの総和が小さくなるよう移動させることを繰り返し、 D 次元正 n 点体を構成出来る。

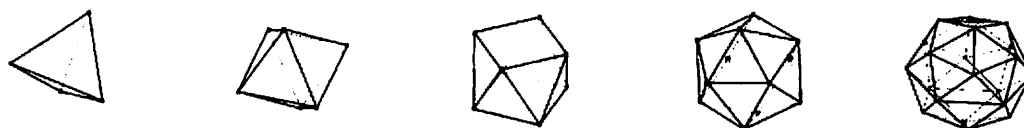
今回は表計算ソフトを用いて $D=3$ の場合の3次元正多点体を構成した。

4.正多点体の性質

n 点体は最大で $n-1$ 次元の単体となるから、 $n-1 \leq D$ のとき、正 n 点体は $n-1$ 次元正単体となる。ここで $D \rightarrow \infty$ の無限次元正 n 点体を考えると、任意の $n \in \mathbb{N}$ において $n-1 \leq D$ であるから、無限次元正多点体全体の集合は正単体全体の集合に一致する。



以下は得られた正多点体の一部である。



ここで、正8,20点体は各正6,12面体となっていない。正多点体は頂点のみが条件付けされているため、面や辺が強く条件付けされた正多面体よりつりあいの取れた図形が存在し得る。

なお、正多点体が各 D, n に対し1種類であること(一意性)を示すことは出来なかった。

5.まとめ

- ・明確な正多点体の定義を得た。
- ・ D 次元正 n 点体の構成方法を得た。
- ・3次元正多点体の一部を実際に構成した。
- ・正多点体の性質の一端を明らかにした。
- ・正多点体の一意性は示せなかった。

6.参考文献

ウィキペディア ポテンシャル ja.wikipedia.org/wiki/ポテンシャル

ウィキペディア 位置エネルギー ja.wikipedia.org/wiki/位置エネルギー

正多點体を創る

3. 正多點体の構成

外接 D 次元球の半径を 1 に固定する。斥力を与えて D 次元 n 點体の頂点を位置エネルギーの総和が小さくなるよう移動させることを繰り返し、 D 次元正 n 點体を構成する。

n 點体の頂点を各 A_m , 外心を $O, \vec{OA}_m = \vec{a}_m$ ($|\vec{a}_m| = 1$) とする。初めに異なる n 點 A_1, \dots, A_n をとり、 A_m が $A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1}$ からの位置エネルギーが小さくなるよう斥力を受けて移る点を A_{m+n} とする操作を繰り返し、正 n 點体を構成する。

D 次元空間では、ある点から距離 r の点を受ける斥力は r^{D-1} に反比例するため、比例定数を $K > 0$ とすると、力の大きさは $\frac{K}{r^{D-1}}$, 位置エネルギーは

$$-\int_c \frac{K}{r^{D-1}} dr = \begin{cases} \frac{K}{(D-2)r^{D-2}} (D \neq 2) \\ -K \log_e r (D=2) \end{cases} \text{と表される。}$$

$K=1$ として、 A_m が A_{m+k} から受ける斥力は

$$\frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|} \cdot \frac{1}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^{D-1}} = \frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^D}$$

と書けるから、斥力の総和は $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^D} \dots (i)$ である。

$$\vec{d} \approx \vec{0} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_m + \vec{d} - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m + \vec{d} - \vec{a}_{m+k}|^D} \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^D} \text{より、}$$

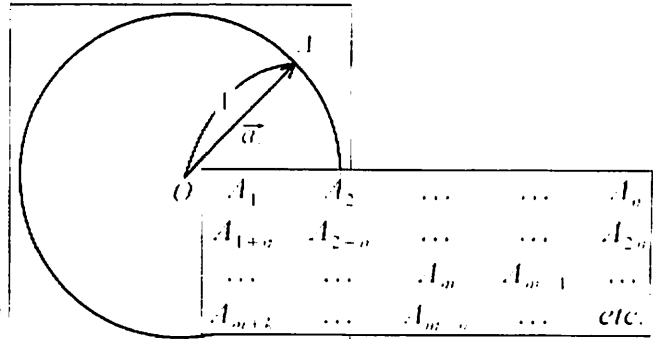
A_m の近傍において (i) は位置エネルギーが小さくなる方向であるから、 A_m から (i) を超球面に垂直に射影した方向に僅かに移動した点では位置エネルギーがより小さくなる。

よって、十分大きく M をとって

$$\vec{a}_{m+n} = \frac{\vec{a}_m + \frac{(i)}{M}}{|\vec{a}_m + \frac{(i)}{M}|} \text{ とすると、超球面上に位置エネルギーの小さい } A_{m+n} \text{ がとれる。}$$

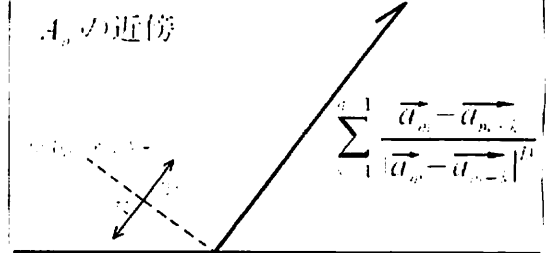
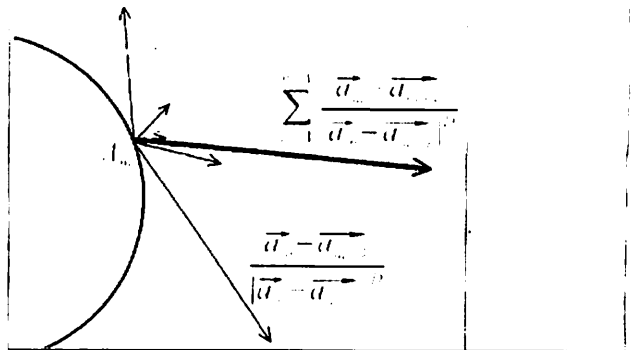
整理すると、

$$\vec{a}_{m+n} = \frac{M\vec{a}_m + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^D}}{M\vec{a}_m + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}}{|\vec{a}_m - \vec{a}_{m+k}|^D}}$$

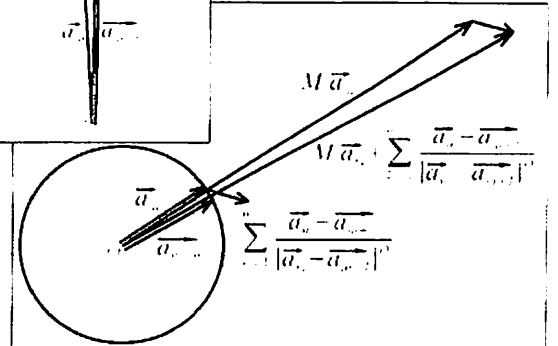
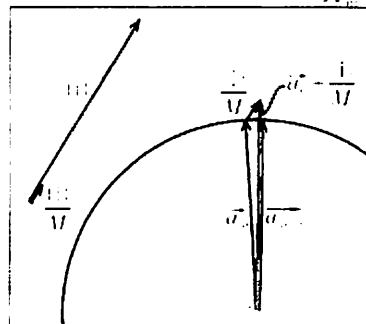


半径 $r = D$ 次元球

$$\text{極体積 } \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} r^D, \text{ 極表面積 } \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} r^{D-1}$$



A_m の近傍 超球面

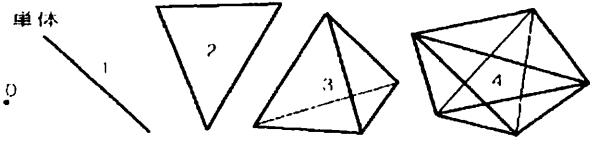


この演算を繰り返すことで得られる n 點の極限が D 次元正 n 點体である。

正多点体を創る

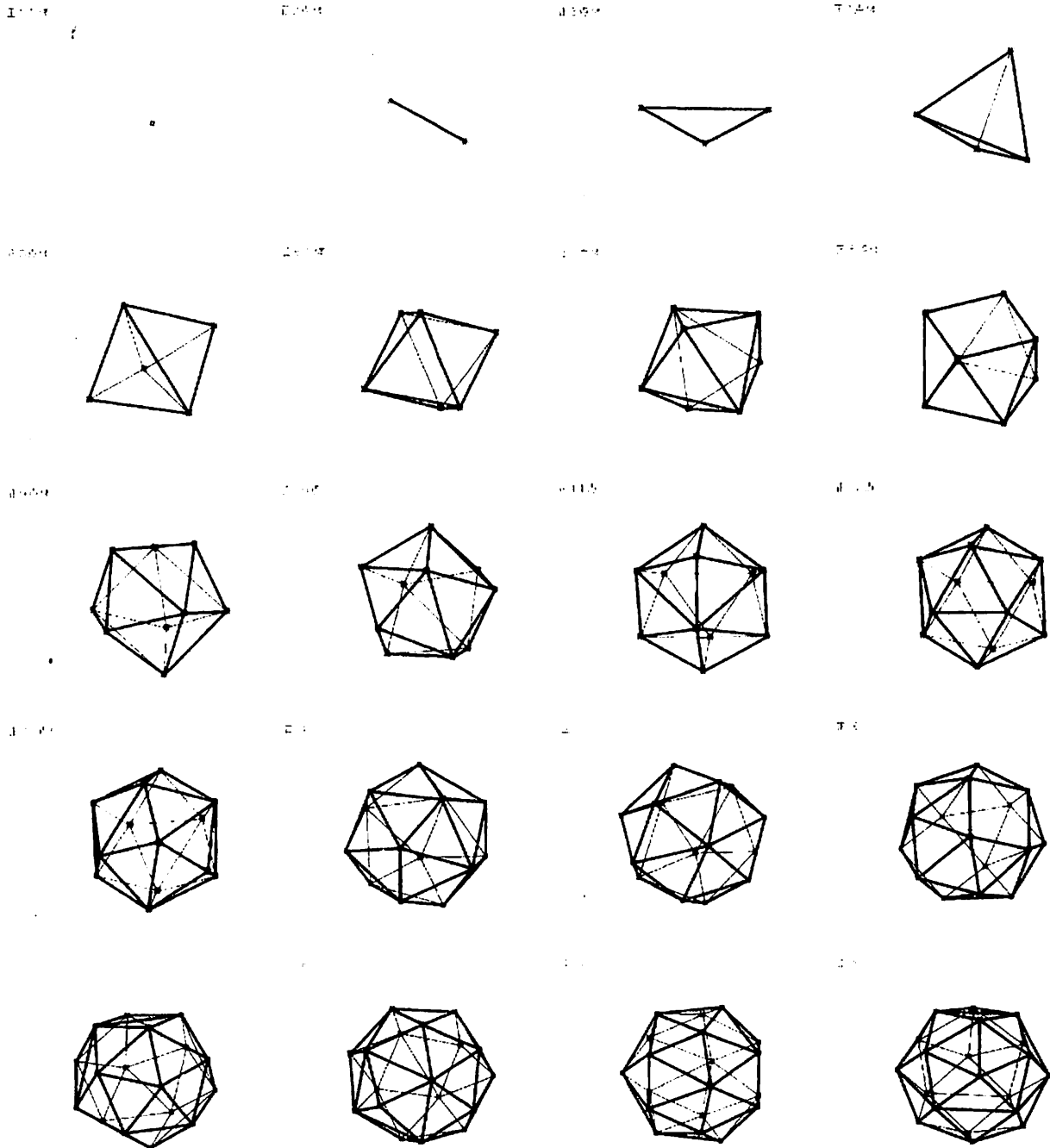
4. 正多点体の性質

n 点体は最大で $n-1$ 次元の単体となるから、 $n-1 \leq D$ のとき、正 n 点体は $n-1$ 次元正単体となる。ここで $D \rightarrow \infty$ の無限次元正 n 点体を考えると、任意の $n \in \mathbb{N}$ において $n-1 \leq D$ であるから、無限次元正多点体全体の集合は正単体全体の集合に一致する。



単体: 3角形, 4面体を拡張した、 $D+1$ 個の頂点が互いに辺で結ばれている図形

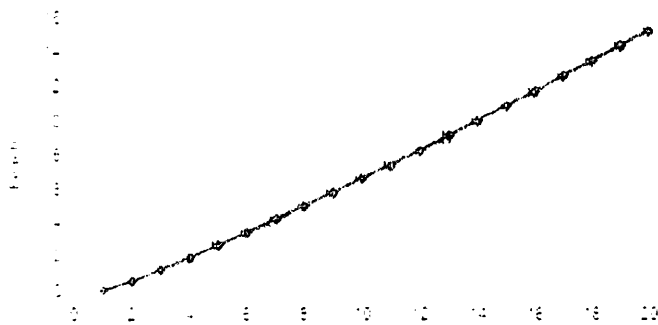
以下が得られた3次元正多点体である。



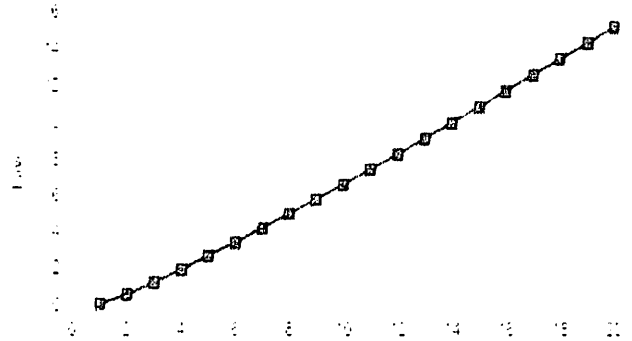
正多点体の位置エネルギーから次のようなグラフを得た。

正多点体を創る

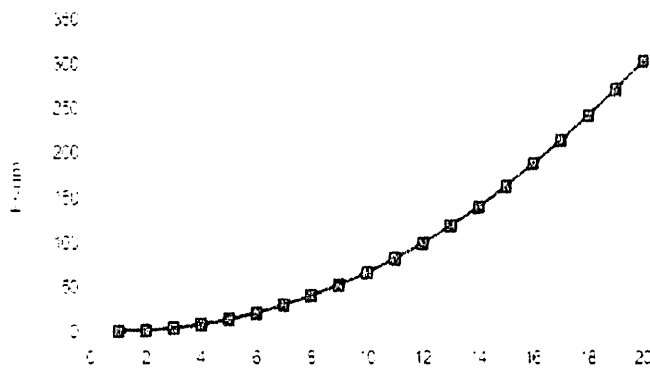
正 n 点体 Each



正 n 点体 Eave



正 n 点体 Esum



Each: 3次元正 n 点体の各頂点の位置エネルギー

Eave: 3次元正 n 点体の各頂点の位置エネルギーの平均

Esum: 3次元正 n 点体の全頂点の位置エネルギーの総和

個別値・平均値は直線に近いグラフ,総和は放物線に近いグラフとなったが、それを表す厳密な式は未だ得られていない。

これらの位置エネルギーの値から、正多点体を持つ対称性を推定出来る。

5.まとめ

- ・明確な正多点体の定義を得た。
- ・ D 次元正 n 点体の構成方法を得た。
- ・3次元正多点体の一部を実際に構成した。
- ・無限次元正多点体は正単体である。
- ・位置エネルギーのグラフを得たが、式は得られていない。
- ・正多点体の一意性は示せなかった。

Mario's jump equation☆

マリオのジャンプの公式化に挑戦・・・!

大阪府立大手前高校 2年8組 藤田・佐久・笹井・名古・橋本

◎はじめに

マリオが一体どのくらい跳んでいるのか疑問に思い、調べることにした。

◎調べたこと

斜方投射の公式

y : 高さ v_0 : 初速度 t : 時間 v : 物体によって変化する物体の速さ y_{max} : 最高点

g : 重力加速度 $\rightarrow g=2y \div t^2$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \dots \textcircled{1} \quad v^2 - v_0^2 = -2gy_{max} \quad \dots \textcircled{2}$$

②に $v=0$ を代入

$$0 - v_0^2 = -2gy_{max} \quad v_0 = \sqrt{2gy_{max}}$$

これを①に代入して $y = \sqrt{2gy_{max}} t - \frac{1}{2} g t^2$

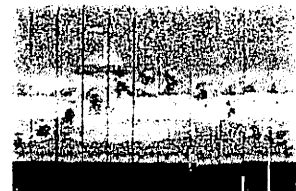
マリオについて

マリオの身長は155cm。ちびマリオの身長は77.5cm。

◎ストロボ写真作成方法

まず、はじめにマリオのジャンプをストロボ写真化した。クリボーも同様にして作成する。

- ①マリオのジャンプの様子をビデオで撮る。
- ②撮ったビデオを、「どう見る君」を使ってコマ送りの静止画にする。
- ③静止画のサイズを統合し、印刷する。
- ④印刷した静止画を、マリオを中心として幅25mmに切る。
- ⑤時間ごとに並べ、1枚の紙に貼る。



(以後写真①とする。)

⇒ 斜方投射の形に近いのでは？

◎考察

重力加速度に関しては(写真①)のみでは測れなかったので、クリボーの落下を利用して求めた。

クリボーの落下時間は、10回平均で、0.680秒

また、(写真②)上でクリボーの落ちた高さを測り、

現実世界の長さに換算すると、0.646m よって、 $g \doteq 2.77(\text{m/s}^2)$

そして同様に、(写真①)上で最高点(マリオの首を測定点とする)の

地面からの高さを測り、現実の世界の長さに換算すると、 $y_{max}=2.58 \text{ m}$

以上のことより、マリオのジャンプは $y = \sqrt{14.4} t - 1.395 t^2$ と公式化される。



(以後写真②とする。)

◎おまけ

マリオの重力加速度は $g \doteq 2.77(\text{m/s}^2)$ 地球の重力加速度は $g \doteq 9.8(\text{m/s}^2)$

このことから、マリオの世界の重力加速度は地球の重力加速度より値が小さいことがわかった。

また、マリオの世界の重力加速度は、月の $1.62(\text{m/s}^2)$ より大きく、火星の $3.71(\text{m/s}^2)$ より小さいことがわかった。

◎参考文献

- ・ わかりやすい高校物理の部屋 <http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/b2/51/5121rakutai.html>
- ・ 太陽系の惑星一覧 <http://www13.plala.or.jp/astrohouse/sora/wakusei.htm>
- ・ ジャンプの考え方1(物理) <http://dixq.net/g/30.html>

四面体の五心

大阪府立大手前高等学校

2年8組 金山照幸 酒見徳宏 下村英之 高橋力斗 東前潤

1. 研究内容とその動機

数学の授業で三角形の五心を学習した。これは2次元での議題であるが、3次元でも同様のことが議論できるのではないかと考えた。そこで、四面体の五心というものの存在証明を研究の題材とした。

2. 四面体の五心

① 重心

各頂点とその対面の重心を結んだ4本の線分は1点で交わり、その点を重心とする。その4本の線分は、互いに他を3:1に内分する。

② 外心

各面の外心を通る、その面に垂直な4直線は1点で交わり、その点を四面体の外心とする。四面体の外心は各頂点から等距離にある。

③ 内心

四面体の各面から等距離にある点で、四面体の内部にある点を四面体の内心とする。

④ 垂心

各頂点から対面に下ろした垂線が1点で交わるとき、その点を四面体の垂心とする。

⑤ 傍心

四面体の各面から等距離にある点で、四面体の内心でない点を四面体の傍心とする。傍心は1つの四面体について4つ存在する。

3. 結論

直辺四面体(全ての向かい合う2辺が垂直な四面体)には五心全てが存在し、その他の四面体には垂心を除く四心が存在することが分かった。

方程式で絵を描く

大阪府立大手前高校 荒岡、池田、今井、大木、棚田

<動機>

今まで様々な関数を学習してきてこれらの関数を組み合わせて絵を描くことができないだろうかと考え、それを描くにあたって土台となる様々な関数について調べ、考えてみようと思った。

<研究内容>

まず絵を描く関数を完成させるにあたって基盤となる関数や方程式などについて調べ、考察を加えた。

- ・直線を描く部分⇒一次関数
- ・曲線を描く部分⇒二次関数、円の方程式、楕円の方程式を利用することにした。

1 曲線を描く

… $a(x-b)^2+c=0$ の式において、 b の値の操作で軸を決定し、 $(b,c-a \times b^2)$ を頂点に取る放物線を描き、 a の正負によって上に凸か下に凸かを決定する。また絶対値記号を付けることでW字型の関数をとることもできる。

… $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ という方程式において、 (a,b) の値で中心点の座標を、 r の値で半径の長さを操作した。これも、 x 座標や y 座標の範囲を限定することで円の一部だけの直線が得られる。

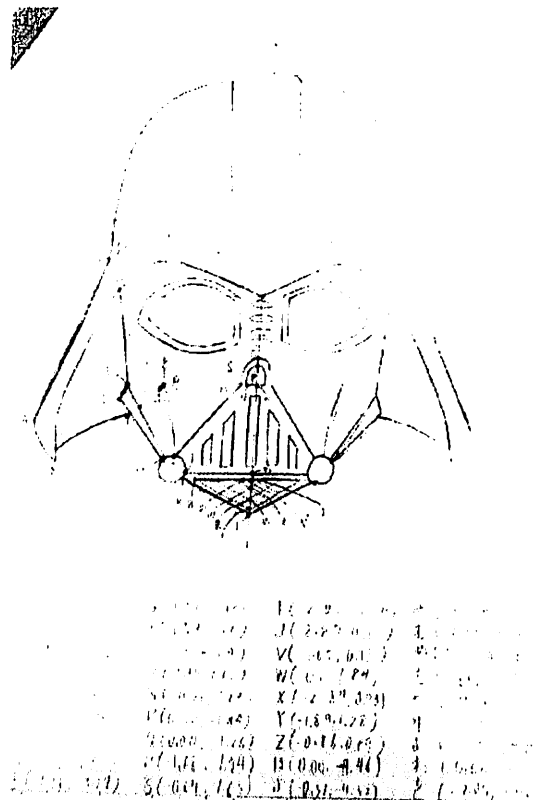
また、同様にして楕円の方程式も操作することができる。

2 直線を描く

…直線の部分には一次関数を利用し傾きや切片・範囲を操作することで求める直線を描いた。

3 完成!

これらを使って左図のダースペダーを完成させた。



カプレカ数に関する考察

1. カプレカ数とは・・・

- インドの数学者カプレカが考え出した。
- 定義：各位の数を並べ替えてできる最大の数と最小の数の差が元の数と同じ数である。
- 具体例：

$$\begin{array}{l} 495 \rightarrow 954 \\ \quad \searrow 459 \end{array}$$

$$954 - 459 = 495$$

2. カプレカ数の性質

- 9の倍数である。
- 無限に存在する。
- カプレカ数が存在しない桁数もある。例) 2桁
- 桁数を決定したとしても、カプレカ数が一通りに決まるとは限らない。
例) 8桁

3. 研究成果

- 9の倍数であることの証明
- 無限に存在することの説明
- 4ケタのカプレカ数はそれぞれ一通りに決まることの証明
- 10進法からn進法への一般化
- 後に示すn進法のカプレカ数の性質二つの証明

4. n進法におけるカプレカ数の性質

(証明済み)

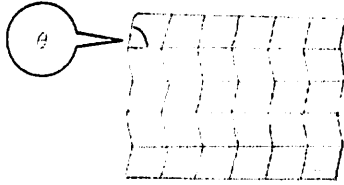
- $n-1$ の倍数である。
- $\sum_{k=1}^n (n-k)n^{k-1} - \sum_{k=1}^n (k-1)n^{k-1}$ がカプレカ数 $\Leftrightarrow n$ が偶数

ミウラ折り

金井美樹 田中里奈 中園真衣 初山美帆 上田彩花

1 要旨

ミウラ折りとは、下の図のようにゆるい角度をつけてジグザグに折る折り方のこと。



2 目的

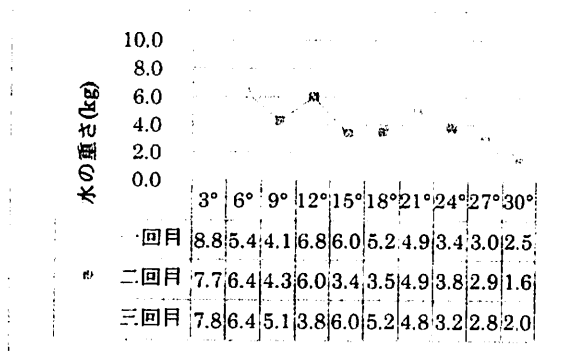
ミウラ折りは強度が大きいという性質に注目し、強度について調べる。 $\angle\theta = 6^\circ$ が身近に多いため、 6° において一番強度が大きいと仮説を立て、実験する。

3 方法

角度の変化で強度にどのような違いが見られるか実験する。水をおもりとして容器が地面についたときの水の重さを測定する。

4 結果

$\angle\theta = 3^\circ$ が最も強度が大きい。



5 考察

密度が大きいほど強度は大きい

↓ 線の数は一定より、

面積が小さいほど強度が大きい

↓ 計算すると

$\angle\theta = 0^\circ$ に近づくほど面積は小さくなり、強度は大きい

$$\text{密度} = \frac{\text{線の数}}{\text{地面に触れる面積}}$$

6 展望

強度とは違う収納・展開の簡便性など、他の視点からミウラ折りを数学的に解明したい。

7 参考文献

- ・ Wikipedia (<http://ja.m.wikipedia.org/wiki/ミウラ折り>)
- ・ ミウラ折り公式サイト (<http://www.miuraori.biz/>)

つまようじで円周率を求める

大手前高校 2年岩谷 梶原 篠崎 竹内 山根

概要 私たちは、弧度法を用いることで円周率を求めることができるビュフォンの針に興味を持った。
そこで、どうして円を用いずに円周率を求めることができるのか証明し、実際にその実験を行った。

そもそもビュフォンの針とは

平行線を引いた紙の上に針を落として交わった確率を用いて数学上の問題を解く方法
今回は「平行線の間隔が針より長いときビュフォンの針を用いて円周率を求めよ。」
という問題に取り組んだ。

行程を大まかに説明すると

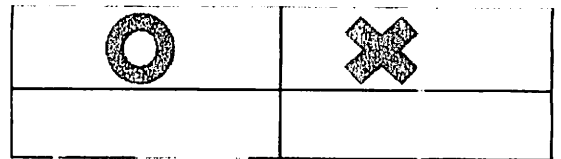
すべての事象を表す文字式を立てる①→交わる全事象を表す文字式を立てる②→

①と②を比較して交わる確率を得る

このようにして交わる確率 $p = \frac{2l}{\pi h}$ を得た

(l :針の半分の長さ h :平行線の間隔の半分 π :円周率 p :交わる確率)

なお交わったと判断する基準は次のとおりとする



・実験方法

- ① つまようじの長さを測る
- ② 等間隔に平行線を引いた紙を用意する
- ③ つまようじを投げる
- ④ 平行線とつまようじの交わる確率を計算する

この方法で、今回は試行回数を

1000回 2000回 5000回に設定して行った。

結果は以下の通りとなる

試行回数	1000	2000	5000
交わった数	409	817	2053
交わった確率	40.90%	40.80%	41.00%
出てきた円周率の近似値	3.259984	3.263937	3.22841

結論

上の図に見られるように今回の実験では、

試行回数 5000 回の時で実際の値+0.08 と思ったほど収束しきらなかつた。

わかったことは、相当な回数試してみなければなかなか収束しきらないということだ。

シミュレーターによると、100000 回試行して誤差 0.005 と、収束するまでは

相当な時間がかかるようだ。

辺の二乗和

the sum of the squares of the sides

発表者 松尾佑太

Yuta matsuo

Abstract

I researched on the relation between the sum of the squares of the sides of regular solids and the number of vertexes.

1. 目的

二次元のときには辺の本数の二乗になることがわかったので、三次元の場合はどうなるか知りたいという探求心を満たしたいため

2. 方法

正多面体の辺の二乗和を計算して規則性を見つけて一般化する。

3. 結果

三次元の場合は頂点数の二乗になる。

4. 考察

平面では辺の二乗和が辺の本数の二乗になると推測したが平面のときにも頂点数の二乗になっている。三次元でも頂点数の二乗になるので、もしかしたら四次元でも頂点数の二乗になっているではと思った。

5. 結論

三次元の場合の辺の二乗和の式を一般化すると、
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \times (n-2) \times 2^2 + 2^2 \times \frac{n}{2} \\ &= n^2 - 2n + 2n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

6. キーワード

正多面体 辺の二乗和

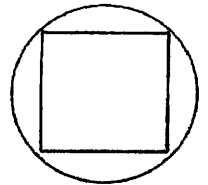
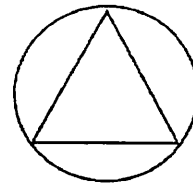
辺の二乗和～三次元～

正四面体の外接球の半径を \$R\$ とし、
正四面体の辺の長さを \$a\$ とおく。



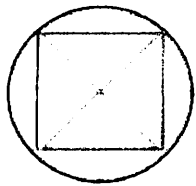
前回まで

- 半径1の円に内接する正多角形の辺の二乗、対角線の二乗の和は、正多角形の辺の数と関係あり、辺の二乗和になる。



四角形の場合は

辺の二乗和を \$a\$ とおく



$$\begin{aligned} a &= (\sqrt{2})^2 \times 4 + 2^2 \times 2 \\ &= 2 \times 4 + 4 \times 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$



仮説

- 円に内接する正 \$n\$ 角形の場合は、辺の本数の二乗になったので、球に内接するときは辺の本数の三乗になるのでは？



正四面体のときは？

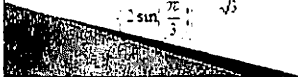
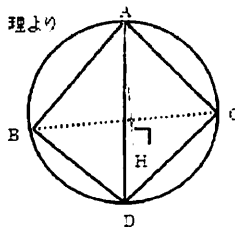
球の中心を \$O\$、正四面体の頂点を \$ABCD\$ とおく。
正四面体の一辺の長さを \$a\$ とする。

\$A\$ から \$\triangle BCD\$ に垂線 \$AH\$ を下ろすと、\$AH\$ は \$O\$ を通り、
\$H\$ は \$\triangle BCD\$ の外接円の中心であるので
\$\triangle BCD\$ について、\$R\$ を外接円として正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$2BH = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$BH = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ であるので}$$



$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}a}{3} \text{ であり} \end{aligned}$$

直角三角形 OBH について、\$OH^2 + BH^2 = OB^2\$

$$OH = AH - OA = \frac{\sqrt{2}a}{3} - R \text{ なので}$$

$$\frac{\sqrt{2}a}{3} - R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3} R$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

\$a\$ は正四面体の一辺の長さであり、また \$a > 0\$ であるので

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \epsilon = 16$$

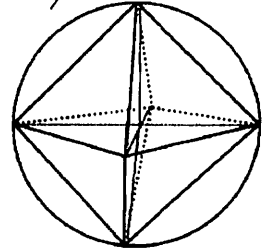


・予想した仮定はどうやら違うらしい...

正八面体のときの辺の二乗和を調べてみよう。

正八面体のときは？

$$(2)^2 \times 3 + (\sqrt{2})^2 \times 12 = 36$$



もしかして...

・正四面体のときは16、正八面体のときは36。どちらも頂点数の二乗になっている。もしかしたら、他の正多面体でも同様のことが起きるのでは？

仮説②

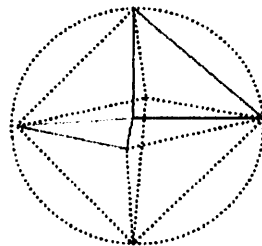
・半径1の球に内接する正多面体の辺の二乗と対角線の二乗の和が頂点数と関係あるのでは？

nの取りうる値

・頂点数をnと置いたとき、最低四個頂点が必要なので $n \geq 4$ となる。

考え方

・直角二等辺三角形が何個あるかを考える。



例えば

正八面体のとき

斜辺が、2の直角二等辺三角形について考えると、同じ長さの斜辺の直角二等辺三角形がそれぞれ4個ずつある。

よって

$$\left[\frac{1^2+1^2}{2} \times 8 - \frac{(\sqrt{2})^2 \times 2 \times 4}{2} \right] + \left[\frac{(\sqrt{2})^2 \times 2 \times 4 + \frac{1^2+1^2}{2} \times 8}{2} \right] = (1^2 \times 4)$$

一般化してみよう

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \times (n-2) \times 2^2 + 2^2 \times \frac{n}{2} \\ &= n^2 - 2n + 2n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

結果

- ・三次元のときは頂点数の二乗になる(なお正四面体のときは正四面体中に直角二等辺三角形が出来ないので、式は成り立つが私の意図した考えとはそぐわない)

考察

- ・平面では辺の二乗和が辺の本数の二乗になると推測したが平面のときにも頂点数の二乗になっている。三次元でも頂点数の二乗になるので、もしかしたら四次元でも頂点数の二乗になっているのではと思った。

感想

- ・半径1の球に内接する正多面体は頂点数の二乗になることが分かった。
- ・最初に自分の予想が間違っていて動揺したが、次の予想が当たっていてよかった。
- ・大学に入ったら四次元に挑戦してみたい。

～微積分で広がる世界～

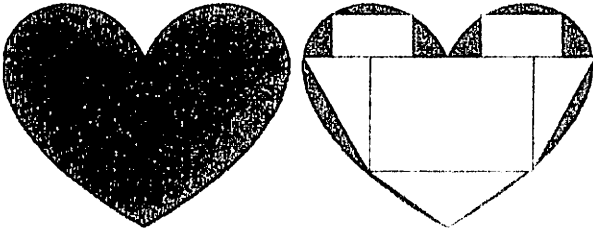
東海大学付属高輪台高校 3年9組18番 岡田 英

～微分とは

ライプニッツ、ニュートン両氏が研究していました。
接線の傾きを求めることができます。
これによりグラフの概形が分かりやすくなりました。

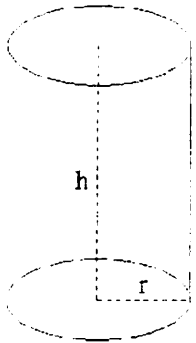
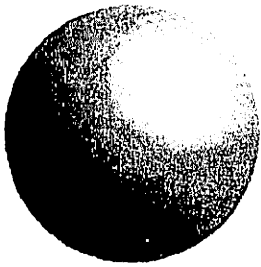
～積分とは

積分の概念は紀元前以前から考えられていました。アルキメデス氏のとりつくし法です。



とある不思議

球の体積 $\frac{4\pi r^3}{3}$ を微分すると
 $4\pi r^2$ (表面積)
つまり 体積 \rightarrow 表面積
 \uparrow 微分

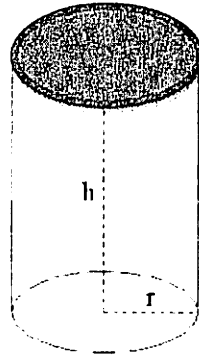
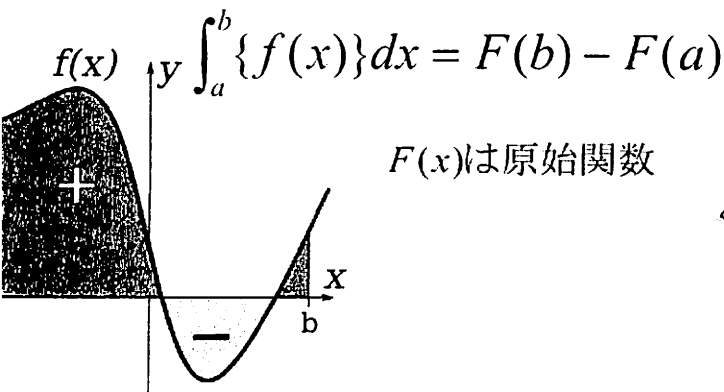


$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h \text{ (側面積)}$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi r^2 \text{ (底面積)}$$

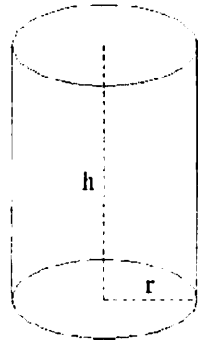
前回体積を微分したら表面積となったので、今回は表面積を積分して、体積になるということを証明していきます。



$\text{○} = S(r)$ とおくと

$$\int_0^h S(r) dh = \int_0^h \pi r^2 dh$$

$$= \pi r^2 h$$



$2\pi rh$ が r ぶん積み重なった
と考えると

$$\int_0^r S(r) dr = \int_0^r (2\pi rh) dr$$

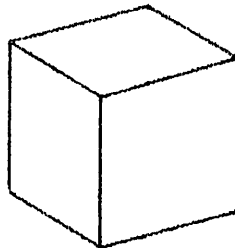
$$= [\pi r^2 h]_0^r$$

$$= \pi r^2 h \quad \dots \ast$$

二次元の求積はホヒュラーであるが、三次元でも二次元が積み重なったと考えれば求積できることがわかる。

側面積の場合でも積み重なってできていると考えれば求積できることがわかる。

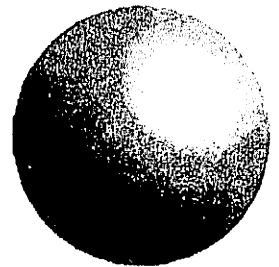
また立方体や球でも体積は求められる。



正六面体の一辺を
 a とすると
面積は a^2

$$\int_0^a a^2 dt = [a^2 t]_0^a = a^3$$

\ast



球の半径を r とおくと

$$\int_0^r 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3} \pi r^3 \right]_0^r$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \dots \ast \ast$$

$\ast \ast$



積分により平面(面積)が積み重なってできたもの(体積)ができる。また、微分により断面積の局所的なところがわかる。理論上三次元(体積)を積み重ねると、四次元の図形ができる。

野球の最適打順の数学的考察

Searching for the best batting line up

池本 陸 田中 大貴 和崎 海里

Riku Ikemoto Daiki Tanaka Kairi Wasaki

Abstract

The most powerful slugger for a team mostly hits fourth in Japan. But, we think there are little scientific reasons. Therefore, we made the mathematical model based on real baseball games and examined where the best batting position is for the slugger to win a game.

1. 目的

野球チームの最適打順を求める。具体的には、いわゆる“最強打者”の打順を何番にすればチームが最も多くの得点を取れるかを数学的に考え、さらに得点が最大となった理由についても考察する。

2. 方法

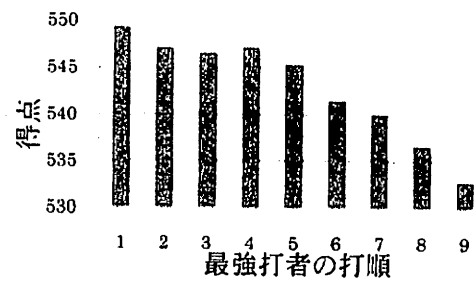
野球の試合をモデル化し、1シーズン（144試合）の総得点を計算する。試合の流れを以下の①～⑤の行程に分類し、仮想的に試合を進め、得点を計算した。

①アウト数・塁状況確認 → ②打席結果 → ③打席結果による進塁
→ ④走者の能力による進塁 → ⑤得点計算

②の結果は選手の能力に応じて確率的に定める。③は①②の結果から自動的に定まる。④については、一律に $1/2$ の確率で進塁が成功するものとした。また、盗塁、犠打は考えないものとした。打者の能力は簡単のために、8名の“普通打者と”、高い能力を持つ“最強打者”の2種類のみを設定した。試合ごとの得点にばらつきが出るが、15万回試合を行った結果の平均をとることで一定の傾向が見られた。

3. 結果・考察

最強打者を1番に置いたとき総得点は最大となった。また、3番よりも4番に置いたとき総得点は高くなった。4番はチャンスで打席が回ってきやすいため、打点が高くなるからだと考えられる。1番が最大になる理由については発表で述べる。



4. 結論

打者を普通打者と最強打者の2種類のみとした場合、最強打者は1番におくべきである。しかし一般には、1番は下位打線の影響を受けるため最適とされていない。下位打線を考慮したモデルでは4番が最適という結果が得られた。詳細は発表で述べる。

5. キーワード

野球 最適打順 セイバーメトリクス 数理モデル

野球の最適打順の 数学的考察

立命館大学附属高等学校
数学部 田中 貴之 指導

最強打者は何番に置くべきなのか？

ビロコウの公式

$$\text{勝率} = \frac{\text{得点}^2}{\text{得点}^2 + \text{失点}^2}$$

(1) によると勝率と得点は関係がある
勝つためには 得点が多くなるような打順にする

研究目的

最強打者を何番に置くと1シーズン(144試合)の
総得点が最も高くなるのか調べる。
求めた打順の総得点が高い理由を数学的に
考察する。

研究方法

野球の試合を数理モデル化する。
(打順だけを調べるので 攻撃のみ)
最強打者の打順を変えながら、総得点の
変化の様子を調べ、打順と総得点の
関係について理解を試みる。

数理モデルの概要

アウト数・塁位・盗塁
打高結果
打順結果による進塁
打者の能力による進塁
結果

実験1

目的
打順1の単純な場合として以下の仮定で最適打順を
調べる。

仮定
・同じ能力の打者(普通打者) 8人と
高い能力の打者(最強打者) 1人で打順を組む。
・盗塁と犠打は行わない。

打者の能力

普通打者
最強打者
本塁打を多く打つ
出塁しやすい
結果は...

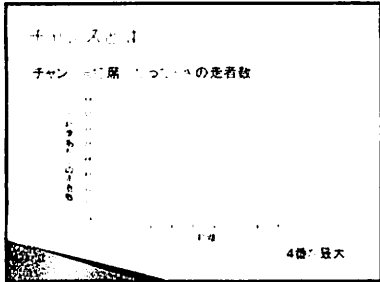
実験1の結果

総得点(1シーズン(144試合あたり))

実験1の考察

最強打者1番に置いたとき
得点が高くなる
- 1番は打席数が
最も多いことが原因？

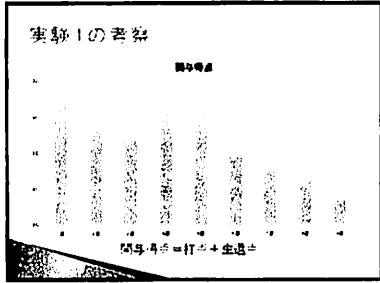
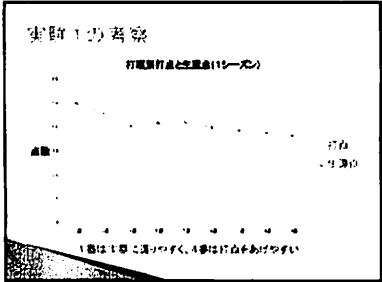
3番よりも4番が高い
- 打席数では説明できない。
- 3番は「チャンス」で打席が回ってきやすい。



指標点を合わせることの指標

- ・生還率(チャン)を高く
後続の走者によって本塁(選)を
- ・打率(チャン)を活かす
以上高い走者を選び出す

2つの指標を組み合わせて得点を評価する。



実験1のまとめ

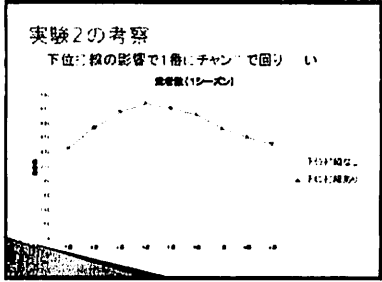
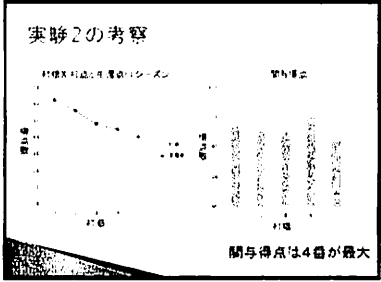
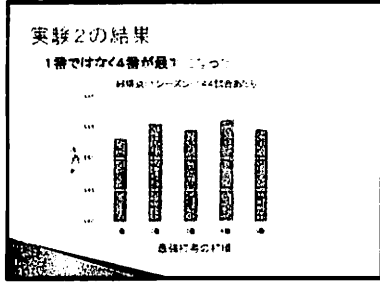
最速打者: 1番(選) *
1番が最も早く1塁に達している(4打点)から
(本塁 選) 走者を選(役割)

最速打者4番説: のずれ(下位打線を想定していない) 原因ではないか

実験2

目的
現実の状況を踏まえて下位打線を考慮する
上位打線: 下位打線を定義し最速打線を調

仮定
1~5番を上位打線とする
6~9番を下位打線とする
最速打者: 上位打線のいずれか(選)



玉との

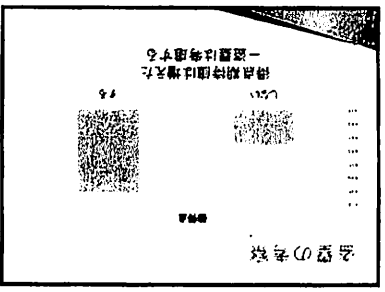
最終打者は4番位置、9から
下位打順を付け、1番
理由
生還を促すことで、相手投手から
初回は必ず1番から始まるので、終盤への影響が
大きい。

今後の課題

最終打者の能力を高め、二ゴで最終打者の上
り打順を固める。
最終打者の人数を増やし、増える。
二ゴの能力を高め、増える。

参考文献

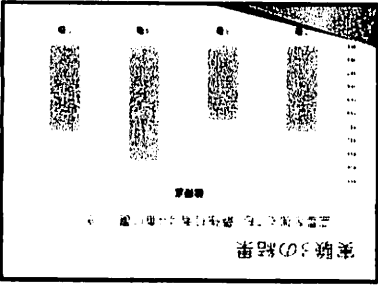
[1] James B (1983) *The Bill James Baseball Abstract 1983 Baltimore*
[2] セイゴ(メトロ)による最終打順決定モデルとそのシミュレーション(鳥取県立鳥取大学・理学部) 堀井一樹(鳥取大学理学部) 時光順平(鳥取大学理学部)



実験3

目的
各選手、近づく実験

想定
1-5番を上位打順、6-9番を下位打順とする
最終打者は2-5番のいずれか、1番打者は遊撃手とする



実験2のまとめ

最終打者は4番位置、9から
下位打順を付け、1番から
1番、1番も生還を促すから
生還を促すことで、相手投手から
初回は必ず1番から始まるので、終盤への影響が
大きい。必要であれば、指図も付く。

次が2番である理由は、今後の課題
[2]で、最終打者の能力を高め、二ゴで最終打者の上
り打順を固める。最終打者の人数を増やし、増える。
二ゴの能力を高め、増える。

実験3の目的

最終打者の能力を高め、二ゴで最終打者の上
り打順を固める。
最終打者の人数を増やし、増える。
二ゴの能力を高め、増える。

各選手の考察

目的
各選手、近づく実験

想定
1-5番を上位打順、6-9番を下位打順とする
最終打者は2-5番のいずれか、1番打者は遊撃手とする

素数を生み出しやすい数列

A Formula to Generate Prime Number

秋庭 衆 泉山 誠 名久井 颯太 棟方 英悟 山崎 航

Akiba Shu Izumiyama Makoto Nakuiryu Ryuta Munakata Hidenori Yamazaki Wataru

Abstract

In order to solve one of the problems involving prime numbers, we attempted to find a formula that would produce as many of these numbers as possible. A preliminary survey resulted in the discovery of the formula $n^2 + n + 17$, which generates prime numbers in the range $n=0$ to $n=15$.

1. 目的

素数をより多く生み出す数列の一般項を見つける。それと同時に、素数の規則性について考える。

2. 方法

素数について、「5以上のすべての素数は $6N \pm 1$ とかける」(N は自然数)ということが知られている。だが、1次式(等差数列)では周期的に何かの倍数を生み出してしまうので、素数は小さい数に多いことも考慮し、最終的な一般項の目標を2次式とした。また、 $n=1$ から連続して素数を生み出すことも目指した。

3. 結果

$n^2 + n + 17$ が $n=0$ から $n=15$ まで16回連続で素数を生み出すことがわかった。

4. 考察・結論

$n^2 + n + k$ (k は定数) が連続して素数を生み出すとき $k=6n-1$ でなくてはならない。これはオイラーが導き出した $n^2 + n + 41$ の式 ($n=0, \dots, 39$ において全て素数となる) にも当てはまる。また、 $k=17, 41$ のときに多く素数を生み出すが、この2つの数字に特別な意味があるかはまだわからない。

5. キーワード

素数 等差数列

素数を生み出しやすい数列

A Formula to Generate Prime Number

秋庭 衆 泉山 誠 名久井 颯太 棟方 英悟 山崎 航

1. 研究動機

素数には未解決問題が沢山有り、自分たちもその一端に触れてみようと思った。現在、全ての素数を求める公式は見つかっていないので、一つでも多く素数を含むような数列を見つけ出して見たいと思い、それに挑戦した。

2. 研究内容

素数について「5以上のすべての素数は $6n \pm 1$ とかける」(n は自然数)ということが知られている。(このことをこの研究では何度も活用している)この証明は容易で、以下がその証明である。

(証明)

n を自然数とし5以上の自然数は $6n$ 、 $6n \pm 1$ 、 $6n \pm 2$ 、 $6n + 3$ のいずれかの形をしている。ここで $6n$ 、 $6n \pm 2$ 、 $6n + 3$ は2または3の倍数になり素数にはなり得ない。したがって、5以上の素数は $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表わされる。

まず最初にこのことを元に、1次式(等差数列)の素数を多く生み出す式を見つけようとしたが、1次式では周期的に何かの倍数を生み出してしまうので、効率がよくない。

そこで、最終的な一般項の目標を2次式とした。以下では2次式について考えている。

前述のように、5以上の素数は全て $6N \pm 1$ (N は自然数)と書ける。そこで、まず $6N \pm 1$ に近い形の n の2次式を作りたいと考えた。

$6N \pm 1 = 3 \times 2N \pm 1$ と見た時、 $2N$ は偶数なので $n(n+1)$ と置き換えてみる (n は自然数)。すなわち $3n^2 + 3n \pm 1$ となる。

この形では、 n が1~25までの間で

- $3n^2 + 3n + 1$ が素数になったのは $n = 1, 2, 4, 5, 7, 12, 15, 17, 23, 24, 25$ の 11 個 (11/25)
- $3n^2 + 3n - 1$ が素数になったのは $n = 1, 2, 4, 5, 7, 12, 15, 20, 25$ の 9 個 (9/25)

という結果であった。しかし、 $n = 25$ で値は 2000 を超えるので、このままでは計算が大変であるし、素数は小さい数が多いので、素数を作りやすい式は、あまり値が大きくなり難いものがないだろうと思われる。

そこで、「5以上の素数は $6N \pm 1$ とかける」ことよりも「素数は小さい数が多い」ということを重視し、係数の3を取り払い、 $n^2 + n \pm 1$ としてみる。これは常に奇数であり、素数を多く含むはずである。

実際、 n が1~25までの間で、

- $n^2 + n + 1$ が素数になったのが 13 個 (13/25)
- $n^2 + n - 1$ が素数になったのが 16 個 (16/25)

合計 29 個となり、 $3n^2 + 3n \pm 1$ の 20 個よりも多く、この考えは間違いではないと思える。

今は、「素数は小さい数が多い」ということを重視した。そこでここからは $n = 1$ から連続して素数を生み出すことも目指すことにした。

$n^2 + n$ を固定して、後ろの定数部分を k とおき、 $n^2 + n + k$ が素数となる定数 k を考えた。 $n^2 + n$ は常に偶数なので、少なくとも k が奇数であることはわかる。

ここから最も良い k の値を考える、その方法として実際に式に値を代入する操作をした。ここでも「5以上の素数は $6N \pm 1$ とかける (N は自然数)」を使う。

○ $n = 1$ のとき ($P = n^2 + n + k$ とする)

$P = 1^2 + 1 + k = k + 2$ であり、

P が素数だとすると $P = 6m \pm 1$ と書ける (m は自然数) ことから、

- $P = 6m + 1$ のとき $k + 2 = 6m + 1$ より、 $k = 6m - 1$
- $P = 6m - 1$ のとき $k + 2 = 6m + 1$ より、 $k = 3(2m - 1)$

よって $k = 6m - 1$ または、 $k = 3(2m - 1)$ とあらわされることがわかる。

$n=2, 3, \dots$ のときも同様に計算すると、

○ $n=2$ のとき、 $k=6(m-1) \pm 1$

○ $n=3$ のとき、 $k=6(m-2) \pm 1$

この作業を続けるとわかるが、 $P=n^2+n+k$ が連続して素数になるには、 k は $(6 \text{ の倍数})-1$ という形でなくてはならないことが分かる。

そこで、 k に $(6 \text{ の倍数})-1$ である数 $5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, \dots$ を代入して式の値が素数になるかどうかを調べると $k=17$ つまり $P=n^2+n+17$ のとき、 $n=0, 1, \dots, 15$ においてすべての P の値が素数になった。

また、オイラーが見つけた n^2+n+41 という式では n が $0 \sim 39$ まで連続して素数になる。

3. 結果

n^2+n+17 が $n=0$ から $n=15$ まで 16 回連続で素数を生み出すことがわかった。

4. 考察・結論

n^2+n+k (k は定数) が連続して素数を生み出すとき $k=6n-1$ でなくてはならない。これはオイラーが導き出した n^2+n+41 の式にも当てはまる。また、 $k=17, 41$ のときに多く素数を生み出すが、この 2 つの数字に特別な意味があるかはまだわからない

オイラー素数の拡大

Expansion of Euler prime number

松原和真 姫野由宇 小川亮 山本和広 小野孝祐 多田有季

MatsubaraKazuma HimenoYu OgawaRyou YamamotoKazuhiro OnoKousuke TadaYuki

Abstract

We have researched on “a prime number”. “A prime number” has two divisors, 1 and itself. For example, they are 2, 3, 5, 7. . . By the way, no one has discovered the sequence of them, so we are interested in their sequence. And we watched Euler prime number. It is mysterious prime.

1. 目的

オイラー素数とは $n^2 + n + 41$ に $0 \leq n \leq 39$ を代入すると素数になるというものである。では、 $40 \leq n$ ではどうなるのか。何か規則性があるのか。疑問に思い研究を行った。

2. 方法

実際にエクセルなどを使い、 n に整数を右の図のように代入していく。図の×のところは合成数、○のところは素数となっている。ここで素数に注目したがうまく規則性などを見出すことができなかった。そこで、合成数に注目すると、 $n=40, 41, 44, 49, 56 \dots$ となっている。ある自然数を m とおくと、 $n = m + 40$ とまとめられることが分かる。このように、合成数になる n を抜き出して規則性を要領で研究を行っていく。

$n=40$	1681... ×
$n=41$	1763... ×
$n=42$	1847... ○
$n=43$	1933... ○
$n=44$	2021... ×
$n=45$	2111... ○
$n=46$	2203... ○
$n=47$	2297... ○
$n=48$	2393... ○
$n=49$	2491... ×

3. 結論

オイラー素数 $n^2 + n + 41$ において $m \geq 0, L \geq 0, k \geq 1$ の整数のとき、
 $N = (K^2L + K)M^2 \pm (K^2L - 2KL + K - 1)M + 41K^2L - KL + L + 41K - 1$
 $N = (K^2L + 4KL + 4L + K^2 + 3K + 2)M^2 \pm (K^2L + 2KL + K^2 + K - 1)M^2 + 41K^2L + 163KL + 163L + 41K^2 + 122K + 81$
 を満たすものは合成数となる。

しかし、僕たちの求めたいものは合成数ではなく素数である。この条件ですべての合成数を抜き出せたと証明できていないため、この条件を満たさないものが素数になるとは断言できない。

4. 考察

先ほどは断言できないと述べたが、上の2つの条件には対称性のようなものが見られたため、この他に条件はないと考えられる。

5. 結論

オイラー素数 $n^2 + n + 41$ において $m \geq 0, L \geq 0, k \geq 1$ の整数のとき、
 $N \neq (K^2L + K)M^2 \pm (K^2L - 2KL + K - 1)M + 41K^2L - KL + L + 41K - 1$
 $N \neq (K^2L + 4KL + 4L + K^2 + 3K + 2)M^2 \pm (K^2L + 2KL + K^2 + K - 1)M^2 + 41K^2L + 163KL + 163L + 41K^2 + 122K + 81$
 を満たすものは素数であると予想される。

6. 参考文献

素数表と素数メモ <http://members.just-size.net/prime/>

7. キーワード

素数 合成数 オイラー素数

オイラー素数の拡大



オイラー

松原和真 姫野由宇 小川匠
山本和広 多田有幸 小野寿祐

オイラー素数

$$N^2 + N + 41 \quad (0 \leq N \leq 39)$$

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131,
151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347,
383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691,
743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 11
3, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601

n = 40	1681...X	n = 57	3347...O
n = 41	1763...X	n = 58	3483...O
n = 42	1847...O	n = 59	3581...O
n = 43	1933...O	n = 60	3701...O
n = 44	2021...X	n = 61	3823...O
n = 45	2111...O	n = 62	3947...O
n = 46	2203...O	n = 63	4073...O
n = 47	2297...O	n = 64	4201...O
n = 48	2393...O	n = 65	4331...X
n = 49	2491...X	n = 66	4463...O
n = 50	2591...O	n = 67	4597...O
n = 51	2693...O	n = 68	4733...O
n = 52	2797...O	n = 69	4871...O
n = 53	2903...O	n = 70	5011...O
n = 54	3011...O	n = 71	5153...O
n = 55	3121...O	n = 72	5297...O
n = 56	3233...X	n = 73	5443...O

2つ, 4つ, 6つ, 8つ

$$N=40 \dots 40 - 40 = 0 = 0^2$$

$$N=41 \dots 41 - 40 = 1 = 1^2$$

$$N=44 \dots 44 - 40 = 4 = 2^2$$

$$N=49 \dots 49 - 40 = 9 = 3^2$$

$$N=56 \dots 56 - 40 = 16 = 4^2$$

$$N=65 \dots 65 - 40 = 25 = 5^2$$

$$N = M^2 + 40 \quad (M \text{は整数}) \text{と表せる}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
 N^2 + N + 41 & \text{に } N = M^2 + 40 \text{を代入する} \\
 & M^4 + 80M^2 + 1600 + M^2 + 40 + 41 \\
 & = M^4 + 81M^2 + 1681 \\
 & = (M^2 + 41)^2 - M^2 \\
 & = (M^2 + M + 41)(M^2 - M + 41)
 \end{aligned}$$

よって

因数分解できるので合成数である。(終)

$$N = M^2 + 40$$

$$N = 2M^2 \pm M + 81$$

$$N = 3M^2 \pm 2M + 122$$

$$M^2+40 \Rightarrow 2M^2 \pm M + 81 \Rightarrow 3M^2 \pm 2M + 122$$

$$M^2 \pm M + 41 \qquad M^2 \pm M + 41$$

(証明)

$N^2 + N + 41$ に $N = M^2 + 40 + L(M^2 \pm M + 41)$ を代入する。(ただし、 L は自然数)

また、 $M^2 \pm M + 41$ を A とおく。

$$M^4 + 80M^2 + 1600 + M^2 + 40 + 41 + L^2 A^2 + 2M^2 LA + 80LA + LA$$

$$= (M^2 - M + 41)A + (AL^2 + 2LM^2 + 81L)A$$

$$= A(M^2 - M + 41 + AL^2 + 2LM^2 + 81L)$$

A を $M^2 \pm M + 41$ に戻す

$$= (M^2 \pm M + 41)(M^2 - M + 41 + M^2 L^2 \pm ML^2 + 41L^2 + 2LM^2 + 81L)$$

因数分解できるので合成数である。 (終)

これをまとめると、...

$N^2 + N + 41$ において、

$$N = (L-1)M^2 \pm LM + 41L + 40$$

は合成数になる(これを赤の式とする)

$$n = 6m^2 \pm m + 244$$

$$n = 10m^2 \pm m + 407$$

$$n = 14m^2 \pm m + 570$$

$$n = 18m^2 \pm m + 733$$

⋮

$$6m^2 \pm m + 244 \Rightarrow 10m^2 \pm m + 407 \Rightarrow 14m^2 \pm m + 570$$

$$4m^2 + 163 \qquad 4m^2 + 163$$

また、 $6m^2 \pm m + 244$ から $4m^2 + 163$ を引くと、

$$2m^2 \pm m + 81 \text{ となる。}$$

これは、赤の式とかぶっている。

$$12m^2 \pm 5m + 489$$

$$21m^2 \pm 8m + 856$$

$$30m^2 \pm 11m + 1223$$

$$39m^2 \pm 14m + 1590$$

⋮

$$12m^2 \pm 5m + 489 \Rightarrow 21m^2 \pm 8m + 856 \Rightarrow 30m^2 \pm 11m + 1223$$

$$9m^2 \pm 3m + 367 \qquad 9m^2 \pm 3m + 367$$

また、 $12m^2 \pm 5m + 489$ から $9m^2 \pm 3m + 367$ を引くと、
 $3m^2 \pm 2m + 122$ となる。
 これは、赤の式とかぶっている。

$N^2 + N + 41$ において

$$n = (9L+3)m^2 + (3L+2)m + 367L + 122$$

は合成数になる(これを橙の式とする)

$$n = (L+1)m^2 \pm Lm + 41L + 40$$

$$n = (4L+2)m^2 + m + 163L + 81$$

$$n = (9L+3)m^2 + (3L+2)m + 367L + 122$$

これをまとめると、

$$N = (K^2L - K), M^2 = (K^2L - 2KL - K - 1), M = 4(K^2L - KL - L - 4)K - 1$$

(kは自然数)

この条件で抜き出せなかった合成数で規則性を見つける。

$6m^2 \pm m + 244$	$15m^2 \pm 4m + 611$	$28m^2 \pm 13m + 1142$	$45m^2 \pm 26m + 1837$
$10m^2 \pm m + 407$	$24m^2 \pm 7m + 978$	$44m^2 \pm 21m + 1785$	$70m^2 \pm 41m + 2858$
$14m^2 \pm m + 570$	$33m^2 \pm 10m + 1345$	$60m^2 \pm 29m + 2448$	$95m^2 \pm 56m + 3879$
$18m^2 \pm m + 733$	$42m^2 \pm 13m + 1712$	$76m^2 \pm 37m + 3101$	$120m^2 \pm 71m + 4900$
$22m^2 \pm m + 896$	$51m^2 \pm 16m + 2079$	$92m^2 \pm 45m + 3754$	$145m^2 \pm 86m + 5921$
$26m^2 \pm m + 1059$	$60m^2 \pm 19m + 2446$	$108m^2 \pm 53m + 4407$	$170m^2 \pm 101m + 6942$

$14m^2 \pm m + 570$ $19m^2 \pm 3m + 667$ $15m^2 \pm 4m + 611$ $120m^2 \pm 71m + 4900$
 赤の増加 赤の増加 赤の増加 赤の増加

これをまとめると
 $N = K^2L - 4KL - 4L - K^2 - 3K - 2M^2 = K^2L - 2KL - K^2 - K - 1M^2 + 4K^2L - 16KL - 16L - 4K^2 - 12K - 8$
 となる。

2つの規則性をまとめると、
 オイラー素数 $N^2 + N + 41$ において

$$N = (K^2L - K), M^2 = (K^2L - 2KL - K - 1), M = 4(K^2L - KL - L - 4)K - 1$$

$$N = K^2L - 4KL - 4L - K^2 - 3K - 2M^2 = K^2L - 2KL - K^2 - K - 1M^2 + 4K^2L - 16KL - 16L - 4K^2 - 12K - 8$$

のとき合成数となる。

この2つの条件を満たさない合成数はないかと考えたときに証明をすることはできなかったが、上の2つの条件には対称性が見られたため、この2つ以外に条件はないと思われる。

オイラー素数 $N^2 + N + 41$ において
 $M \geq 0, L \geq 0, K \geq 1$ の整数とすると、

$$N = (K^2L - K), M^2 = (K^2L - 2KL - K - 1), M = 4(K^2L - KL - L - 4)K - 1$$

$$N = K^2L - 4KL - 4L - K^2 - 3K - 2M^2 = K^2L - 2KL - K^2 - K - 1M^2 + 4K^2L - 16KL - 16L - 4K^2 - 12K - 8$$

のとき素数になると予想される。

断言はできないので、
 証明できるようにこれからも努めていきたい。

The end

グラフ理論を用いた正多面体の展開図の列挙アルゴリズム

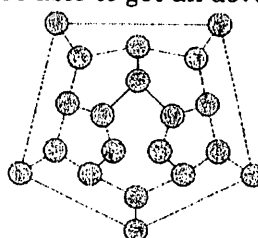
The Algorithm Enumerating Developments of Equilateral Polyhedrons By Graph Theory

福井県立藤島高等学校 眞田嵩大 田中拓巳 津原駿

Fukui Prefectural Fujishima High School Sanada Takahiro Tanaka Takumi Tsuhara Shun

○abstract

We made the algorithm that enumerates developments of equilateral polyhedrons and implemented the algorithm by using C++. We were able to get all developments for each equilateral polyhedron.



正十二面体グラフ

○目的

各正多面体の展開図をすべて列挙すること。

○方法

私たちは、まず、求めるアルゴリズムを作成するために、正多面体の展開図を列挙する方法を考察した。正多面体の展開図を列挙するために、今回私たちは、グラフ理論を用いた。なぜなら、そうすることで、展開図パターンがすべて2進数で表されるようになり、展開図列挙計算をコンピュータで容易に求めることが可能になるからである。

また、列挙した展開図の重複を除くために、排他的論理和や論理積、群論の考え方なども用いた。

○結果

私たちは、求めるアルゴリズムの作成し、各正多面体の展開図を、すべて得ることができた。また、展開図を列挙する実行時間も、最適化の工夫をすることで、4秒まで縮めることができた。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
展開図数	2	11	11	43380	43380

○参考文献

「組合せ論入門」 ポリア、タージャン、ウッズ 著

「アルゴリズムイントロダクション」第1巻 第2巻

T.コルメン、R.リベスト、C.シュタイン、C.ライザーソン 著

「二分決定グラフによる列挙の幾何への応用～正多面体の列挙～」堀山貴史 著

http://www-erato.ist.hokudai.ac.jp/html/php/kickoff_docs/horiyama.pdf

グラフ理論を用いた正多面体の展開図の列挙アルゴリズム

福井県立藤島高等学校
真田嵩大 田中拓巳 津原駿

グラフ理論について

グラフ理論とは...

頂点と辺で構成される、
グラフというものを研究する分野

グラフ理論について

グラフ理論でのグラフとは...

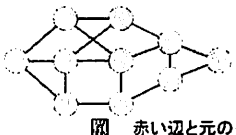
頂点集合 V , 辺集合 E
グラフ $G=(V, E)$



頂点どうしのつながり方を辺で表している

グラフ理論について

- 元のグラフ
- $G=(V, E)$



赤い辺と元のグラフの頂点からなるグラフ

- 全域木
- $G=(V, E)$
 - $V \subset V$
 - $E \subset E$

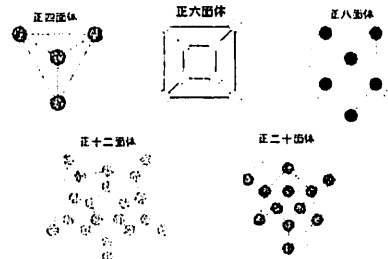


グラフ理論について

用語解説

- 経路...隣接している(2つの頂点間に辺がある)頂点の列
- 閉路...始点と終点と同じである経路
- 連結なグラフ...任意の2頂点間に経路が存在するようなグラフ
- 有向グラフ...辺に向きのあるグラフ
- 無向グラフ...辺に向きのないグラフ
- 木...連結なグラフで閉路を持たないグラフ
- 全域木...無向グラフが与えられた時に、その部分グラフで任意の2頂点を連結にするグラフ

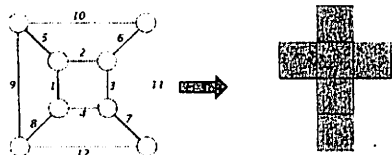
正多面体のグラフ表現



展開図のグラフ

- 正多面体のグラフから切り開く辺を選ぶと展開図ができる
※辺を切り開いてできる展開図だけを選ぶことによる (そうでないと無数の展開図が存在することになるので)

赤い辺を切り開くと...



展開図の条件

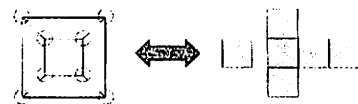
- 正多面体の切り開く辺を選んだとき展開図になるための必要十分条件は

- ①選んだ辺でできるグラフが閉路を持たない
かつ
 - ②どの頂点にも少なくとも1つは選んだ辺が接続している
- ⇔選んだ辺が正多面体のグラフの全域木である

- ①選んだ辺でできるグラフが閉路を持たない

- 切り開く辺が閉路を持つと面が切り取られてしまう

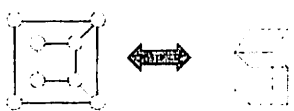
→ 展開図にならない



- ②どの頂点にも少なくとも1つは選んだ辺が接続している

- 辺が接続していない頂点があると、その部分の立体構造が切り開かれない

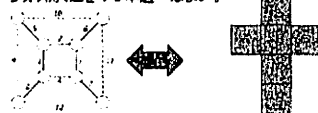
→ 展開図にならない



展開図の作り方

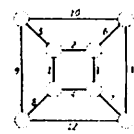
- 全域木の性質
 - 元のグラフの頂点数を V とする。
 - このとき全域木の辺数は $V-1$ 本となる。

この性質から、展開図を作るためには、正多面体のグラフから切り開く辺を $V-1$ 本選べばよい。



コンピュータでの展開図の表現

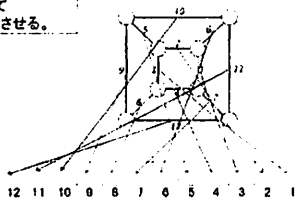
- ①辺に番号を振る。(例)正六面体の場合



コンピュータでの展開図の表現

- ①辺に番号を振る。(例)正六面体の場合

- ②辺を番号を使って二進数の桁に対応させる。

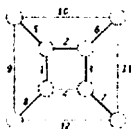


コンピュータでの展開図の表現

- ①辺に番号を振る。(例)正六面体の場合

- ②辺を番号を使って二進数に対応させる。

- ③切り開く辺を選ぶ。



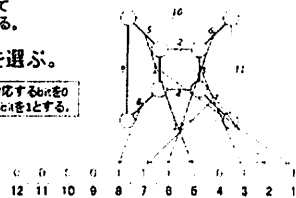
コンピュータでの展開図の表現

- ①辺に番号を振る。(例)正六面体の場合

- ②辺を番号を使って二進数に対応させる。

- ③切り開く辺を選ぶ。

- ④選ばなかった辺に対応するbitを0、選んだ辺に対応するbitを1とする。



コンピュータでの展開図の表現

- なぜ2進数で表現するのか？
 - 展開図を数値として扱える
 - ビット演算は高速に行える
 - 辺は最大でも30本だから32bit整数で扱いやすい

計算量の推測

- 多面体の辺数 E, 頂点数 V とする
- 1となるbitの個数は全域木の性質より V-1 個
- bitの選び方は展開図とならない場合も含め、

$$E^{C_{V-1}}(\text{通り})$$

正六面体の場合、12本のうち7つのbitを1にする組み合わせだから、
12C7 = 792 (通り)

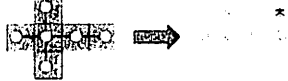
12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

計算量の推測

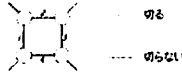
- $E^{C_{V-1}}$ は正十二面体と正二十面体のとき最大になる
- 正十二面体 E=30, V=20 と正二十面体 E=30, V=12 を代入すると...
30C12-1 = 30C20-1 = 54627300
- だけ！
- コンピュータで数秒~数分計算すれば求まりそう？

計算量の推測

- 展開図では、多面体の面を頂点としたグラフも木になっていなければならない



- 最初に、正多面体のある1つの正多角形の1つの辺を切らないでその多角形の他の辺を切る、と決めておくことができる
- 正六面体の場合



計算量の推測

- 調べるbitの組み合わせは、正多面体の正多角形の頂点数 N とすると、

$$E - N^{C_{V-N-1}}$$

- となる
 - 計算量がちよつと減った
 - 2^N 倍ぐらいはよくなる

展開図判定の方法

- 前述の方法で作った2進数には全域木でないものや、回転、裏返しにより同じになるものが含まれる
- 全域木でないもの
 - 閉路を含むものを除外すればよい
- 回転、裏返しによって同一になるもの
 - 実際に2進数に回転、裏返しの操作を行いこれまでに数えたものと同一のものがいないか判定

全域木でないもの

- 閉路があるかどうかを判定したい
- 閉路があれば全域木でない
- 閉路がなければ全域木である
 - ・なぜなら辺は V-1 本だから

全域木でないもの

- 閉路を判定するには、全ての閉路をはじめに求めておいて、論理積をとればできる



- どうやったら全ての閉路を列挙できるのか？

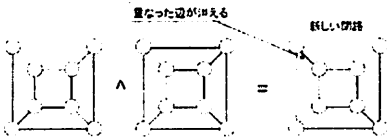
全域木でないもの~全ての閉路の列挙~

- まず正多面体の面(正多角形)の形の閉路をそれぞれの面に対して用意する
- 排他的論理和をとって新しい閉路を作る
 - 排他的論理和
 - ・ビット演算の一種
 - ・ 1^1 = 0
 - ・ 1^0 = 1
 - ・ 0^1 = 1
 - ・ 0^0 = 0

1 0 1 1 0 1 0 0
1 1 0 0 0 1 1 0
0 1 1 1 0 0 1 0

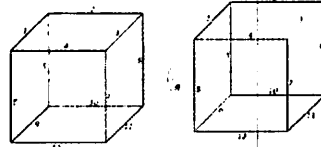
全域木でないもの~全ての閉路の列挙~

- 2つの異なる閉路の排他的論理和をとると新しい閉路ができる



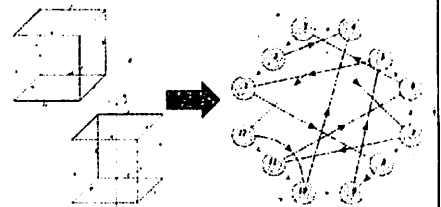
回転、裏返しによって同一になるもの

- 多面体を2つの軸で回転させて辺の番号がどのように変わるか見る
- 正六面体を例に説明する



回転、裏返しによって同一になるもの

- 辺の変わり方を有向グラフで表現



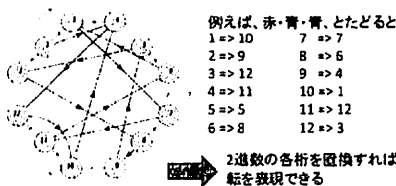
回転、裏返しによって同一になるもの

- 実は、赤い辺と青い辺を適当にたどっていくと任意の回転を作ることができる
- 置換になっている
- 正六面体群には24の置換がある
- これに裏返しの操作も加えて48通りの辺の置換がある
- 群論怖い (>.<)
- あまり関係ない



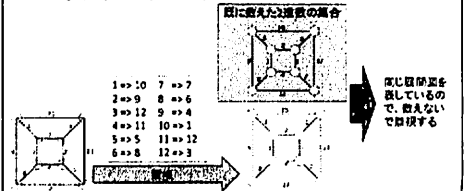
回転、裏返しによって同一になるもの

- 回転の有効グラフを使ってコンピュータで全ての回転を列挙できる



回転、裏返しによって同一になるもの

- 2進数の各桁を置換して既に数えたものと同じ展開図でないか検査する



展開図判定の方法

- データ構造に平衡二分探索木を用いると、効率的に同じ2進数があるかどうかを調べることができる
- 平衡二分探索木
 - 値の挿入、検索、削除が $O(\log N)$ ができる
 - C++ の STL に標準で用意されているので手軽に使える
 - 赤黒木とかが有名

疑似コード

```

V = 正多面体の頂点数
generate(d, e, k)
  if (e == V-1)
    check(d)
  else
    if (k == M)
      return
    d' = dのk番目のbitを1にした数値
    generate(d, e+1, k+1)
    generate(d', e, k+1)
    
```

疑似コード

```

V = 正多面体の頂点数
generate(d, e, k)
  if (e == V-1)
    check(d)
  else
    if (k == M)
      return
    d' = dのk番目のbitを1にした数値
    generate(d, e+1, k+1)
    generate(d', e, k+1)
    
```

2進数を生成する手続き
 d := 生成している2進数
 e := d の1であるbitの数
 k := 今何bit目をやっているか

疑似コード

```

V = 正多面体の頂点数
generate(d, e, k)
  if (e == V-1)
    check(d)
  else
    if (k == M)
      return
    d' = dのk番目のbitを1にした数値
    generate(d, e+1, k+1)
    generate(d', e, k+1)
    
```

1にするbitを選び終わったので展開図かどうか判定する手続きcheck()にdを渡す

疑似コード

```

V = 正多面体の頂点数
generate(d, e, k)
  if (e == V-1)
    check(d)
  else
    if (k == M)
      return
    d' = dのk番目のbitを1にした数値
    generate(d, e+1, k+1)
    generate(d', e, k+1)
    
```

今見ているbitが最後ならV-1本の辺を選んでいないのでこの2進数は無視する

疑似コード

```

V = 正多面体の頂点数
generate(d, e, k)
  if (e == V-1)
    check(d)
  else
    if (k == M)
      return
    d' = dのk番目のbitを1にした数値
    generate(d, e+1, k+1)
    generate(d', e, k+1)
    
```

再帰してdを生成していく

疑似コード

```

C = 閉路の集合
R = 回転を表す置換の集合
S =  $\emptyset$  //展開図の集合
check(d)
  for (各c ∈ Cに対して)
    if (d & c == c)
      return
  for (各r ∈ Rに対して)
    d' = dをrで置換した2進数
    if (d' ∈ S)
      return
  S = S ∪ {d}
    
```

Cは排他的論理和を使って求めておく
Rは置換を表すグラフを使って求めておく
Sは空の平衡二分探索木手続きcheck()ではSに展開図を入れていく

疑似コード

```

C = 閉路の集合
R = 回転を表す置換の集合
S =  $\emptyset$  //展開図の集合
check(d)
  for (各c ∈ Cに対して)
    if (d & c == c)
      return
  for (各r ∈ Rに対して)
    d' = dをrで置換した2進数
    if (d' ∈ S)
      return
  S = S ∪ {d}
    
```

Cは排他的論理和を使って求めておく
Rは置換を表すグラフを使って求めておく
Sは空の平衡二分探索木手続きcheck()ではSに展開図を入れていく

疑似コード

```

C = 閉路の集合
R = 回転を表す置換の集合
S =  $\emptyset$  //展開図の集合
check(d)
  for (各c ∈ Cに対して)
    if (d & c == c)
      return
  for (各r ∈ Rに対して)
    d' = dをrで置換した2進数
    if (d' ∈ S)
      return
  S = S ∪ {d}
    
```

閉路が含まれていないかを計算機を用いて検査

疑似コード

```

C = 閉路の集合
R = 回転を表す置換の集合
S =  $\emptyset$  //展開図の集合
check(d)
  for (各c ∈ Cに対して)
    if (d & c == c)
      return
  for (各r ∈ Rに対して)
    d' = dをrで置換した2進数
    if (d' ∈ S)
      return
  S = S ∪ {d}
    
```

回転や裏返しで同じになるものが存在しないかを検査

疑似コード

```

C = 閉路の集合
R = 回転を表す置換の集合
S =  $\emptyset$  //展開図の集合
check(d)
  for (各c ∈ Cに対して)
    if (d & c == c)
      return
  for (各r ∈ Rに対して)
    d' = dをrで置換した2進数
    if (d' ∈ S)
      return
  S = S ∪ {d}
    
```

dは新しい展開図だと分かったのでSにdを挿入する

C++で実装し、コンピュータに計算させた

結果

正多面体	四面体	六面体	八面体	十二面体	二十面体
展開図数	2	11	11	43380	43380

正四面体と正八面体、正十二面体と正二十面体の展開図の個数がそれぞれ等しいのは互いに双対なグラフの関係にあるため正四面体は自分自身に双対

「二分決定グラフによる列挙の応用へ」正多面体の列挙～(山本)では展開図の列挙に二分決定グラフ(BDD)と呼ばれるデータ構造を用いている。本卒大では特殊なデータ構造を用いずBDD演算によって展開図を列挙した。

参考文献

- 組合せ入門
 - クリア、タージャン、ワッス 著
- アルゴリズムイントロダクション 第1巻 第2巻
 - コルメン、リバース、レジュアン、ライオン 著
- 二分決定グラフによる列挙の幾何への応用～正多面体の列挙～
 - 山本 著 <http://www.math.tokyo.ac.jp/~yamamoto/papers/2012.pdf>

真の約数の総和に関する考察 On sums of proper divisors

秋山 健太
Kenta Akiyama

Abstract

Since I was interested in sums of proper divisors, I calculated them with a computer and studied about the results. I found that when we calculate them in succession, there are some natural numbers whose sums of proper divisors produce larger ones one after another. I studied such numbers and consider about rules.

1. 目的

(正の)真の約数の総和を次々と求めるとき、どのような値から始めても終わりが見えるかを考察する。

2. 方法

正の真の約数(以下、真の約数という)とは、整数 n の正の約数のうち、 n を除くものである。例えば、9の真の約数は1と3である。ここで、ある自然数 n を初期値とし、 n の真の約数の総和を次々と求めるといふ操作について考える。例えば、初期値を9とすると、 $9 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ という数列が得られ、最後は1という値になることがわかる。このような操作を初期値が1から10000の場合について Excel を用いて計算を行った。

3. 結果と考察

初期値によっては、計算過程で非常に大きな数が現れるものがあり、全て計算することはできなかった。3つのグループに分けて考えた。すると、計算過程で非常に大きな数が現れる数列には多くの120の倍数が連続して含まれていることに気づいた。そこで120の倍数が連続しやすいことを数学的に示すことに成功した。このことから、終わりが見えない数列も存在するのではないかというのが自論ではあるが、そのことの証明にはまだ至っていない。

4. 参考文献

「プライムナンバーズ」、David Wells 著、伊地知宏監訳、さかいなおみ訳、オーム社

5. キーワード

真の約数の総和 過剰数 完全数 不足数

真の約数の総和に関する考察

奈良女子大学附属中等教育学校
秋山 穂太

1. 真の約数の定義

真の約数：整数 n に対し、 $\pm n$ を除いた約数。

(例) 9 の真の約数 $\dots \pm 1, \pm 3$

(正の) 真の約数：真の約数のうち正であるもの。

(例) 9 の (正の) 真の約数 $\dots 1, 3$

2. 真の約数の総和

自然数 n の真の約数の総和について考える。

以下、 $\Sigma(n)$ で n の真の約数の総和を表すことにする。

(例) 9 の真の約数 $\dots 1, 3$

$$\rightarrow \Sigma(9) = 1 + 3 = 4$$

3. コンピュータによる計算

Excel を用いて、初期値が $1 \sim 10000$ である場合について、

『真の約数の総和をとる』

という『操作』をそれぞれ最大 20 回ずつ行い、どのようになるのかを調べてみた。

初期値が $1 \sim 10000$ であるものうち、それぞれのグループに属するものはいくつあったのか？

グループ	個数
①「1」で終わるもの	7441
②循環が始まるもの	214
③終わりがわからないもの	2345
計	10000

4. 増減への着目

過剰数： $\Sigma(n) > n$ をみたす自然数 n 。

(例) $\Sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$

$\rightarrow 12$ は過剰数

完全数： $\Sigma(n) = n$ をみたす自然数 n 。

(例) $\Sigma(6) = 1 + 2 + 3 = 6$

$\rightarrow 6$ は完全数

不足数: $\Sigma(n) < n$ をみたす自然数 n 。

(例) $\Sigma(8) = 1 + 2 + 4 = 7 < 8$

→ 8 は不足数

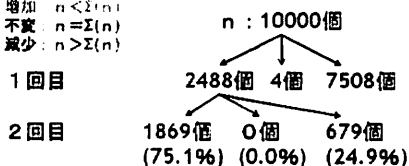
それぞれの定義から、どの自然数 n も過剰数、完全数、不足数のいずれか一つに必ずあてはまることがわかる。

では、この3種類の数は、自然数の中に、どのぐらいの割合で含まれているのだろうか？

例えば、任意に自然数一つ選ぶと、それが
完全数である確率・・・ごくわずか
不足数である確率・・・約75%
過剰数である確率・・・約25%
と考えることができる。

実際、以下のことが知られている。
「自然数の中に、完全数はほとんど存在せず、不足数は約75%の割合で、過剰数は約25%の割合で存在する」
ことが証明されている。

増加: $n < \Sigma(n)$
不変: $n = \Sigma(n)$
減少: $n > \Sigma(n)$



つまり、過剰数は過剰数を生成しやすいことがわかる。よって、一度真の約数の総和がもとの数から増加すれば、さらにその真の約数の総和も増加しやすくなる。

ここで簡単な定理を紹介する。

定理: n を自然数とする。 n が6でない6の倍数ならば n は過剰数である。
(つまり、 $\Sigma(n) > n$ が成り立つ)

この定理から数列の項が120の倍数である間は、120の倍数は6でない6の倍数であることから、その数列は増加し続けることがいえる。

もし、無限に、120の倍数が続く数列が存在すれば、

- ①有限回操作をするうちに、「1」で終わるもの
- ②途中で循環が始まるもの

のどちらでもない「増加し続ける」という新しいグループが存在することになる。

そこで以下は、

120の倍数ではあるが、240の倍数ではなく
120の倍数ではあるが、360の倍数でもなく
120の倍数ではあるが、600の倍数でもない
ような自然数 n を「理想的な120の倍数」と呼ぶことにする。

『 n が理想的な120の倍数』

⇔『素因数分解した際、
2の指数が3、3の指数が1、5の指数が1』

この理想的な120の倍数の真の約数の総和が、どのぐらいの確率で理想的な120の倍数になりやすいかを考える。

まず、自然数 n の真の約数の総和の求め方を考える。

n が素数 p, q, r, \dots と自然数 a, b, c, \dots を用いて、
 $n = p^a \times q^b \times r^c \dots$ と素因数分解されているとき、
 n の真の約数の総和は、

$$\Sigma(n) = (p^0 + p^1 + \dots + p^a)(q^0 + q^1 + \dots + q^b) \times (r^0 + r^1 + \dots + r^c) \times \dots - p^a \times q^b \times r^c \dots$$

となる。

$n = 2^3 \times 3 \times 5 \times p^a \times q^b \dots$ のとき

$$\Sigma(n) = 2^3 \times 3 \times 5 \times A$$

$$(A = \{3 \times (p^0 + p^1 + \dots + p^a)(q^0 + q^1 + \dots + q^b) \dots - p^a \times q^b \dots\})$$

つまり、

『 $\Sigma(n)$ が理想的な 120 の倍数である』
 \Leftrightarrow 『 A が 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない』

以下は、 A が 2、3、5 で割り切れるかどうかを考える。

(1) A が 2 で割り切れるか	(2) A が 3 で割り切れるか
ほとんど割り切れない	割り切れない
(3) A が 5 で割り切れるか	
検討中	

~~(1) A が 2 で割り切れるか~~ $n = 2^3 \times 3 \times 5 \times p^a \times q^b \dots$

$$A = 3(p^0 + p^1 + \dots + p^a)(q^0 + q^1 + \dots + q^b) \dots - p^a \times q^b \dots$$

A が 2 で割り切れる
 $\Leftrightarrow n$ を 120 で割ったときの商が 2 でも 3 でも 5 でも
 割り切れない平方数

\rightarrow つまり A が 2 で割り切れる確率は、かなり低いと
 考えられる。

~~(2) A が 3 で割り切れるか~~ $n = 2^3 \times 3 \times 5 \times p^a \times q^b \dots$

$$A = 3(p^0 + p^1 + \dots + p^a)(q^0 + q^1 + \dots + q^b) \dots - p^a \times q^b \dots$$

ここで、 p, q, r, \dots は特に 3 でない素数だから、
 $p^a \times q^b \dots$ は 3 で割り切れない。

一方、 $3(p^0 + p^1 + \dots + p^a)(q^0 + q^1 + \dots + q^b) \dots$ は
 3 の倍数である。

\rightarrow 従って A は 3 の倍数ではない。

6. 今後の課題

- A が 5 で割り切れるかについて検討を行い、 $\Sigma(n)$ をとる操作を繰り返しても終わりが見えなかった場合について、明らかにしていきたい。
- A が 2 で割り切れるかについても、具体的な数で確認することにより、起こりやすさを検討したい。

折り紙と数学
Math of *Origami*

石橋采夏 大西杏奈 久保田雄馬 高橋直也
Ayaka Ishibashi, Anna Ohnishi, Yuma Kubota, and Naoya Takahashi

Abstract

We tried to find how to make $1/n$ of a side of a square only by folding. We have studied the correlation between $1/n$ of a side of a square and the point P which is needed to make $1/n$, and have made efforts to find details.

1. 目的

正方形の一边を特定の折り方を用いて n 等分する方法と、それに必要な回数を考え、その回数の一般式を求める。

2. 方法

1 辺の長さが 1 の折り紙を用意する。
折り紙の各頂点に点 O, A, B, C をとる。
点 A を辺 BC 上の点 P に来るように折り紙を折る。(折り方 A とする)
辺 OA と辺 OC の交点を点 D、辺 AB と折れ線の交点を点 E とする。

3. 結果

正方形の一边を特定の折り方だけで n 等分する方法を見つけ、証明することができた

4. 考察

小さな n について、 $1/n$ を作るのに必要な回数を考えると、ある規則性に気づき、漸化式を立てそれを解き、一般項が得られた。

5. 結論

$1/n$ を作るために必要な回数についての漸化式を解くことができ、その回数を n についての式で表すことができた。

6. 参考文献

折る紙の数学 一辺の $1/7$ 、面積 $1/7$ はどう折るのか 渡部勝

7. キーワード

折り紙 $1/n$ 数列

折り紙の数学

1/n等分の作図

大阪府立天王寺高等学校
三枝 寿夫 西田 浩 大塚 健一 藤田 浩之

折り紙を「折る」だけで正方形の1辺の長さの任意のn等分を作図する

結果

紙の強度を考慮なければ任意の1/nが折るだけで作れる！

1/nを作るのに必要な回数tを考える！

結果

tの一般項を求めることができた！

基本図形

OD=1/n のときの点Pの位置

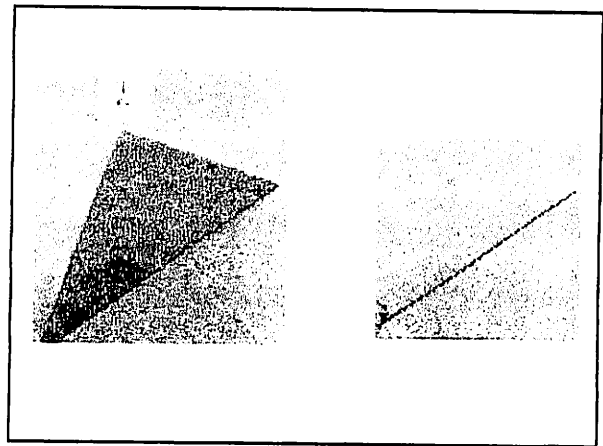
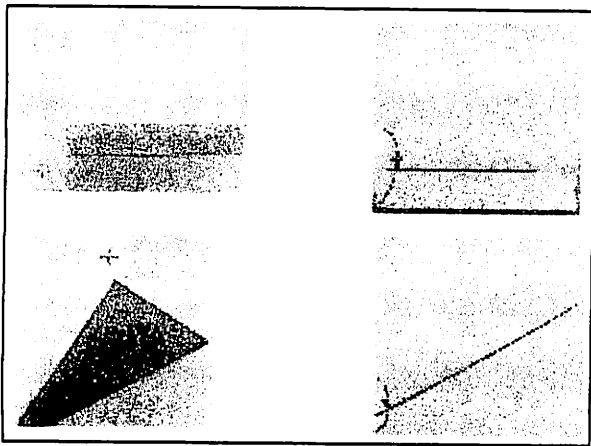
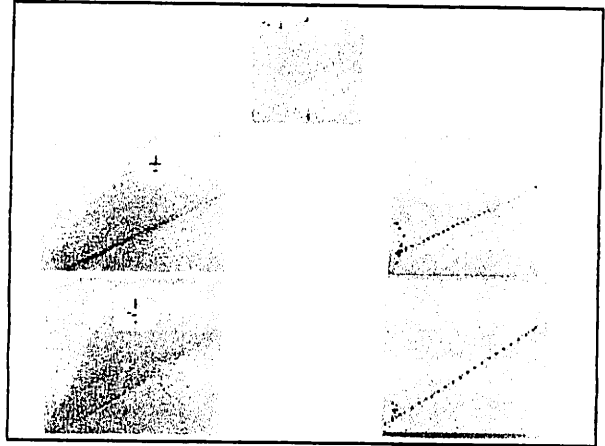
$p = \frac{2}{n+1}$

そこで...

$p = \frac{2}{n+1}$ より

n	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5	...

では、実際に1/7を作ってみよう！



n	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5	...

① → ② → ③ → ④

結果

折り紙を「折る」だけで正方形の1辺の長さの任意のn等分を作図できた！！

→レジュメ参照

①漸化式を立てる

折り方A: 点Aを辺BC上の点Pにるように折る折り方

折り方B: 1辺の2/(奇数)を作るとき1/(奇数)を折り返す折り方
(例 2/5を作るとき1/5を折り返す)

2以上の任意の自然数kについて以下のことが成り立つ。

$$2/(k+1) \rightarrow_A 1/k, 1/(2k+1) \rightarrow_B 2/(2k+1)$$

$$\therefore 1/(2k+1) \rightarrow_B 2/(2k+1) \rightarrow_A 1/(2k) \rightarrow_A 1/(4k-1) \rightarrow_B 2/(4k-1) \rightarrow_A 1/(4k-2)$$

$$1/(2k+1) \rightarrow_A 1/(4k+1) \rightarrow_B 2/(4k+1) \rightarrow_A 1/(4k)$$

$$\therefore t_{4k-2} = t_{2k} + 3, t_{4k-1} = t_{2k} + 1, t_{4k} = t_{2k} + 1, t_{4k+1} = t_{2k} - 1, (k \geq 2)$$

②漸化式を解く

実験

$t_1=1, t_2=2, t_4=6, t_6=3$ (上記のルールに従うと求められる)
 $t_{4k-2}=t_{2k}+3, t_{4k-1}=t_{2k}+1, t_{4k}=t_{2k}+1, t_{4k+1}=t_{2k}-1, (k \geq 2)$

	k=2	k=3	
$t_{4k-2} = t_{2k} + 3$	$t_2 = 2$	$t_6 = 6$	$t_{10} = 11 \dots$
$t_{4k-1} = t_{2k} + 1$	$t_3 = 2$	$t_7 = 6$	$t_{11} = 9 \dots$
$t_{4k} = t_{2k} + 1$	$t_4 = 6$	$t_8 = 6$	$t_{12} = 9 \dots$
$t_{4k+1} = t_{2k} - 1$	$t_5 = 3$	$t_9 = 4$	$t_{13} = 7 \dots$

EXCELを使ってグラフを描くと・・・



試行錯誤の結果・・・!

$$t_n = 3 \cdot \lceil \log_2(n-2) \rceil - 2 \cdot \langle n-2 \rangle + 4$$

※ $\langle N \rangle$: Nを2進数になおした時の1の数

(証明は数学的帰納法でできるが、割愛)

最後に

今回お世話になった大阪市立大学の先生方、
天王寺高校数学科竹田先生

本当にありがとうございました

参考文献

折る紙の数学- 辺の1/7, 面積1/7はどう折るのか 渡部勝
ブルーバックス

ご清聴ありがとうございました



ババぬきの数学
Math of "Old Maid"
浦上真之, 真田晴陽

Urakami Masayuki, Sanada Haruhi

Abstract

We calculated the expected value of the number of the beginning card in "Old Maid". We got some formulas about this problem.

1. 目的

ババぬきにおいて、配られるカードの枚数による有利不利を調べる。

2・3・4. 方法・結果・考察

期待値の求め方の見直し

⇒山札から1枚カードを取った瞬間ごとにおける手札の増加分の総和

① 字の種類= n 種, 1つの数字毎の枚数= ∞ 枚, 手札の枚数= x 枚

→ $n=2, n=3, n=4$ においてグラフ(ポスター参照)を書き、増加分を求めると、等比数列となる。この等比数列の和を全事象で割ったものが期待値となる。

$$\rightarrow \frac{n}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right)^x \right\}$$

②1つの数字毎の枚数=4枚(jokerがないトランプと同じ), それ以外は①と同じ

→ $n=2, n=3, n=4$ においてやはりグラフを書き、増加分を求めても、一見なんだか分からない。そこで階差数列を見てみる。すると、二つ目の階差数列が等差数列になる。

$$\rightarrow \frac{2x(4n-x)(x^2-4nx+8n^2-6n+2)}{(4n-1)(4n-2)(4n-3)} \quad \text{※未証明}$$

③実際のトランプにおいて

2人→26枚…6.983	3人→17枚…6.796	4人→13枚…6.455	5人→10枚…5.897
→27枚…7.002	→18枚…6.838	→14枚…6.575	→11枚…6.121

5. 結論

期待値は高々0.3しか変わらない

→最初に配られる手札によってゲームの有利不利はほとんど生じない

6. キーワード

ババぬき 期待値 数列

魔方陣

Magic square

井上 裕太 大西 玲 辻川 吉明 藤山 佳貴 吉村 暢浩

Inoue Yuta Onishi Rei Tujikawa Yoshiaki Fujiyama Yoshiki Yoshimura Nobuhiro
Abstract

Magic square is an arrangement of numbers in the shape of a square grid. The numbers in each row and in each column, and the numbers that run diagonally in both directions, all add up to the same number. We succeeded making a magic cube from a plane magic square.

1 目的

平面魔方陣はだれでも作れる方法がいくつか発見されている。その方法を応用することで、立方体の形をした魔方陣、つまり”立方陣“と呼ばれる縦、横、対角線の数字の和が等しくなるものを作ることができる方法を考え出す。

2 方法

平面の魔方陣の作り方を調べ、その方法を使って立体の魔方陣に発展させることができるかを検証する。ここでの立方陣は、立方体の各面の縦、横の数字の和及び各対角線の数字の和が等しいものとし、各面の斜めは無視するものとする。(各面の縦の和=各面の横の和=各対角線の和=定数)となるものである。

1 6	2	3	1 3
5	1 1	1 0	8
9	7	6	1 2
4	1 4	1 5	1

3 結果

右図のとおりにできた。

1-----32-----43-----49
102 35 18 114
58 03 41 34 25 18 8 15
111 4----22--29----38--45----50-52
00 10 37 23 21 39 12 58
1 7 53 28 44 42 28 56 5
13-- 6- --20--27----35--43----81 54
50 57 47 40 31 24 2 9
51 46 30 3
18-----17-----33-----84

4、5 考察・結論

4次の平面魔方陣の作り方を立体魔方陣の作り方に応用することができた。それ以外の魔方陣(3次、5次、7次、...)についてはできなかった。

6 参考文献

『魔方陣にみる数のしくみ 汎魔方陣への誘い』 内田 伏一 (日本評論社)

7 キーワード

魔方陣 立方陣

正多角形を表す式

An equation representing a regular polygon

井上滉士 樋口雄紀

Akito Inoue Yuki Higuchi

Abstract

We thought to be expressed by using x, y , and n in the orthogonal coordinates equations regular polygon. As a result, so we were able to make the equation, we would like to develop for this.

1. 目的

x, y, n を用いて、正 n 角形を表す式を作る。

2. 方法

r, θ, n を用いて正 n 角形を極座標で表す。そして、その式を、直交座標で x, y を用いた式に直す。

3. 結果

正 n 角形を表す方程式は、直交座標で x, y, n を用いて表すと、以下のようになる。

$$x \cos \left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n}{2\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \right) + |y| \sin \left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n}{2\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \right) = \cos \frac{\pi}{n}$$

4. 考察

逆余弦関数や、ガウス記号を用いない方法を考えたい。

5. 結論

正 n 角形を表す一般式を、直交座標で x, y, n を用いて表すことは可能だということが分かった。今後は、この内容を発展させていきたい。

6. 参考文献

なし

7. キーワード

極座標 直交座標 逆余弦関数 ガウス記号

正多角形を表す数式

清真学園高等学校

結果：正n角形を表す式

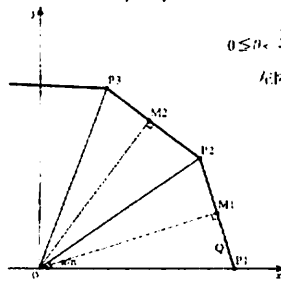
●極座標表示

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right] - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{n}$$

●直交座標表示

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2i}{n} \left[\frac{n}{2\pi} r \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \right] \right), \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2i}{n} \left[\frac{n}{2\pi} r \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \right] \right) \right\} \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$

手順①：r, n, θ を用いて、極座標表示する。



$0 \leq \theta < \frac{2\pi}{n}$ のとき

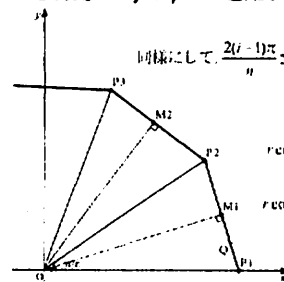
左図より、

$$OQ \cos \angle QOM_1 = OM_1$$

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right) = OP_1 \cos \angle POM_1$$

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right) = OP_1 \cos \frac{\pi}{n}$$

手順①：r, n, θ を用いて、極座標表示する。



同様にして、 $\frac{2(i-1)\pi}{n} \leq \theta < \frac{2i\pi}{n}$ ($1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}$) のとき、

$$OQ \cos \angle QOM_1 = OM_1$$

$$r \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n} - \theta\right) = OP_1 \cos \angle POM_1$$

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2(i-1)\pi}{n} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{n}$$

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) = \cos\frac{\pi}{n} \quad \dots \text{①に於いて}$$

$$\frac{2(i-1)\pi}{n} \leq n \cdot \frac{2\pi}{n} \text{より, } i-1 \leq \frac{n\theta}{2\pi}$$

$$\therefore i-1 = \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor \quad (\text{ただし, } \lfloor \cdot \rfloor \text{ はガウス記号})$$

$$\text{①に, } r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{n} \text{ となる.}$$

手順①: r, n, θ を用いて, 極座標表示する.

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{n}$$

↓ 加法定理

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor\right) \cos\theta + r \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor\right) \sin\theta = \cos\frac{\pi}{n}$$

θ の表し方

$$r \cos\theta = x$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cos\theta = x$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

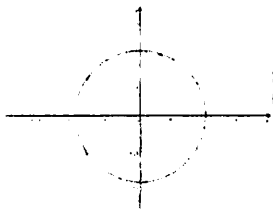
手順②: 極座標 \rightarrow 直交座標へ

$$r \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor\right) \cos\theta + r \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor\right) \sin\theta = \cos\frac{\pi}{n}$$

↓

$$\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rfloor\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rfloor\right) = \cos\frac{\pi}{n} \quad \dots \text{②}$$

(*)の注意



逆余弦関数を用いたことで、
 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、 $0 \leq y$

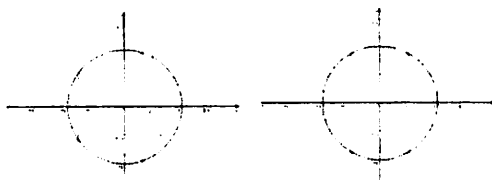
式(*)のn=5のとき

解決法

できあがる図形はすべてx軸対称であるから、

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2\pi} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right)^n \left| \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2\pi} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right|^n = \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2\pi} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right)^n \left| \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2\pi} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right|^n = \cos \frac{\pi}{n}$$

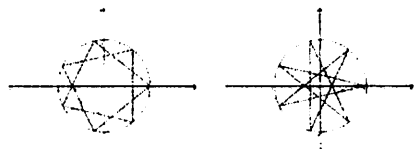


n=5

n=6

極座標表示の応用例：星の作成

$$\left(\cos \frac{m\pi}{n} - \frac{2m\pi}{n} \left[\frac{n\pi}{2m\pi} - \theta \right] \right) = \cos \frac{m\pi}{n}$$



n=7, m=2

n=7, m=3

和算～算額を通して江戸時代の数学を知る～
The WASAN ~Japanese mathematics in Edo Era~

伊藤有羽 浦野春奈 鈴木萌那 村上茜 米澤実保

Yu Ito HarunaUrano Moena Suzuki Akane Murakami Miho Yonezawa

Abstract

We are interested in the Wasan. It is a kind of mathematics which is said to have developed in Japan. They can be solved using the knowledge of modern mathematics. But, there are other solutions using old mathematics from Edo Era. So we use the book on old mathematical formulae, and solved them in a different way.

1. 目的

西洋数学が導入される以前に日本で発達していた和算について、その解法の解析をし、現代数学との相違点を調べること。

2. 方法

和算についての文献を読み、理解を深めたうえで実際に問題を解き、和算の解法と私たちの解法の相違点について調べた。また、和算の公式集があることを知り、それを研究した。

3. 結果

私たちの解いた和算の問題は、すべて現代数学の知識で解くことができた。しかし、和算の解法と必ずしも一致していなかった。公式集には多くの問題が掲載されており、その中に私たちが実際に解いた問題に似ているものがあった。

4. 考察

公式集のようなものが存在したにも関わらず、現代に和算という文化が伝わっていないのは、明治時代に日本に入ってきた西洋数学が原因と考えられる。主に娯楽として利用されていた和算は、いわゆる数学へ発展しなかったことがうかがえる。

5. 結論

和算は現代数学の知識で十分に解くことができた。和算と現代数学の直接的な関わりはなかったが、和算が広く理解されていたことで、西洋数学の導入のきっかけになっていたことが分かった。

6. 参考文献

「算法少女」(ちくま学芸文庫)

「和算の図形公式 -算法助術-」(中村信弥編著)

7. キーワード

数学 和算 算数 江戸時代

和算

～江戸時代の数学～

静岡県立磐田南高校

研究の動機

私たちは日本で独自に発展した和算に興味を持った。
磐田市の医王寺に江戸時代の算額が奉納されていると知り、実際に解くことで和算に対する理解を深めようとした。



文献を読み、和算の理解を深める

↓
医王寺を訪ね、和算額を見る

↓
和算額の問題を解いてみる

「算法少女」ちくま学芸文庫
「日本人の数学和算」講談社学術文庫

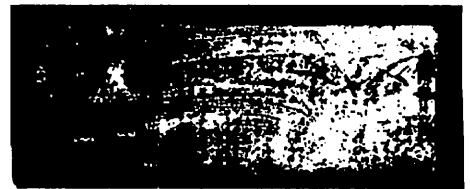
和算とは...

- 明治以前の日本独自の数学的文化であり、特に江戸時代に栄えた。
- 算額に問題が書かれ、神社や寺に奉納された

算額とは...

- 自分で問題を作り、神社や寺に奉納した和算の問題
- 全国で盛んであったが、和算の衰退や板の老朽化、または戦火によりほとんどは消失
- 現在では、全国に約1000枚が残るのみとなった

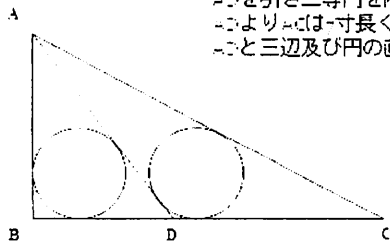
算額



今有 股弦内如円
欲容 二等円云從
界弦 全弦寸長七
寸鉤八寸界 玄
及内徑 合四 合日
界弦一十寸全弦
一十七寸何一十五
寸内徑四寸
術曰列 數以鉤
相乘五十六步加入
鉤算百二十八之九百寸
六十又加入鉤
得一寸十四步平方開之
得商三十二寸加入鉤
四十寸以四除之得
界弦一十寸依之得
合高

... 一部抜粋 ...

問題1



直角三角形がありその中に図のように
二円を引き二等円を内接させる。
二円より二円は一寸長く、二円は二寸である。
二円と三辺及び円の直径の長さを求めよ。

解法～問題1

● 私たち

図の様におく。

△ABDにおいて三平方の定理より

$$8^2 + BD^2 = x^2$$

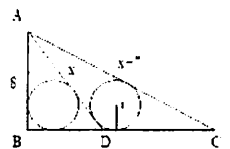
△ABCにおいて三平方の定理より

$$8^2 + (BD + DC)^2 = (AD + 7)^2$$

$$\triangle ABD \text{の面積は } 8BD \times 1/2 = r(8 + BD + AD) \times 1/2$$

$$\triangle ADC \text{の面積は } 8DC \times 1/2 = r(7 + DC + 2AD) \times 1/2$$

これを解いて、AD=10 r=2 BD=6 DC=9

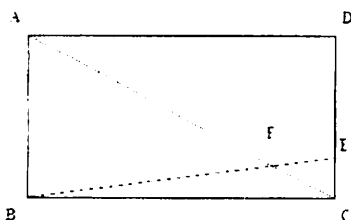


● 和算

$$\text{外弦 } 8^2 + (BD + DC)^2 = (AD + 7)^2$$

問題2

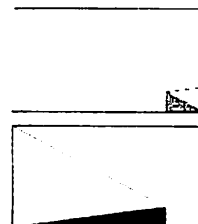
長方形ABCDがあって線分BEの2乗と線分ABとの和は237寸で線分AFは13寸6分、線分FCは3寸4分である。長方形の2辺の長さを求めよ。



解法～問題2

- 相似

相似と三平方の定理を利用
求める2辺の長さは 8寸、15寸

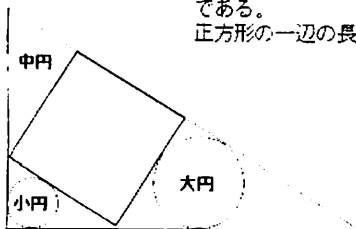


- 和算

本質的に和算
最後に5次方程式として与えられて解く
[和算] 長方形の2辺の長さを求めよ
[和算] 長方形の2辺の長さを求めよ

問題3

直角三角形の内に正方形と大中小の円を内接させた。三円の直径の和は9.4寸で斜辺と正方形の一边との差は1.5寸である。正方形の一边の長さを求めよ。



解法～問題3

- 相似

相似と三平方の定理を利用

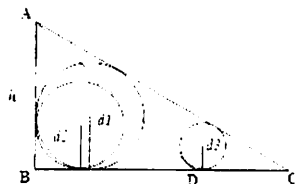
- 和算

5次方程式を解く
なぜこの解法が用いられたのかは説明できず

公式例

$\triangle ABC$ は $\angle B=90^\circ$ の直角三角形
円はそれぞれ $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$ に内接している。
円 O_1 、 O_2 、 O_3 の直径をそれぞれ d_1 、 d_2 、 d_3 、 $AB=h$ とすると、

- $d_2 h + d_3 h - d_2 d_3 - d_1 h = 0$



考察 I

どうして和算は衰退してしまったのだろうか？

明治時代、文明開化により外国からさまざまな文化や学問が入ってきた

ほとんどの学問は、洋学の方が進んでいた
数学において和算も西洋数学の方が進んでいると
見なされ、廃れていった

考察Ⅱ

どうして和算は衰退してしまったのだろうか？

日本では和算が主に民衆によって娯楽や商売のために利用されていた

一方、西洋では数に対する概念が自然科学との関わりにより発展していった

洋学の他の学問を理解するためには西洋数学が必要だった

したがって和算は必要性を失い、衰退した

考察Ⅲ

しかし、和算に基づいた数に対する概念が日本人の中に根付いていたため、

西洋数学導入の際、日本人は短い期間でそれらの内容の理解を深めることができた。

まとめ

- 日本には独特の和算という文化があった
- 医王寺にある算額を私たちが習っている数学により解くことができた
- 和算の公式による考え方を知ることができた
- 和算は衰退したが、日本人が西洋数学を学ぶにあたり、その概念は役に立つものとなった

今後の課題

- 医王寺以外にある算額の問題も解いてみる
- 公式を使いこなし、応用する
- 定理を発見する

参考文献

- 「算法少女」(ちくま学芸文庫)
- 「日本人の数学和算」(講談社学術文庫)
- 「和算の図形公式 - 算法助術 - 」(中村信弥編著)
- 「中国の数学と日本の数学」(小松彦三郎)
- 「綴術算経の異本と成立の順序」(小松彦三郎)
- 「建部賢弘の三つの公式」(森本光生)
- 「建部賢弘の数学とその思想」(村田全)
- 「算額問題」(日経サイエンス 1998年7月号)

おとけし～音を数式に変換～ OTOKESI～express sounds as functions～

秋山雄貴 牧野史明
Akiyama Yuki, Makino Fumiaki

Abstract

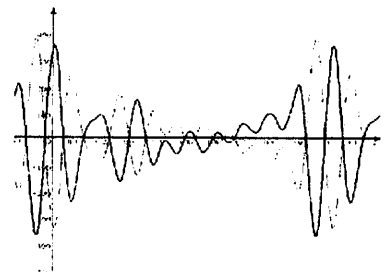
When we researched noise control, we found that the original sound vanishes when hit by a sound of the opposite phase to it. Sounds can be expressed as functions. So we expressed the sounds as functions and then formed the functions that could express the opposite phase of them. The functions canceled each other out and the sounds also canceled each other out.

1. 目的

ノイズキャンセラーはある音に逆位相の音を当てることで雑音を消している。音は波だから関数である。音を数式に変換する方法を考え、数式で音を消すことに挑戦した。

2. 方法

音を数式に変換する方法を調べたところ「フーリエ変換」が有効であることが分かった。「あ～」という声を「振駆郎」「音知」のフリーソフトを用いて音の波形や周波数成分などを調べ数式に直し、逆位相の数式を考えた。また、簡単な波形を自分たちでフーリエ級数展開してみた。グラフ、音の出力を用いて音が正しく逆位相に変換されていることを確かめる。



3. 結果

正位相の関数と逆位相の関数は打ち消しあった。数式における逆位相への直し方が正しいと分かった。

4. 考察

逆位相に直した数式はグラフや音の出力によって、正しいことが確認出来た。次にスピーカーで右からは正位相、左からは逆位相の音を出力すると、スピーカーの位置によって音の強弱が変わるだけで、打ち消し合うことは出来なかった。それは音の出力位置がずれていることで位相がずれたことによるためと考えられる。今後はスピーカーの位置による変化を考えてみたい。

5. 結論

音を数式に直しても可能だった。逆位相に変換した数式は正しかった。三角関数の性質 $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$ が声のような複雑な関数にも成り立つことが分かった。

身近なところに三角関数の性質が感じられ、感動した。

6. 参考文献

図解解説 音の仕組み 音のなんでも小事典

7. キーワード

ノイズキャンセラー 近似 フーリエ変換

おとけし ～音を数式に変換～

- 数学班 秋山雄貴 牧野史明
- 指導者 石井裕基

1

動機

- ノイズキャンセラーはある雑音に対してその逆位相の音を当ててやることで、雑音を軽減するものである。
- デジタル式のノイズキャンセラーは音を数値化して処理していることが分かった。
- 私たちはこのプロセスに注目して、音は波なので関数に表わすことが出来ることを利用し、音を数式に変換してもノイズキャンセラーと同様のことが出来ると思った。

2

仮定

- ある音を数式に変換し、変換した数式の位相をずらした数式を考える。その式と元の音を同時に出力することで元の音は消えると仮定した。

方法

- 音を近似式を用いて数式に変換する。
- 近似した式の逆位相の式を考える。

3

近似方法

- 「様々な関数(波形)はsinやcosの足し算で表すことができる」

by ジョゼフ・フーリエ

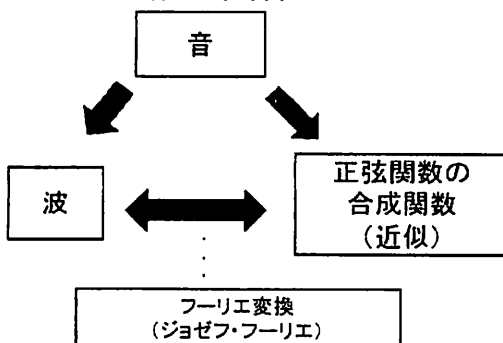
- フーリエ変換(フーリエ級数展開)

光のスペクトル解析

音の周波数成分解析

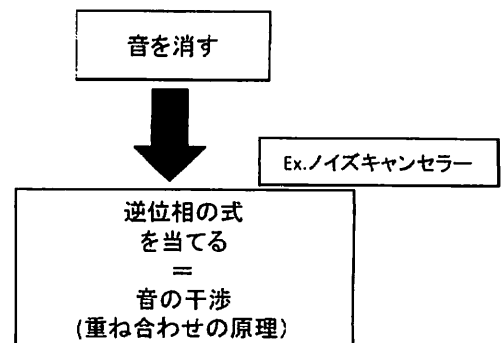
4

相互関係




5

相互関係



6

フーリエ級数展開 矩形波



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \sin n t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin n t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos n t \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \cos n \pi - \frac{1}{n} \right)$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n t$$

7

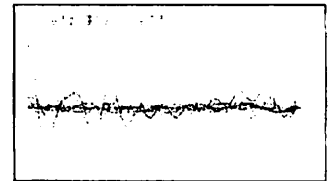
フーリエ変換

牧野君の「あ〜」

オシロスコープで
波形を確認
(撮影部)

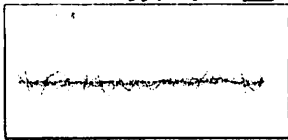


フーリエ変換
(音知)



8

数式に直してみた

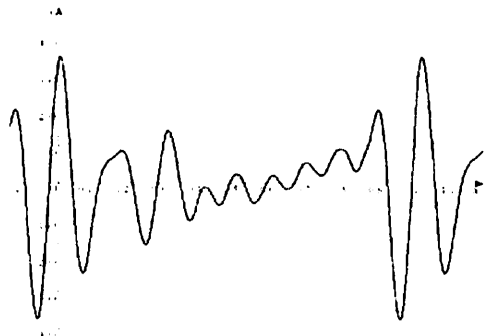


$$A \sin \pi \left(2ft + \frac{\theta}{180} \right)$$

$$30.4 \sin \pi(2x+0.94) + 28.2 \sin \pi(4x+1.47) + 14.2 \sin \pi(6x+1.82) + 23.6 \sin \pi(8x+0.13) + 23.4 \sin \pi(10x+0.38) + 78.7 \sin \pi(12x+0.48) + 100 \sin \pi(14x+0.34) + 61.4 \sin \pi(16x+0.32) + 47.4 \sin \pi(18x+0.57) + 65 \sin \pi(20x+0.59) + 12.9 \sin \pi(22x+0.23) + 7.4 \sin \pi(24x+0.68) + 1.7 \sin \pi(26x+0.93) - 3.3 \sin \pi(28x+1.34) + 1.8 \sin \pi(30x+1.67) + 1.6 \sin \pi(32x+1.81) + 1.2 \sin \pi(34x+0.06) + 1.3 \sin \pi(36x+0.25) - 0.9 \sin \pi(38x+0.58) - 0.8 \sin \pi(40x+0.91) - 0.8 \sin \pi(42x+1.35) + 1.3 \sin \pi(44x+1.61) + 1.3 \sin \pi(46x+1.85) + 2.3 \sin \pi(48x+0.03) - 3.4 \sin \pi(50x+0.16)$$

9

正位相のグラフ



10

逆位相の数式に変換！

$$A \sin \pi \left(2ft + \frac{\theta}{180} \right)$$



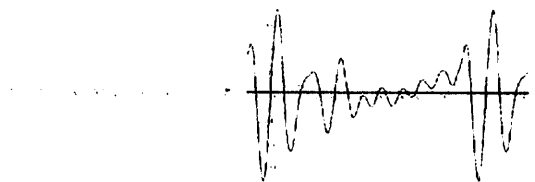
位相を180° ずらす

$$A \sin \pi \left(2ft + \frac{\theta + 180}{180} \right)$$

これは正しいのか？

11

逆位相のグラフ 合わせたグラフ



12

結果 考察

- グラフでは互いに打ち消し合う関数であることが分かり、数式の逆位相への変換の仕方は正しいと分かった。
- 実際にスピーカーで右からは正位相、左からは逆位相の音を出力すると、スピーカーの位置によって音の強弱が変わるだけで、打ち消し合うことはなかった。それは音の出力位置がずれていることで位相がずれたことによると考えられる。

13

結論

- 音を数式に直してもノイズキャンセラーと同様のことが出来た。

全体の感想・まとめ

- 身の周りのことを数学的に考えることで数学に対する興味、関心が増し、起こる現象には数学が大きく関与していることを再認識した。
- 声のような複雑な関数にも三角関数の性質 $\sin(\theta - 180^\circ) = -\sin \theta$ が適応されると実感し感動した。

14

参考文献・URL

- 図解解説 音の仕組み 中村健太郎
- 音のなんでも小事典 ブルー・ボックス
- 宇都宮大学 <http://arx.ee.utsunomiya-u.ac.jp/azuma/courses/O2Elab2/exercise.html>
- 明治大学 <http://www.isc.meiji.ac.jp/~re00074/Cprogram/fourie.htm>
- ウィキペディア <http://ja.wikipedia.org/wiki/>

15

ダイヤモンドアラベスク

岸上才十 牧祐司 近藤佑紀
Kishigami Saito, Maki Yuji, Kondo Yuki

Abstract

It has been learned that there are many kinds of questions which deal with "a diamond arabesque pattern", which can be solved in many ways. Some questions which deal with it have been made.

1. 目的

数学パズルに興味を持ちインターネット等で調べていた時に、ダイヤモンドアラベスクの問題（規則性のある図における模様の特徴の個数の比を求める問題）を見つけ、それを解き実際に問題を作ってみようと考えた。

2. 方法

- ①単位を見つける。最小単位は・・・？
- ②秀吉方式を用いる。秀吉方式とは・・・？
- ③万華鏡を用いる。
- ④1つの模様からの距離を考えてみる。



ゾムツールを用いて問題作り

3. 結果

①は図形の中で単位となるような図形を見つけることでパズルを解くことができた。②は折り紙を使って同じ模様を作ろうとしたが、うまく作れなかった。③は万華鏡を作ったが鏡の歪み等で、思ったような物が作れず、上手いかなかった。④はどの模様から距離を測るとよいか分かりづらかった。

4. 考察・結論

問題を解くには最小単位を見つけ出すことが、これまで行ってきた解き方の中で最も適切であることが分かった。ゾムツールを用いて問題を作ることは出来たが、もっと難易度の高い問題を作っていきたいと考えている。

5. 参考文献

<http://www.imd-g.com/framepage1.htm> (IMDパズルランド)
とっておきの数学パズル ピーターウィンクラー著 日本評論社

6. キーワード

ダイヤモンドアラベスク 最小単位 ゾムツール

万華鏡の研究
Research of Kaleidoscope

蔭山 佑樹 服部 イアン 明光 就平 村上 鉄馬
杉浦 史弥 松井 勇介

Yuki Kageyama Ian Hattori Shuhei Myoko Kenta Murakami
Sugiura Fumiya Matui Yusuke

Abstract

We have an aim that mathematically analyze kaleidoscope. So we are researching of the reflection of the light of the kaleidoscope and the relation to the polyhedron. We examined why side of seeing was reflected into the kaleidoscope.

1. 目的

万華鏡の像と視野角の関係性を求める。

2. 方法

スリー・ミラー・システムの場合、図1のように定義すると、n次像の視野角の関係式は、

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^n \theta_k\right) = \frac{\frac{a}{2} + na}{L}$$

テーパード・フォー・ミラー・システムの場合、図2のように定義し、n次像の視野角の関係式を求める。

3. 結果

テーパード・フォー・ミラー・システムのn次像の視野角の関係式は、

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^n \theta_k\right) = \frac{\frac{a}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta\right)}{1 + \frac{a}{L} \left(\sum_{k=1}^n \sin 2k\theta\right)}$$

4. 考察

$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^n \theta_k\right) > \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k\right)$ のとき、n+1次像は、見えない。

5. 結論・展望

テーパード・フォー・ミラー・システムにおいてのn次像の視野角の関係式は求まったので、これを使って像が見えなくなる次像数の求め方を証明する。

6. 参考文献

ジオメトリック・アートカスパー・シュアーベ+石黒敦彦 著

7. キーワード

万華鏡 テーパード・フォー・ミラー・システム 視野角

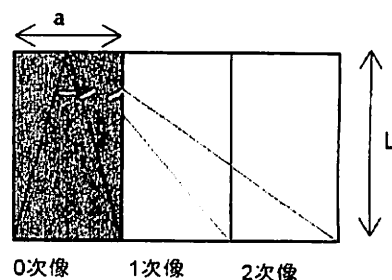


図 1

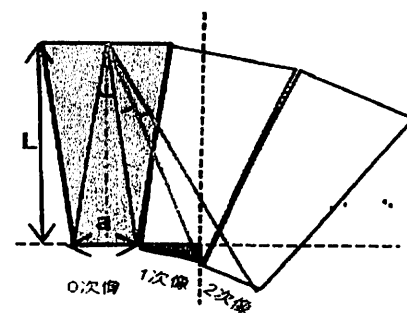
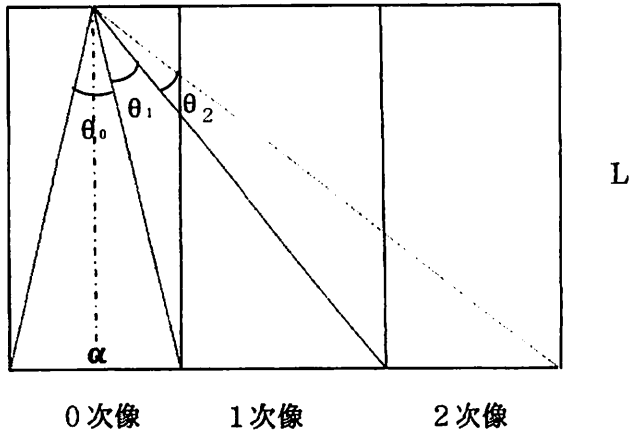


図 2

万華鏡の研究

蔭山 佑樹 服部 イアン 明光 就平 村上 鉄馬 杉浦 史弥 松井 勇介

- 1 万華鏡を覗いたときの視野角を求める。
 (1) スリー・ミラー・システムについて



1次像

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{L}$$

2次像

$$\tan \left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 \right) = \frac{\frac{\alpha}{2} + \alpha}{L}$$

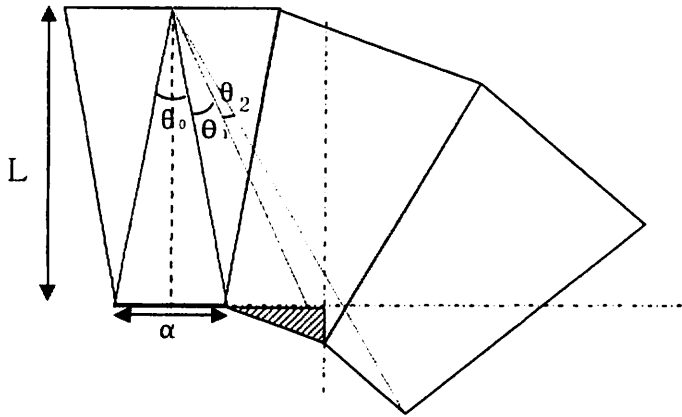
3次像

$$\tan \left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2 \right) = \frac{\frac{\alpha}{2} + 2\alpha}{L}$$

n次像

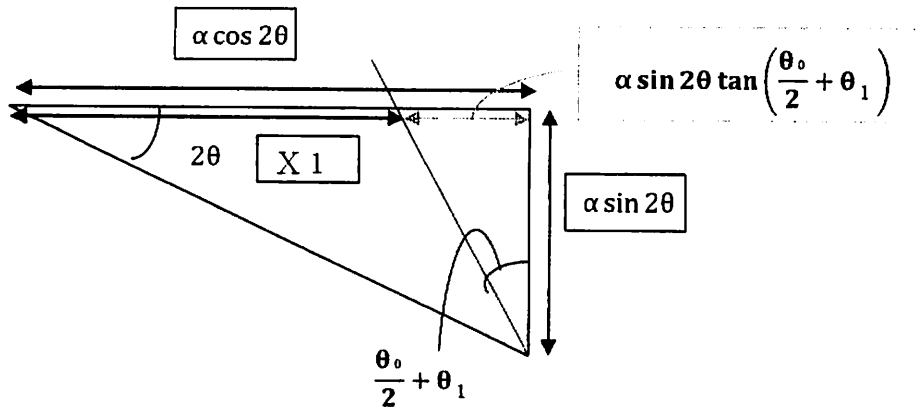
$$\tan \left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^n \theta_k \right) = \frac{\frac{\alpha}{2} + n\alpha}{L}$$

2. テーパード・フォー・ミラー・システムについて



斜線部分の直角三角形を拡大した。

1次像



図より

$$X1 = \alpha \cos 2\theta - \alpha \sin 2\theta \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right)$$

また

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) = \frac{\frac{\alpha}{2} + X1}{L}$$

$$X1 = L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) - \frac{\alpha}{2}$$

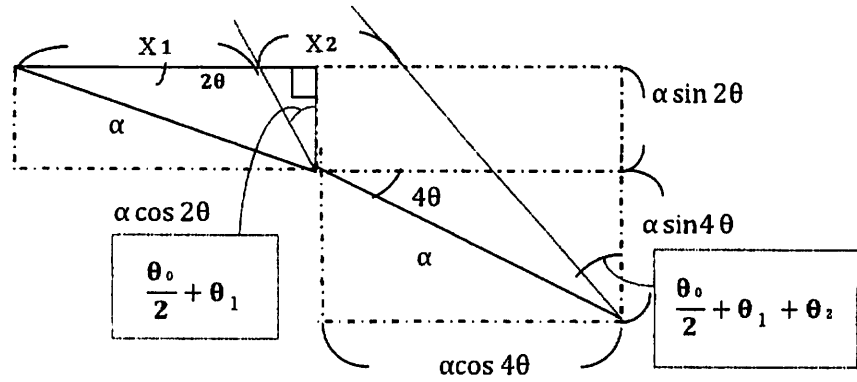
$$\alpha \cos 2\theta - \alpha \sin 2\theta \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) = L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) - \frac{\alpha}{2}$$

$$L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) + \alpha \sin 2\theta \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) = \alpha \cos 2\theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right)(L + \alpha \sin 2\theta) = \alpha \cos 2\theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right) = \frac{\alpha \cos 2\theta + \frac{\alpha}{2}}{L + \alpha \sin 2\theta} = \frac{\frac{\alpha}{L} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{\alpha}{L}(\sin 2\theta)} \dots \textcircled{1}$$

2次像



図より $X1 = \alpha \cos 2\theta - \alpha \sin 2\theta \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1\right)$

$$X1 + X2 = \alpha \cos 2\theta + \alpha \cos 4\theta - (\alpha \sin 2\theta + \alpha \sin 4\theta) \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right)$$

また $\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) = \frac{\frac{\alpha}{2} + X1 + X2}{L}$

$$X1 + X2 = L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) - \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha \cos 2\theta + \alpha \cos 4\theta - (\alpha \sin 2\theta + \alpha \sin 4\theta) \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) = L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) - \frac{\alpha}{2}$$

$$L \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) + (\alpha \sin 2\theta + \alpha \sin 4\theta) \tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) = \alpha \cos 2\theta + \alpha \cos 4\theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right)(L + \alpha \sin 2\theta + \alpha \sin 4\theta) = \alpha \cos 2\theta + \alpha \cos 4\theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2\right) = \frac{\alpha \cos 2\theta + \alpha \cos 4\theta + \frac{\alpha}{2}}{L + \alpha \sin 2\theta + \alpha \sin 4\theta} = \frac{\frac{\alpha}{L} \left(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \frac{1}{2} \right)}{1 + \frac{\alpha}{L} (\sin 2\theta + \sin 4\theta)} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、n次像の時は

$$\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \sum_{k=1}^n \theta_k\right) = \frac{\frac{\alpha}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2\theta_k \right)}{1 + \frac{\alpha}{L} (\sum_{k=1}^n \sin 2\theta_k)}$$

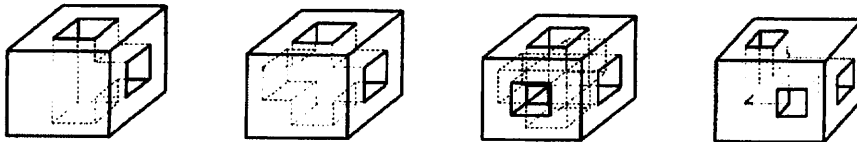
数学活用プレゼンテーション授業より
Considerations from a certain mathematics' textbook
沼田康平, 野崎唯雄, 恩田直登, 井上立之
Kouhei Numata, Yui Nozaki, Naoto Onda, Tatsuyuki Inoue

Abstract

We introduce three researches from classes using a new textbook, 'Sugaku Katsuyo'.

1. オイラーの多面体定理の適用(沼田, 野崎)

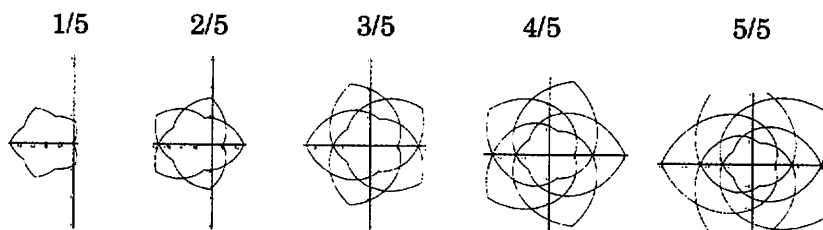
多面体を三角形分割し, 頂点, 辺, 面の数を調べ, オイラーの多面体定理を適用し, 下図のような複雑な立体が何個の穴をもつ閉曲面に同相であるかを調べる. それにより, 穴の数(種数)についての予想を得ることができる.



2. メビウスの立体帯(恩田)

1. 目的 メビウスの帯を拡張する.
2. 定義 n 角柱の端を m/n 回転させてつなげたものをメビウスの立体輪と定義する.
3. 結果 メビウスの立体輪の辺を紐に見立てたときの結び目を考えると, ある規則的な図形が浮かび上がる;

3.1 例 5 角柱の端を $m/5$ 回転($m=1,2,3,4,5$)させたメビウスの立体輪の結び目は以下の通りになる;



3. 任意の線分を n 等分する方法(井上)

1. 目的 線分を任意の数に等分する一方法を提示する.
2. 方法 藤本修三氏考案の"漸近法"を援用し, 漸化式を立てることにより, 漸近法の作業における極限を求め, "漸近的に" n 等分が可能であることを提示する.
3. 結果 その漸化式は一般化され, それを任意の数に適用する際に, 偶数の場合には 2 で割り, 奇数の場合は 1 を引くという作業を繰り返すことによって, どのように漸近法を適用すればよいか分かる. その作業を行う回数が n の自然数の個数はフィボナッチ数列の第 $n+1$ 項と一致することが分かる.

モンティ・ホール問題

Monty Hall problem

片岡 陽子 富田 瞳
Yoko Kataoka, Hitomi Tomita

Abstract

We use the Monty Hall problem to achieve the highest probability for a correct answer from among several options. It is advantageous to keep to the first choice until the last opportunity to select a different option, changing only at the final opportunity.

1. 目的

モンティ・ホール問題とは、1つの当たりを含む3つのドアからどのような選択をすれば最も当たりやすいのかという問題である。

モンティ・ホール問題のドアの数を n 個と一般化したとき、最も有利な選択の仕方を求める。

2. 方法

扉の数が1個, 2個……6個のとき、樹形図を用いてすべての選択パターンを書き出し、それぞれの当たりを当てる確率を求めた。その結果を用いて最も有利な選択の方法予想し、数学的帰納法と背理法を用いることにより証明した。

3. 結果

- 最後の選択の仕方のみ違う2つの当たる確率が1となる。
- ずっと stay し続けるときが最も当たりにくいと証明された

4. 結論

最後の選択まではずっと stay し続けて、最後のみ change すれば、当たる確率が最も高くなる。

5. 参考文献

TETRA'S MATH 数学と数学教育.

6. キーワード

モンティ・ホール問題 確率 数学的帰納法

モンティ・ホール問題

大阪府立千里高等学校
3年2組片岡陽子
3年6組富田暁

1 ページ

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題とは？

変えるor変えない

どちらが当たる 確率が高いのか？

5 ページ

モンティ・ホール問題

-モンティ・ホール問題とは？-

昔、あるアメリカのテレビ番組で
行われた選択ゲーム。

どんな選択をすれば勝てるのか？

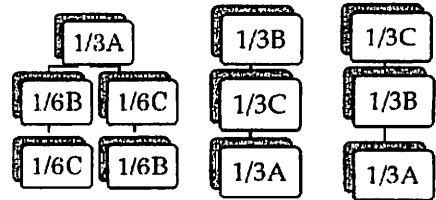
いろんな意見の飛び交う謎の問題。

2 ページ

モンティ・ホール問題

考察1:ドアが3つの場合(Aが当たりのとき)

Change (変える場合)



当たる確率 $\cdot 2/3$

6 ページ

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題とは？

-条件-

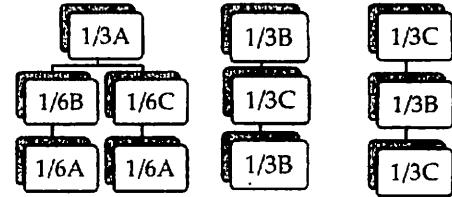
- ・ 3 個のドアがあり、あたりは一つ
- ・ 初めに回答者が一つ選んで
出題者がはずれのドアを一つあける
- ・ 次に回答者がドアを
変えるか変えないかを選べる

3 ページ

モンティ・ホール問題

考察1:ドアが3つの場合(Aが当たりのとき)

Stay (変えない場合)



当たる確率 $\cdot 1/3$

7 ページ

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題とは？

回答者: ドアを1つ選びます

出題者: 回答者の選んでない

外れのドアを一つ開けます

回答者: 開いていない残りの2つのドアから

はじめに選んだドアかを変えるか変えないか
を選ぶことができます。

最後に選んだドアの奥に当たりがあれば
回答者の勝利です。

4 ページ

モンティ・ホール問題

考察1:ドアが3つの場合(Aが当たりのとき)

Change $\rightarrow 2/3$ Stay $\rightarrow 1/3$



Changeが2倍当たる可能性が高い。

6 ページ

モンティ・ホール問題

考察3:ドアが4つの場合(Aが当たりのとき)

-条件-

- ・ドアの数は4つ
- ・ドアを1つ除かれるたびにドアをChangeするかStayするかを選択できる

9 ページ

モンティ・ホール問題

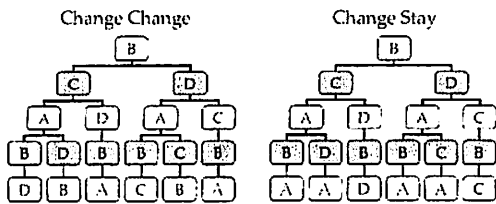
考察4:ドアの数を増やした場合

- ・最後までStayし続ける時
→最も当たりにくい
- ・ひとつ前までStayし続けて、最後にChangeする時
→最も当たりやすい

13 ページ

モンティ・ホール問題

考察3:ドアが4つの場合(Aが当たりのとき)



Change Changeではずれる確率 = Change Stayであたる確率

Change Changeであたる確率 + Change Stayであたる確率 = 1

10 ページ

モンティ・ホール問題

数学的帰納法での証明

「SS.....Sが一番当たる確率が低い」

⇒ 「SS.....S以外に最小がある」と仮定

14 ページ

モンティ・ホール問題

考察3:ドアが4つの場合(Aが当たりのとき)

結果

- ・ ChangeChange $\frac{5}{8}$
- ・ ChangeStay $\frac{3}{8}$
- ・ StayChange $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
- ・ StayStay $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

最も当たりやすい

→ StayChange

11 ページ

モンティ・ホール問題

	当たりの確率	はずれの確率
f_1	$a_1 = \frac{1}{n}$	$1 - \frac{1}{n}$
f_2	a_2	$1 - a_2$
f_3	a_3	$1 - a_3$
\vdots	\vdots	\vdots
f_{i-1}	a_{i-1}	$1 - a_{i-1}$
f_i	$a_i = \frac{1}{n} (1 - a_{i-1})$	

15 ページ

モンティ・ホール問題

考察4:ドアの数を増やした場合

5個の扉ver.

6個の扉ver.

- ・ ssS $\frac{6}{30}$ ssC $\frac{24}{30}$
- ・ csS $\frac{8}{30}$ csC $\frac{22}{30}$
- ・ ccS $\frac{11}{30}$ ccC $\frac{19}{30}$
- ・ scS $\frac{12}{30}$ scC $\frac{18}{30}$
- ・ sssS $\frac{24}{144}$ sssC $\frac{120}{144}$
- ・ cssS $\frac{30}{144}$ cssC $\frac{114}{144}$
- ・ ccsS $\frac{38}{144}$ ccsC $\frac{106}{144}$
- ・ scsS $\frac{40}{144}$ scsC $\frac{104}{144}$
- ・ scsS $\frac{52}{144}$ scsC $\frac{92}{144}$
- ・ cccS $\frac{53}{144}$ cccC $\frac{91}{144}$
- ・ cscS $\frac{57}{144}$ cscC $\frac{87}{144}$
- ・ sscS $\frac{60}{144}$ sscC $\frac{84}{144}$

ssS→最も当たりにくい

ssC→最も当たりやすい

12 ページ

モンティ・ホール問題

	最も当たりやすい選択方法
f_1	$a_1 = \frac{1}{n}$
f_2	a_2
f_3	a_3
\vdots	\vdots
f_{i-1}	a_{i-1}
f_i	$a_i = \frac{1}{n} (1 - a_{i-1})$
f_{i+1}	$a_{i+1} = \frac{1}{n} (1 - a_i)$
f_{i+2}	$a_{i+2} = \frac{1}{n} (1 - a_{i+1})$

最後のChange → Stay

16 ページ

モンティ・ホール問題

示したいのは、

$$a_{n-1} < a_n$$

$n=m$ とすると、

$$a_{m-1} = 1 - \frac{1}{m-1} < 1 - \frac{1}{m} = a_m$$

$$a_{m-2} < a_{m-1}$$

$$a_{m-3} < a_{m-2}$$

$$\vdots$$

$$a_1 < a_2$$

I), E) より

m は 2 以上の整数で

$$a_m < \frac{1}{n-m}$$

が成り立つ。

数学的帰納法を用い

$$a_m < \frac{1}{n-m}$$

を証明する。

「SS.....S以外に最小がある」
ことに矛盾する



「SS.....Sが一番当たる確率が低い」
となる

I) $m=2$ のとき

Stay のとき

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{n} < \frac{1}{n-2}$$
 で成立

Change のとき

$$a_1 = \frac{1}{n-2} < \frac{1}{n-1} < \frac{1}{n}$$
 で成立

よって $a_1 < \frac{1}{n-2}$ が成立

ひとつ前まで Stay し続けて
最後に Change する時



最も当たりやすくなる。

II) $m=k$ で

$a_{k-1} < \frac{1}{n-k}$ が成立すると仮定する。

$m=k+1$ のとき

Stay のとき

$$a_{k-1} = a_k < \frac{1}{n-k} < \frac{1}{n-(k+1)}$$

Change のとき

$$a_{k-1} = \frac{1}{n-(k+1)} < \frac{1}{n-k}$$

よって $a_{k-1} < \frac{1}{n-(k+1)}$ が成立

プログラミング言語と数学の関係
Relations of a programming language and mathematics

貴島啓介 堀江亮介 松本モモ 林叶子 中島いずみ

Keisuke Kijima, Ryosuke Horie, Momo Matsumoto, Kanako Rin and Izumi Nakashima

Abstract

To understand relationships between a programming language and mathematics, we made a "Blockbuster game" using N88BASIC, an easy programming language. We used inequality to check whether the ball hits a block in the process of making a Blockbuster game. Therefore, we can understand the relationships.

1. 目的

N88 互換 BASIC というプログラミング言語を用いたゲーム作りの過程において、数学的な考えをプログラミング言語に適用させる方法を探索しようと考えた。そのためにブロック崩しゲームを作成することにした。

2. 方法

- ①N88 互換 BASIC の基本的な命令文を学んだ。
- ②ブロック崩し作りに必要な命令文を考えた。
- ③その命令文の中に数学的要素を含ませブロック崩しを完成させた。
- ④完成したブロック崩しプログラムから数学との関係性を考察した。

3. 結果・考察

数学的な思考を利用してブロック崩しが完成した。

ブロック崩しで用いるプログラミング言語の中で If 命令文などの数学的な思考を少しだけ用いることができた。

玉の座標が、ある一定の数値内におさまったときにブロックが消える命令文を作った。このとき不等式を用いた。

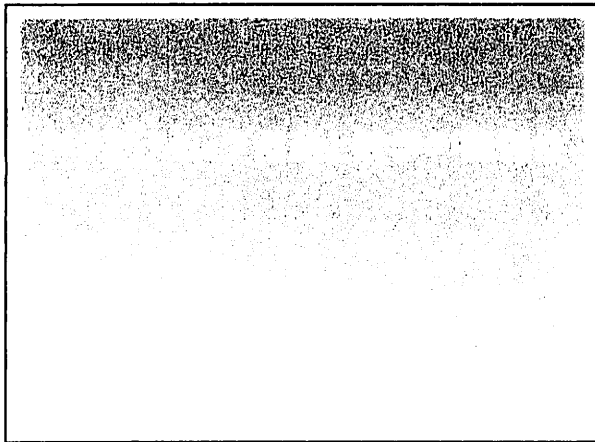
玉の動きが 1 パターンしかない今の状況を変えるために、乱数を用いて玉のスタート位置をランダムにするなどして、もっと数学と結びつけて考えていきたい。

4. 結論

ゲームを完成させ、数学的な思考と結びつけることはできたため、今後はもっと数学的要素を強めたプログラムを作り、物理的思考なども取り入れて考えていきたい。

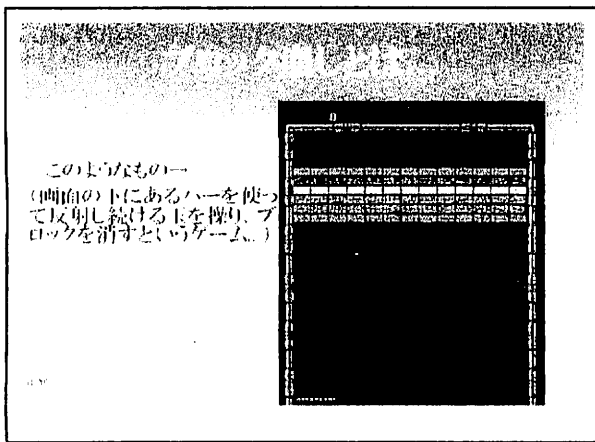
5. キーワード

N88 互換 BASIC プログラミング言語 数学との関係性



研究動機
 フロクラシク言語で教育的な考えを使えないかと思い、
 ゲームづくりをしだした。

そこで
 何をフロクラシクしようか考えたところ、
 ブロック崩しをつくることになった。



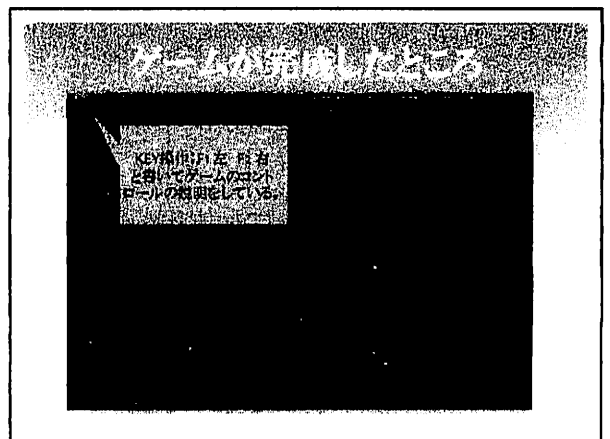
NS2互換BASISと呼ばれるものを使用。
 本校の授業でも使用されているフロクラシクソフト。

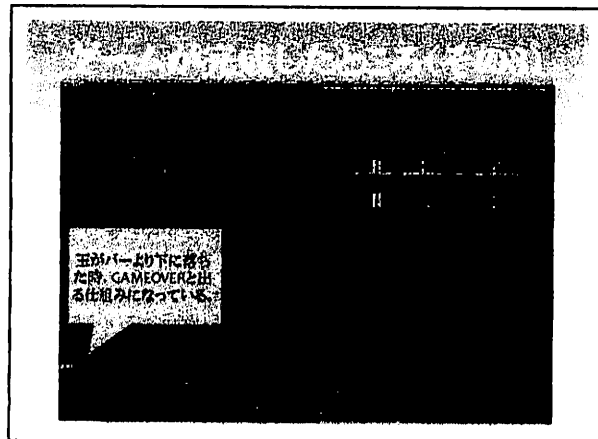
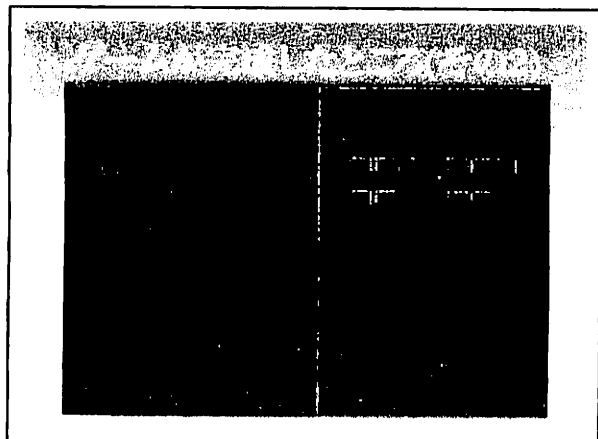
田や線、文字などを表示させることができる。

学校でも使用できるフロクラシク言語なので比較的
 簡単ではある。

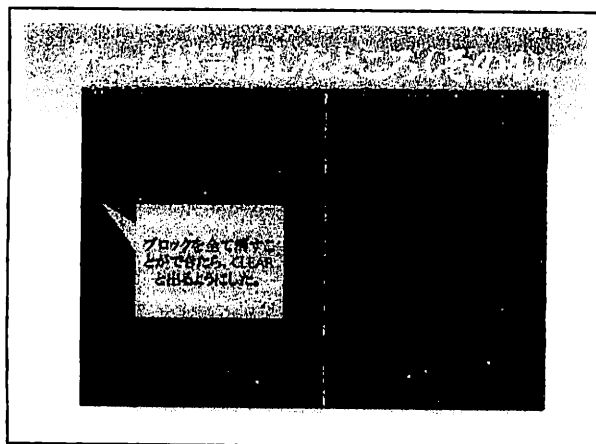
使用しているフロクラシク言語自体は誰にでも分かる
 上の簡単なもの

あまり命令文の種類がけいのために、いくつかの命令文を
 組み合わせる必要がある。
 その中で数学との関係性を探り出そうと考えた。





玉がハーフ下に落ちた時、GAMEOVERが出る仕組みになっている。



ブロックを全て消した時点で、ゲームオーバーになる。

- 1【()】線を描く。
- 2【()】キーボードによる操作を可能にする
- 3【()】以下の命令が実行されたとき、以下の命令が実行される
3の命令文が今回の研究で最も重要

例: ()

(x が 10 におく)
 $max(x)$ を 1 増加させる。
 $max(x) > 10$)
 ($max(x)$ が 20 を超えたら、 x を 1 減少させる)

つまり命令文を使えば、玉がハーフやブロックに当たったかどうかを判定(当たり判定)できる

不等式

1. 玉がブロックに当たったかどうかを判定するために、命令文を使用した。

2. 碰撞か、ある一定の数値の中におさまったときにブロックが消える命令文をつくった。

この時に不等式の考え方を使った。

具体的にプログラムを示すと、

```
100 cls
200 x=75(玉の座標xを75とおく。)
300 vx=1(玉の速度vxを1とおく。)
400 x=x+vx(xをvx増加させる。つまり、xを1増加させる。)
500 if x>69 then vx=-1
(もし、xが69を超えたら、vxを-1とおく。つまり、xを1減少させる。)
```

研究結果

プログラミング言語と数学の関係性

プログラミングの中で数学的な思考を……

一少しではあるが、使うことができた。
と、いえる。

これからの改善点

もう少し、数学と結び付けて考えていこうと思う。
一乱数を用いて玉のスタート位置をランダムにし、
1ハターンしかない今の現状を打破することが必要。

バグの調整(玉が当たっても消えないブロックがあるなど。)

まとめ

研究のまとめ

ゲームを完成させ、数学的な思考と結び付けることはできた。

つまり、目的は達成することができたので、これからはもう少し深い部分、物理的思考なども取り入れつつ考えていきたい。

感覚の数式化に関する研究
“The Study on The Mathematization of Human Sense”

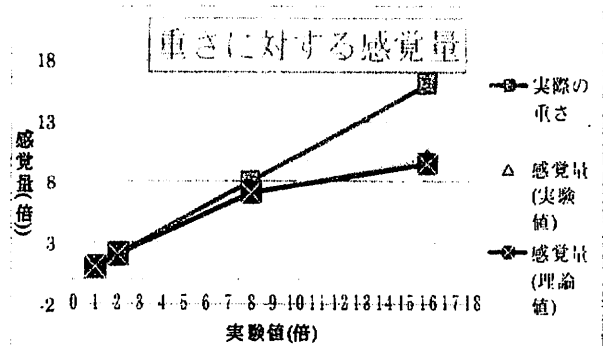
川澄 俊夫 坂内 栄一 木名瀬 遼 藤咲 慧士
Kawasumi Toshio, Bannai Eiichi, Kinase Ryo, Fujisaku Satoshi

Abstract

It is known that the human senses are not proportional to actual intensity. We conducted an experiment and found a formula that expresses the relationship between a person's estimate of an object's weight and the actual weight. Our experiment shows that a person's sensitivity to weight decreases as the weight of an object increases.

1. 目的

五感で得た刺激と人間の感じ方は、単純な比例関係になっていないことが知られている。重さと重さに対する人間の感覚を微分方程式によって数式化し、実験によってそれらの関係を検証する。



2. 方法

重さの異なる 4 つの箱 (軽い方から A, B, C, D) を用意し、被験者には B が A の 2 倍の重さであることを事前に知らせておく。そして、4 つの箱 A, B, C, D を持ってもらい、C, D の重さが A の重さのそれぞれ何倍に感じるかを調査する。

調査は約 50 名に行い、感じた重さ (感覚量) は中央値で評価する。

3. 結果

A の 8 倍、および 16 倍の重さにおける感覚量 (実験値) はそれぞれ「7.00 (倍)」、 「10.00 (倍)」であった。

4. 考察

実験値は、フェヒナーの法則で求めた 8 倍および 16 倍の感覚量 (理論値) の「7.00 (倍)」、「9.50 (倍)」に対して近い値になっており、人の重さの感覚は、微分方程式によって数式化できることが示された。

5. 結論

上記より計算で求めたものに近い形のグラフになったことから、「重さが増えるにしたがって感覚は鈍くなっていく」ということが示せた。

6. 参考文献

デヴィッド・バージェス/モラグ・ポリー (著) 微分方程式で数学モデルを作ろう
石村園子 (著) やさしく学べる微分方程式

7. キーワード

フェヒナーの法則 感覚量

感覚の数式化に関する研究

茨城県立日立第一高等学校
数学部

動機

- ・数学をテーマにしたかった
- ・微積分をテーマにしたかった
- ・数式で刺激と感覚の関係を表せることを知った

人の感覚の数式化

フェヒナーの法則

刺激量の変化の割合を感覚量の変化の割合で割ると刺激量に反比例する

感覚量：R(倍) 刺激量：S(倍)として

これを数式化すると...

S	2S
2S	4S

どちらも同じ感覚量の差

(kは定数)

人の感覚の数式化

フェヒナーの法則

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S}$$

変数を分離し、両辺を積分すると

$$\int dR = \int \frac{k}{S} dS$$

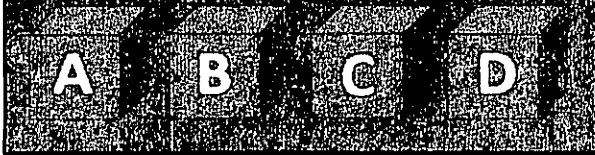
刺激が強くなればなるほど
感覚が鈍くなる

$$\therefore R = k \log S + A$$

(Aは積分定数)

実験

重さの違う4つの箱を用意する。
 軽い順にA,B,C,Dとする。
 BはAの重さの2倍であることを被験者に教える。
 被験者にC,Dをそれぞれ持ってもらい、C,DがAの何
 倍の重さであるかを当ててもらおう。



実験結果

重さ	A	B	C	D
重さ (倍)	1	2	8	16
感覚 量(倍)	--	--	7	10

16倍の刺激量における感覚量(理論値)

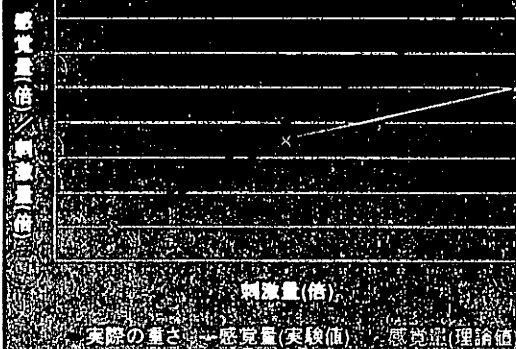
B,Cの結果をもとに、フェヒナーの法則に当てはめて定式化すると、

$$R = 3.61 \log S - 0.50$$

この式から $S=16$ のときの感覚量 R の値を求めると、

$$R = 9.50 \text{ となる。}$$

重さに対する感覚量



考察

- ・重さの感覚を数式で示せることが分かった

- ・重さが増えるにしたがって感覚は鈍くなっていくと
いうことが示せた

今後の課題

- ・今回の実験では、8倍、16倍の重さのデータ
からのみ数式化したので、それ以外の重さの
データも計測し、より精度を高めたい

- ・被験者数を増やす

- ・その他の感覚についても数式で表したい

指定校番号 横浜市立横浜サイエンスフロンティア高校
Yokohama Science Frontier High School
帽子あてゲーム

The game to answer correctly with a hat

松澤 優実
Yumi Matsuzawa

Abstract

Do you know this game? This is a game to answer correctly what color hat are you put on yore head. I understood that there is a pattern when each person understand color of the hat. And I think that this game can express in numerical formula. But I'm can't it.

1. 目的

一定の条件下の帽子あてゲームで、誰が何回目に帽子の色が分るか調べる。また、帽子の配置をかえ、パターン性を見つける。

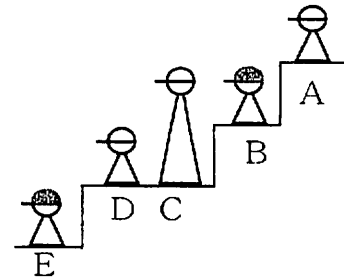
2. 方法

帽子あてゲームとは、参加者全員の発言を聞き、自分のかぶっている帽子の色をあてるゲームである。

1. 図のように、階段上に、人を配置する。

2. ルールは

- ①帽子の色は赤2つ、青(白)3つ。
- ②振り返ってはいけない。
- ③分かった人は手を挙げる。
とする。



3. それぞれの人の考えをまとめる。また、実際に友人を配置させて実験を行う。

3. 結果

赤2つ、青3つの帽子配置のパターンは10パターンある。10パターンを考察した結果、自分の帽子の色が分かる人は全てのパターンでB・C・Eの3人であった。また、帽子が分かっていく順序にはパターン性があることが分かった。

4. 考察・結論

それぞれの人々が、帽子の色が何回目に分かるか、具体的な回数として結果が出ていることから、帽子の色が何回目に分かるのかを数式で表すことができるのではないかと考えている。現在は、数式で表すことができていないので、今後の検討課題である。

5. 参考文献

Newton 「論理パズル」

6. キーワード

帽子 配置 パターン

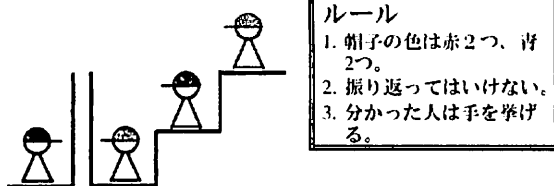
帽子の色あて ゲーム

横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校
松澤優実

探究活動の目的

- ・今から行うゲームで、誰が何回目に自分の帽子の色が分るか調べる。
- ・それぞれの人がどのようなときに帽子の色が分かるか調べる。
(パターン性を見つける。)

ゲーム紹介

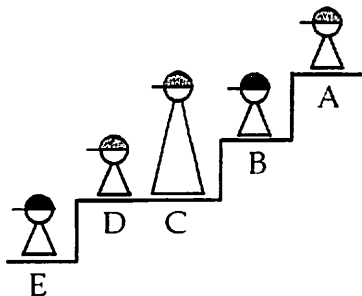


研究活動の方法

1. 階段、人・帽子の配置を決める。
2. ルールを決める。
3. それぞれの人の考えをまとめ、考察する。
(実際にやってみる。)

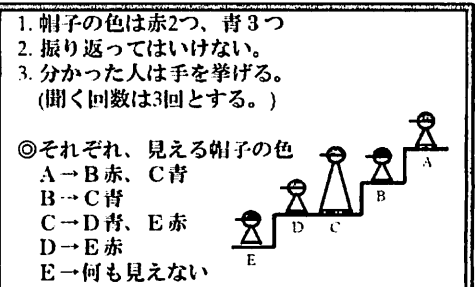
研究活動の方法

1. 階段、人・帽子の配置を決める。

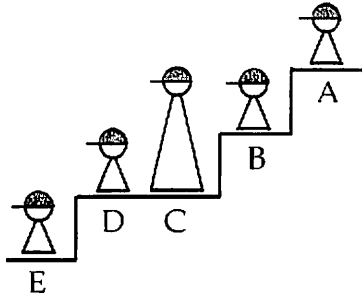


研究活動の方法

2. ルールを決める。

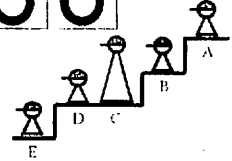


結果 1

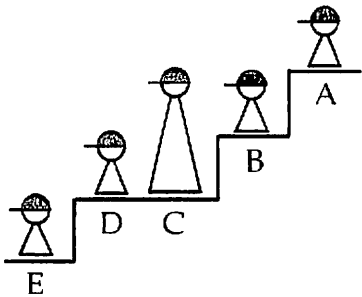


結果 1

	E	D	C	B	A
1回目	×	×	×	×	×
2回目	×	○	×	×	×
3回目	○	-	○	○	○

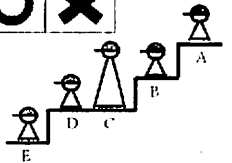


結果 2



結果 2

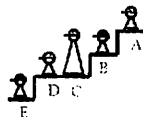
	E	D	C	B	A
1回目	×	×	×	×	×
2回目	×	×	×	×	×
3回目	○	×	○	○	×



考察

帽子の色が分った回数

	E	D	C	B	A
1回目	0回	0回	1回	0回	1回
2回目	3回	5回	1回	5回	3回
3回目	2回	1回	8回	5回	2回
合計	10回	6回	10回	10回	6回

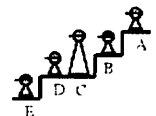


⇒ B・C・Eはすべてのパターンで帽子の色が分った。

⇒ A・Dがわからない時はすべて同じであった。

考察

回ごとに帽子の色が分かる個数



	E		D		C		B		A		
	赤	青	赤	青	赤	青	赤	青	赤	青	
1回目	0個	0個	0個	0個	0個	0個	1個	0個	0個	0個	1個
2回目	1個	1個	1個	1個	1個	0個	1個	1個	1個	2個	1個
3回目	3個	5個	1個	0個	3個	5個	3個	2個	0個	2個	2個
合計	4個	6個	2個	1個	4個	6個	4個	6個	2個	4個	4個

⇒ 自分の帽子が赤であるときは、すべての人がわかる。

考察

★Aがわかるパターン

- ◎ 1回目
 - ・BCがともに赤の場合
- ◎ 2回目
 - ・BCがともに青の場合
- ◎ 3回目
 - ・Dが2回目でわかり、BCに赤青がある場合

★Bがわかるパターン

- ◎ 1回目
 - ・なし
- ◎ 2回目
 - ・Aが1回目でわかる場合
 - ・Cが1回目でわかる場合
 - ・Aが1回目でわからなく、Cが赤の場合
- ◎ 3回目
 - ・Aが2回目でわかる場合
 - ・Aが2回目でわからなく、Cが青の場合

考察

★Cがわかるパターン

- ◎ 1回目
 - ・DEがともに赤の場合
- ◎ 2回目
 - ・Aが1回目でわかる場合
- ◎ 3回目
 - ・Aが2回目でわかる場合
 - ・Bが2回目でわかる場合
 - ・Bが2回目でわからない場合

★Dがわかるパターン

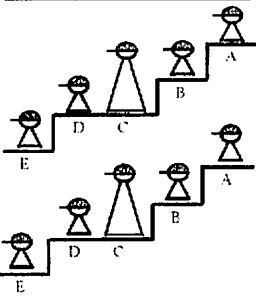
- ◎ 1回目
 - ・なし
- ◎ 2回目
 - ・Aが1回目でわかる場合
 - ・Cが1回目でわかる場合
 - ・Cが1回目でわからなく、Eが赤の場合
- ◎ 3回目
 - ・2回目でAがわかり、Eが青の場合

考察

★Eがわかるパターン

- ◎ 1回目
 - ・なし
- ◎ 2回目
 - ・Aが1回目でわかる場合
 - ・Cが1回目でわかる場合
- ◎ 3回目
 - ・Dが2回目でわかる場合
 - ・Dが2回目でわからない場合

【参考】
2回目で全員、帽子の色が分るパターン(2つ)



今後の予定

◎数式で表すことができていない。

-数式で表すことができれば、他のパターンでもすぐに結果を出せるようになると思われる。

◎帽子・人の数をかえない場合、どのパターンでも3回までで結果が出るのか。

◎帽子の色と人を増やした場合、どのような結果が出るのか。

指定校番号 横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校
Yokohama Science Frontier High School

折り紙による様々な計算の図示と視覚化

Diagraming and visualizing some calculations by folding paper

井上 鴻志郎
Inoue Koushirou

Abstract

About diagraming and visualizing calculation, I want to make them to be more simple, and to do more various calculations, by folding paper than by square and compass.

1. 目的

折り紙を折る作業だけで、数式及び方程式の図示または視覚化をし、より簡単に複雑な計算をする。

2. 方法

用意するもの 透明折り紙 油性ペン (なくてもいい)

- ①四則演算の方法と折り紙の特徴の確認
- ②複雑な計算の工夫の仕方の探求
- ③折り紙ならではの複雑な計算の図示

3. 結果

①四則演算は簡単な方法があるためこれ以上の工夫の余地はない。(以下これらを「基本折り」という。)

折り紙は「異なる二点を異なる二直線上に同時に移動する」ということが可能

- ②使いやすくて基本折より簡単な方法で折れる計算がある。
- ③三次方程式を解くよりも簡単に立方根及びそれに関する計算が折れる。

4. 考察

折り紙の折るという作業だけでも、様々な折り方が有り、まだ計算の幅が広がる余地が有る。

5. 結論

基本折りよりも使いやすい計算方法があり実際に計算するときはその形を意識して計算すると良い、さらに定規とコンパスで作図するよりも計算の幅が広い。

6. 参考文献

http://izumi-math.jp/K_katou/ori_h/ori_h.htm 「折り紙と方程式」加藤渾

7. キーワード

折り紙と方程式 三次方程式

指定校番号 横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校
Yokohama Science Frontier High School
正七角形の作図道具の作成
Make a tool which can draw septagon

紙谷 将
Kamiya Masaru

Abstract

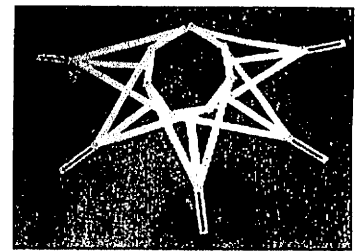
I learned we can't draw septagon with using only compass and ruler, but we can make it with folding paper. Then I thought I want to make a tool which can draw septagon.

1. 目的

正七角形はコンパスと定規のみでは作図できないことから、正七角形を作ることが出来る道具を作製する。

2. 方法

まず任意の線分を7等分する。その7等分したそれぞれのパーツのなす角が等しく(多角形の内角がそれぞれ等しく)なるような構造を考える。そして上の条件をもとに実際に作製する。



3. 結果

相似の考え方から線分をコンパスのみを用いてn等分する方法を発見した。パーツに分けて考えることにより元の線分の折れる角度を一定にすることが出来た。また、実際に正七角形の作製に成功した。

4. 考察

理論的には分度器を用いて作図する($900/7^\circ$ の近似値を測る)よりも正確な正七角形を作ることが出来る。また、同じ作業をすることにより正n角形の作製も可能である。

5. 結論

正七角形は図のような道具によって作製することが可能となる。

6. 参考文献

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/Mathematics_tools/trisection/trisection.htm (角の3等分器、筑波大学数学教育研究室及び筑波大学教育開発国際協力研究センター関係者)

7. キーワード

正七角形

最短経路問題の中の数列

梶川俊介 近藤彪生 坂部彩

Abstract

We research the sequence which is related to the number of the shortest way. As a result, we found the interesting rule of difference sequence.

1. 目的

右図の点 P から右に x 、手前に y 、下に n 進んだところにある点までの最短経路を a_n 通りとする。この数列 $\{a_n\}$ の階差数列について考察する。

2. 方法

命題： $\{a_n\}$ の第 $x+y$ 階差数列は、全ての非負整数 x, y について

$$\frac{(x+y)!}{x!y!} \text{ である。}$$

この命題（予想）を、 x と y の数学的帰納法により証明する。なお、途中で階差数列に関するある性質を、補題として証明する。

3. 結果

命題の証明に成功した。

4. 考察

今回の発見は、右下図のように立方体を 1×1 個、 2×2 個、 3×3 個、 \dots 、 $n \times n$ 個積み重ねたときの最も離れた2点間の最短経路の数（カタラン数を一般化したもの）を n を用いて表そうとする試みの中で生まれた。しかし、今回の発見によってその問題を解決するのは、難しいと考えられる。

5. 結論

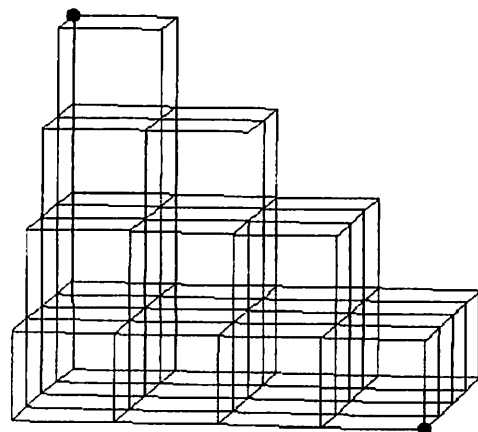
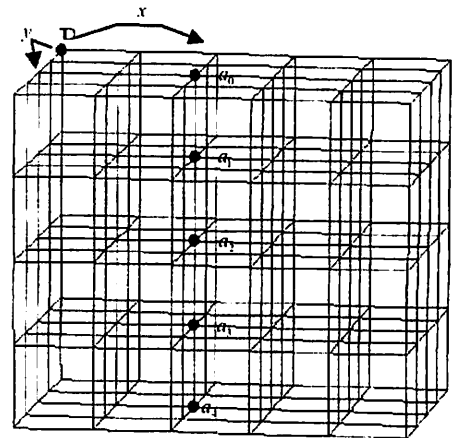
$\{a_n\}$ の第 $x+y$ 階差数列については面白い性質が分かったが、それは上記の問題（4. 考察を参照）にうまく応用できないと考えられるので、別の方針でこの問題に取り組んでいきたい。

6. 参考文献

末木達也 「最短経路問題の中の数列」

7. キーワード

階差数列 数学的帰納法 カタラン数



最短経路問題の中の数列

愛知県立岡崎高校

梶川俊介 近藤彪生 坂部彩

1 定義

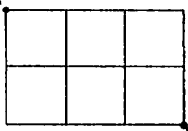
- ・数列 $\{a_n\}$ の第 m 階差数列を $\{a_n^{(m)}\}$ と表す。
- ・数列 $\{a_n\}$ の第 0 階差数列とは数列 $\{a_n\}$ 自身を表すものとする。すなわち、

$$a_n^{(0)} = a_n$$

2 導入

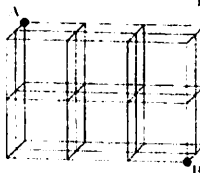
右の平面図形で点Aから点Bまでの最短経路の数は

$$\frac{(2+3)!}{2!3!} = 10$$



右の空間図形で点Aから点Bまでの最短経路の数は

$$\frac{(2+2+3)!}{2!2!3!} = 210$$



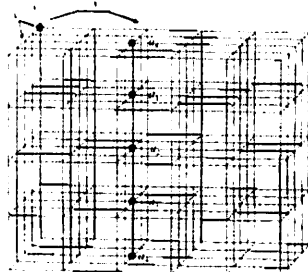
3 命題

図の点Pから右に x 、手前に y 、下に n 進んだところにある点までの最短経路を a_n 通りとすると、全ての非負整数 x, y について

$$a_n^{(x+y)} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$

が成り立つ。

数列 $\{a_n\}$ の第 $x+y$ 階差数列は全ての項が $\frac{1}{x!y!}$ である。



4 証明

- $x = 0$ かつ $y = 0$ のとき
- $x = 0$ かつ $y \geq 1$ のとき
- $x \geq 1$ かつ $y = 0$ のとき
- $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

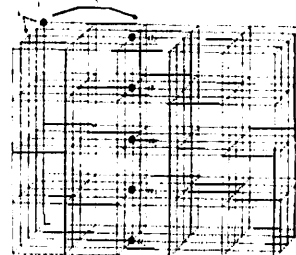
i. $x = 0$ かつ $y = 0$ のとき

$$a_n^{(0+0)} = a_n = 1 = \frac{(0+0)!}{0!0!}$$

よって成り立つ。

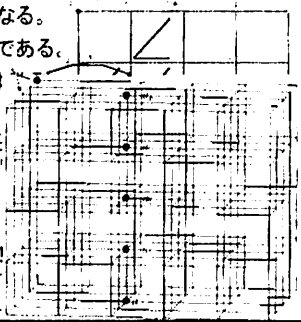
命題の式

$$a_n^{(x+y)} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$



ii. $x = 0$ かつ $y \geq 1$ のとき

図の縦の列が数列 $\{a_n\}$ となる。
 $\{a_n\}$ の左の列は $\{a_n^{(1)}\}$ である。
 従って、図の一番左の列は $\{a_n^{(y)}\}$ だから、



$$a_n^{(0+y)} = a_n^{(y)} = 1 = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$

よって成り立つ。

命題の式

$$a_n^{(x+y)} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$

iii. $x \geq 1$ かつ $y = 0$ のとき

iiと同様に成り立つ。

iv. $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

次の補題を利用する。

補題: 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ について
 $(b_n + c_n)^{(m)} = b_n^{(m)} + c_n^{(m)}$
 が成り立つ。
 証明: 数学的帰納法で証明する。

iv. $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

点Pから右に $x-1$ 、手前に y 、下に n 進んだところにある点までの最短経路を b_n 通り、

点Pから右に x 、手前に $y-1$ 、下に n 進んだところにある点までの最短経路を c_n 通りとする。

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1} + c_{n+1} \text{ より}$$

$$a_n^{(1)} = b_{n+1} + c_{n+1}$$



$a_n^{(1)} = b_{n+1} + c_{n+1}$
 IV. $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ について命題が成り立つと仮定すると

$$b_n^{(x+y-1)} = \frac{(x+y-1)!}{(x-1)!y!}$$

$$c_n^{(x+y-1)} = \frac{(x+y-1)!}{x!(y-1)!}$$

命題の式

$$a_n^{(x+y)} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$



$a_n^{(1)} = b_{n+1} + c_{n+1}$
 IV. $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

$$b_n^{(x+y-1)} = \frac{(x+y-1)!}{(x-1)!y!}$$

$$c_n^{(x+y-1)} = \frac{(x+y-1)!}{x!(y-1)!}$$

よって

$$a_n^{(x+y)} = (a_n^{(1)})^{(x+y-1)}$$

$$= (b_{n+1} + c_{n+1})^{(x+y-1)}$$

$$= b_{n+1}^{(x+y-1)} + c_{n+1}^{(x+y-1)}$$

$$= \frac{(x+y-1)!}{(x-1)!y!} + \frac{(x+y-1)!}{x!(y-1)!}$$

$$= \frac{(x+y)!}{x!y!}$$



iv. $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき

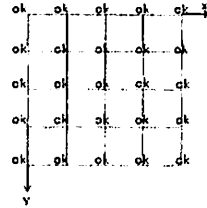
以上より、数列 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ について命題が成り立てば $\{a_n\}$ についても成り立つので

- $(x, y) = (1, 1)$ のとき成り立つ
- $(x, y) = (1, 2)$ のとき成り立つ
- $(x, y) = (1, 3)$ のとき成り立つ

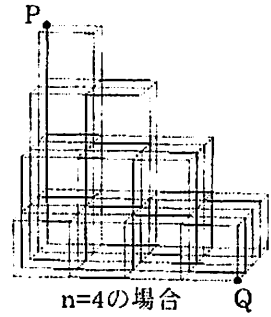
⋮

よって $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のとき命題は成り立つ。

.....



5 今後の課題



ゲーム理論とじゃんけんゲーム「グリコ」
Game theory on the Roshambo Game 'Guriko'

青木一将 伊藤倫規 西野圭佑 若木良介
Kazumasa Aoki, Noriki Ito, Keisuke Nishino, and Ryosuke Wakaki

Abstract

We were interested in Game Theory, so we thought we tried to apply Game Theory to something familiar. Then we had an eye on the Roshambo Game 'Guriko'. Using Game Theory, we thought we could find the best strategy on this game. Then we found Nash equilibrium in this game and a change of the strategy of one when the strategy of the other is changing.

1. 目的

じゃんけんゲーム「グリコ」を2人で行った時のナッシュ均衡と、相手の戦略に対して最も期待利得が高くなる自分の戦略を調べる。

2. 方法

ナッシュ均衡の求め方は定義に基づいて計算で求める。

相手の戦略に応じて変化する自分の最も適切な戦略を、相手の戦略が確定している時と、相手の戦略がより適したものに変わっていく時の2つに分けて考える。

3. 結果

ナッシュ均衡を求める式を解くと、ナッシュ均衡は、双方がグー、チョキ、パーを

それぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ の確率で出す状態であると示された。

相手の戦略が確定しているとき、その相手の戦略によって、自分の最適な戦略は

- i) グー、チョキ、パーのいずれか1つのみを出し続ける
- ii) グー、チョキ、パーのいずれか2つを出し続ける
- iii) どのような戦略をとっても期待利得が変わらない

の3つに分けられた。

相手の戦略が変化するとき、常に自分の戦略と一致しながら変化すると最終的に双方の戦略はナッシュ均衡点に収束し、自分の戦略と一致しないとき、特徴的に戦略が変化した。

4. 考察

ナッシュ均衡点において利得が2倍も違うグーとパーの確率が一致するのは、負けたときの損害が少なく、勝ったときの利得が大きいチョキを出す確率が必然的に高くなるため、それに合わせてグーの確率も高まったためと考えられる。

相手の戦略が変化するときの結果は、あくまでシミュレーションによるものなので、立式による証明が今後必要である。

5. キーワード

ゲーム理論 ナッシュ均衡 戦略 期待利得

ゲーム理論とじゃんけんゲーム「グリコ」

手の出し方と期待値の変化

伊藤 備哉
若木 良介

じゃんけんゲーム「グリコ」におけるナッシュ均衡

A, Bの利得表を右のようにする

ここで効用関数

$$U_A(p, q) = \sum_i A_i p_i q_i$$

$$U_B(p, q) = \sum_i B_i p_i q_i$$

ただしA, Bのそれぞれが戦略 p_i, q_i をとる確率を p_i, q_i とする

各定数の時、偏微分条件

$$\frac{\partial U_A(p, q)}{\partial p_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_B(p, q)}{\partial q_i} = 0$$

を解く

$p_i, q_i, p_i, q_i, p_i, q_i, p_i, q_i$ がナッシュ均衡とされている

この式をじゃんけんゲーム「グリコ」に当てはめてナッシュ均衡を求める

		Bさん		
		グ	チョ	パー
Aさん	グ	0, 0	1, -1	-1, 1
	チョ	1, -1	0, 0	-1, 1
	パー	-1, 1	1, -1	0, 0

ゲーム理論とは

複数の当事者(プレイヤー)が存在し、それぞれの行動が影響し合う状況(ゲーム)において、各人の利益(効用)に基づいて相手の行動を予測し意志決定を行う考え方である。



ジョン・フォン・ノイマン

20世紀初頭に、数学者のフォン・ノイマンと経済学者のオスカー・モルゲンシュテルンによって基礎が作られ、現在は経済学、経営学、心理学、社会学、政治学などに応用されている。

じゃんけんゲーム「グリコ」におけるナッシュ均衡

グ、チョ、パーをそれぞれ確率 p, q, r とし、Bがグ、チョ、パーを出す確率を p, q, r とする

$$U_A(p, q, r) = 0 \cdot p \cdot p + 1 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot r$$

$$U_B(p, q, r) = 1 \cdot p \cdot p - 1 \cdot q \cdot p + 0 \cdot q \cdot q + 0 \cdot q \cdot r$$

$$U_A(p, q, r) = 0 \cdot p \cdot p + 1 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot r$$

$$U_B(p, q, r) = 1 \cdot p \cdot p - 1 \cdot q \cdot p + 0 \cdot q \cdot q + 0 \cdot q \cdot r$$

これを p, q, r について偏微分条件式は

$$\frac{\partial U_A(p, q, r)}{\partial p} = 0 \Rightarrow 0 \cdot p + q - r = 0$$

$$\frac{\partial U_A(p, q, r)}{\partial q} = 0 \Rightarrow p \cdot 1 + 0 \cdot q - 0 \cdot r = 0$$

$$\frac{\partial U_A(p, q, r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow 0 \cdot p + 0 \cdot q - 1 \cdot r = 0$$

$$\frac{\partial U_B(p, q, r)}{\partial p} = 0 \Rightarrow 1 \cdot p - 1 \cdot q + 0 \cdot r = 0$$

$$\frac{\partial U_B(p, q, r)}{\partial q} = 0 \Rightarrow 0 \cdot p - 1 \cdot q + 0 \cdot r = 0$$

$$\frac{\partial U_B(p, q, r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow 0 \cdot p + 0 \cdot q - 0 \cdot r = 0$$

これを連立させて解くと

$$p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$$

		Bさん		
		グ	チョ	パー
Aさん	グ	0, 0	1, -1	-1, 1
	チョ	1, -1	0, 0	-1, 1
	パー	-1, 1	1, -1	0, 0

じゃんけんゲーム「グリコ」におけるナッシュ均衡

ナッシュ均衡とは？

ゲーム理論の最も基本となる均衡概念で、ゲームに参加するすべてのプレイヤーが相互に他者の戦略を考慮に入れつつ、自己の利益を最大化するような戦略を実行したときに成立する均衡状態のことである。

ナッシュ均衡は次のようにして求めることができる

じゃんけんゲーム「グリコ」におけるナッシュ均衡

つまり、A, Bともにグ、チョ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ の確率で出す状態がこのゲームにおけるナッシュ均衡である。

手の出し方と期待利得

次に、AとBの2人の戦略の変化を調べる。

Aがグー、チョキ、パーを出す確率を x, y, z
Bがグー、チョキ、パーを出す確率を p, q, r
とすると

$$x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$p + q + r = 1 \quad (p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0)$$

である。

ここで、
(I) Bの戦略が変化しないとき(p, q, r が定数のとき)
(II) Bの戦略が変化するとき(p, q, r が変数のとき)
の二つを考える。

手の出し方と期待利得

I: Bの戦略が変化しないとき(p, q, r が定数のとき)

1. $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ のとき
Bはパーを出す。Aはグーを出すのが最善である。

2. $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ のとき
Bはグーを出す。Aはパーを出すのが最善である。

3. $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ のとき
Bはグーを出す。Aはグーを出すのが最善である。

4. $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ のとき
Bはパーを出す。Aはパーを出すのが最善である。

5. $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ のとき
Bはグーを出す。Aはグーを出すのが最善である。

6. $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ のとき
Bはグーを出す。Aはグーを出すのが最善である。

手の出し方と期待利得

まず、Aの戦略 (x, y, z) を次のように考える。

1. $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ のとき
Aはチョキを出す。右辺の力。
2. $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ のとき
Aはパーを出す。左辺の力。
3. $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ のとき
Aはグーを出す。頂上の力。

	A	B
グー	$3p$	x
チョキ	$6p$	y
パー	$6p$	z

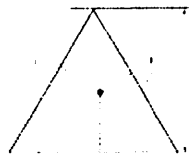


図1: Aの期待利得のグラフ

手の出し方と期待利得

I: 結論

一般に、Bの戦略 p, q, r が一定で変化しないとき、

1. $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ のとき
Aは自分の戦略にかかわらず期待利得は1.5で一定(ナッシュ均衡)

2. (p, q, r) のいずれか2つが等しいとき
Aは (p, q, r) のうち等しい2数の組み合わせに応じて
 x, y, z のいずれか一つを出さない戦略が最善となる

3. 上記A, 2以外の時
Aは (p, q, r) のいずれか一つを出し続ける戦略が最善となる

手の出し方と期待利得

I: Bの戦略が変化しないとき(p, q, r が定数のとき)

例に、 $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ のとき

期待利得と (x, y, z) の関係を表した

$$E = 3x + 6y + 6z$$

のグラフが左図のようになる

このときAは、最も期待利得の高い

$$(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

という戦略を取る



図2

手の出し方と期待利得

II: Bの戦略が変化するとき(p, q, r が変数のとき)

Aは自分の戦略を調整しているとき

→ 次の手の出す確率を

$(x, y, z) = (0, 1, 0)$ の分配に近づける。図の矢印の向きに
変化させる。

→ 次の期待利得 $E = 3x + 6y + 6z$ の分配に近づける向きに
変化させる。



図3

手の出し方と期待利得

(II) Bの戦略が変化するとき(p, q, rが変数のとき)

(I) Aの戦略とBの戦略が一致するとき (x, y, z) (p, q, r)のとき

・BAを用いたシミュレーションにより、双方の期待値を算出

$$(x, y, z) (p, q, r) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

・確認する

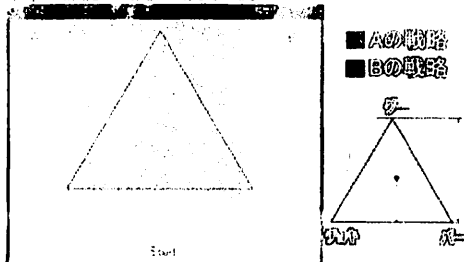
ご静聴ありがとうございました

伊藤 倫規
若木 良介

手の出し方と期待利得

(II) Bの戦略が変化するとき(p, q, rが変数のとき)

(I) Aの戦略とBの戦略が一致しないとき



主な展望と課題

展望

・2人ではなく3人、もしくはそれ以上でゲームを行う場合のシミュレーションを行いたい。

課題

・(II)の結果がなぜ起こるのか、立式による証明

汎魔方陣の研究～5次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導く～

The research of Pan-Magic Square

～The total number of 5th Pan-Magic Squares led from placing knights～

谷本 真一郎 野崎 光祐 六車 光貴

Shinichiro Tanimoto, Kosuke Nozaki, and Koki Muguruma

Abstract

We have been doing research on “Pan-Magic Square”. Pan-Magic Square is a kind of magic square in which each sum of a column, a row, a diagonal and a pan-diagonal is equal. The numbers used in it are from 1 to n^2 . We researched on the character of Pan-Magic Square and investigated into the character.

1.目的

汎魔方陣の性質の理解

5次汎魔方陣の簡単な作り方と総数の導出

2.汎魔方陣とは

行、列、対角線、汎対角線の和が等しい方陣ことをいう。

ただし、使う数は n 次汎魔方陣において1から n^2 まで。

3.方法

左桂馬飛びの汎ラテン方陣と右桂馬飛びの汎ラテン方陣が互いに直交し、組み合わせることで汎魔方陣が導出できることを利用して、5次汎魔方陣の総数を求める。

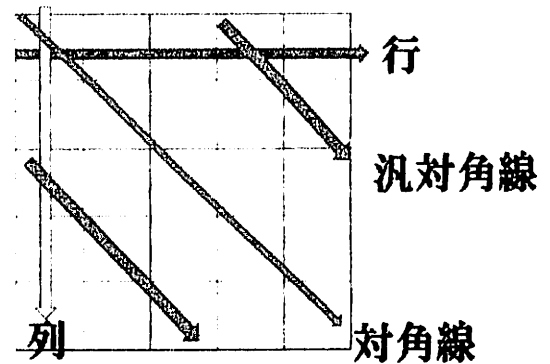
3.結果・考察

汎魔方陣を分解すると、二つの汎ラテン方陣になる。

汎ラテン方陣から汎魔方陣を導きだせる！

直交する汎ラテン方陣はそれぞれ左桂馬飛びと右桂馬飛び

5次汎魔方陣の総数は144通り



1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

5次汎魔方陣の例

4.参考文献

佐藤肇、一楽重雄『幾何の魔術—魔方陣から現代数学へ』日本評論社

内田伏・『魔方陣にみる数のしくみ—汎魔方陣への誘い』日本評論社

松島省二『魔方陣 作り方の魔術とその種明かし』吉備人出版

5.キーワード

汎ラテン方陣 オイラー方陣 5進法 桂馬飛び法 直交 3D回転 シフト変換

汎魔方陣の研究

～5次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導く～

高松第一高校 数学班
 ・六車 光貴
 ・谷本 貞一郎
 ・野崎 光祐

研究動機・目的

大阪大学教授の話から
 汎魔方陣はとても美しい!!!

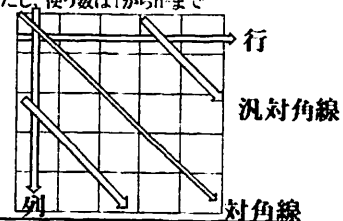
汎魔方陣の性質

今までやってきたこと

- 単偶数次汎魔方陣の非存在
- 4次汎魔方陣の性質
- 桂馬飛び法とアフィン平面との関係
- 5次汎魔方陣の簡単な作り方
- 5次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導出

汎魔方陣とは

- 行、列、対角線、汎対角線の和が等しい
- ※ただし、使う数は1から n^2 まで



例えば 5次汎魔方陣

1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

65 Beautiful

シフト変換について

13	4	20	6	22
16	7	23	14	5
24	15	1	17	8
2	18	9	25	11
10	21	12	3	19

汎魔方陣①

4	20	6	22	13
7	23	14	5	16
15	1	17	8	24
8	9	25	11	2
21	12	3	19	10

汎魔方陣②

5次汎魔方陣を分解してみよう

①各数から1を引く。

1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

②5進数に変換する

0	16	7	23	14
8	24	10	1	17
11	2	18	9	20
19	5	21	12	3
22	13	4	15	6

※桁目の数のみ集めた表と1桁目の数のみ集めた表に分ける
 (桁目の数→方陣Ⅰ 1桁目の数→方陣Ⅱ)

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

Ⅰ (2桁目の数)

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

Ⅱ (1桁目の数)

方陣Ⅰ,Ⅱはどーなってる?

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

Ⅰ

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

Ⅱ

汎ラテン方陣とは

行、列、対角線、汎対角線上にそれぞれ異なるn個の数が並んでいる方陣

※ただし、使う数はn次汎ラテン方陣において0からn-1まで

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

←5次汎ラテン方陣の例
使う数:0~4

まとめると

汎魔方陣を分解すると、2つの汎ラテン方陣になる。



汎ラテン方陣から汎魔方陣を導きだせる!

5次汎魔方陣の総数を導き出すのに、汎ラテン方陣の規則性がキーアイテムではないかと考える。

すべての5次汎魔方陣を分解してみると...

例

1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

↑
右汎ラテン方陣

↑
左汎ラテン方陣

桂馬飛びの方向と3D回転

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

↑
右汎ラテン方陣



0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

↑
左汎ラテン方陣

桂馬飛び法①

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
0	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1
0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

00	13	21	34	42
31	44	02	10	23
				41 04
				22 30
24	32	40	03	11

↑
互いに直交

↑
オイラー方陣

桂馬飛び法②

0	8	11	19	22
16	24	2	5	13
7	10	18	21	4
23	1	9	12	15
14	17	20	3	6

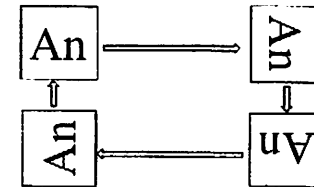
1	9	12	20	23
17	25	3	6	14
8	11	19	22	5
24	2	10	13	16
15	18	21	4	7

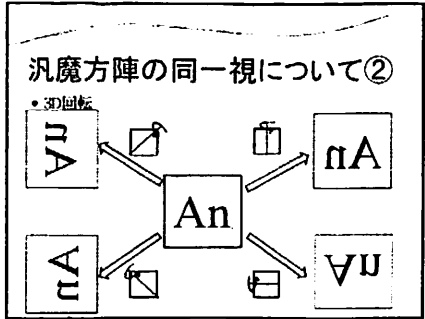
↑
汎魔方陣

5次汎魔方陣の総数を汎ラテン方陣から導出しよう!

汎魔方陣の同一視について①

• 3D回転





汎魔方陣の同一視について③

• シフト変換(等紙模様)

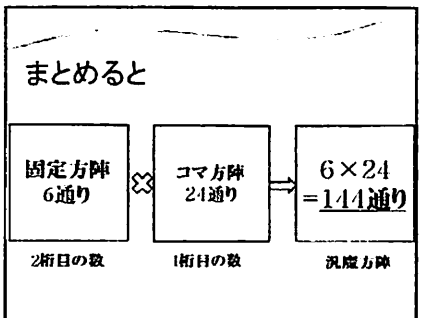
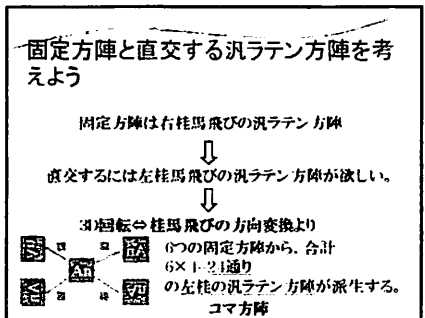
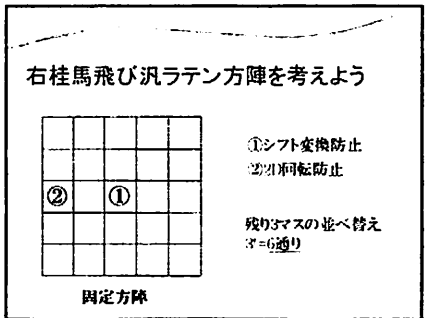
1	17	9	24	15	1	17	9	24	15	1	17	9	24	15
9	25	11	2	13	9	25	11	2	13	9	25	11	2	13
12	5	19	10	21	12	5	19	10	21	12	5	19	10	21
20	6	22	13	4	20	6	22	13	4	20	6	22	13	4
23	14	5	16	7	23	14	5	16	7	23	14	5	16	7
1	17	9	24	15	1	17	9	24	15	1	17	9	24	15
9	25	11	2	13	9	25	11	2	13	9	25	11	2	13
12	5	19	10	21	12	5	19	10	21	12	5	19	10	21
20	6	22	13	4	20	6	22	13	4	20	6	22	13	4
23	14	5	16	7	23	14	5	16	7	23	14	5	16	7

よって

汎魔方陣の個数は2D回転、3D回転、シフト変換を含まない。

↓

汎ラテン方阵の個数も2D回転、シフト変換を含まない。
 ※3D回転は考える。(↑3D回転したら、桂馬飛びの方向が変わる。)



結論

汎魔方陣を分解すると、2つの汎ラテン方阵になる。

↓

汎ラテン方阵から汎魔方陣を導きだせる！

直交する汎ラテン方阵はそれぞれ左桂馬飛びと右桂馬飛び

↓

汎魔方陣の総数は144通り

今後の課題

- 高次汎魔方陣の作り方の解明
- 高次汎魔方陣の個数
- 高次汎魔方陣の簡単な作り方(方程式を使わない)

参考文献

- 佐藤肇、一栗重雄『幾何の魔術 魔方陣から現代数学へ』日本評論社
- 内田伏 『魔方陣こみる数のしくみ—汎魔方陣への誘い』日本評論社
- 松島省 『魔方陣 作り方の魔術とその種明かし』吉備人出版

第二種 r-スターリング数について
On r-Stirling numbers of second kind

発表者 三好 佑季 柴田 彩花
Yuki Miyoshi Ayaka Shibata

Abstract

The r-Stirling numbers of second kind was introduced in [2], which is a certain generalization of Stirling numbers of second kind. We obtain congruences mod 2 between r-Stirling numbers and Binomial coefficients by using generating functions.

1 目的

通常第二種スターリング数の一般化である第二種 r-スターリング数の mod 2 での二項係数との合同式について研究する。

2 方法

第二種スターリング数と二項係数の合同式が知られている(参考文献[2]参照)。そこでは母関数を用いて結果を導いている。今回、それと同様の方法で第二種 r-スターリング数と二項係数の合同式を導いた。

3 結果

次の結果を得た。

Proposition (main result)

$$S_r(n, k) \equiv_2 \binom{n - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1}{n - k} \quad \text{if } n \geq k \geq r$$
$$S_r(n, k) \equiv_2 0 \quad \text{otherwise}$$

4 考察、結論

以上の式から、 $r=0$ のときは、[2]で紹介されている通常第二種スターリング数と二項係数の合同式となっている。つまり、この結果はその合同式の一般化であることが確認できる。

5 参考文献


- [1] A. Z. Broder, The r-Stirling numbers, Discrete Math. 49 (3), (1984) 241-259
- [2] O-Y CHAN and D. V. Manna, Congruences for Stirling Numbers for the Second Kind, in Gems in Experimental Mathematics, Contemporary Math, 517, Amer. Math. Soc., (2010) 97-111

6 キーワード

第二種 r-スターリング数 二項係数 母関数 合同式

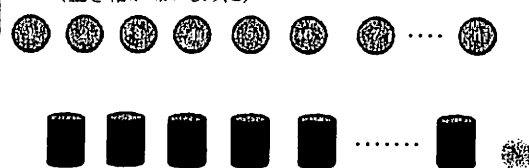
目的

r-スターリング数と二項係数とのmod2
での合同式を調べる。




第二種スターリング数とは？

n個の(区別のある)ボールを、
k個の(区別のない)箱に入れるときの
場合の数を $S(n, r)$ とおく
(空き箱がないように)



第二種スターリング数
についての諸注意

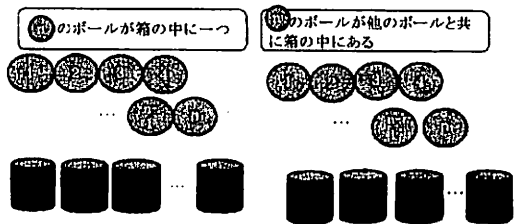
- $S(n, 0) = 1$ ($n = 0$)
- $S(n, 0) = 0$ ($n > 0$) と定義する。
- また、
 $S(n, k) = 0$ ($n < k$) となる。




第二種スターリング数の漸化式

●のボールが箱の中に一つ

●のボールが他のボールと共に箱の中にある




よって、
 $S(n-1, k-1)$ よって、
 $kS(n-1, k)$



第二種スターリング数の漸化式

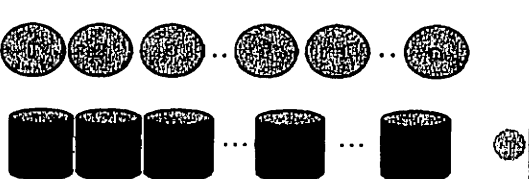

スターリング数の漸化式は、
 $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$
($n > k$)

$n = k$ のとき、 $1 = 1 + 0$
 $n < k$ のとき、 $0 = 0 + 0$
したがって、上の漸化式は
 $k \geq 1$ かつ $n \geq 1$ のとき成立。



第二種 I-スターリング数

第二種スターリング数の定義に次の条件
を加えたときの場合の数を $Sr(n, k)$ とする。
(条件)最初のr個は別々の箱に入れる。

第二種r-スターリング数の漸化式(1)

●漸化式

- $S_r(n, k) = 0 \quad (n < r \text{ または } k < r)$
- $S_r(n, k) = \delta_{k,r} \quad (n = r)$
- $S_r(n, k) = S_r(n-1, k-1) + kS_r(n-1, k) \quad (n > k > r)$

第二種r-スターリング数の漸化式(2)

また、第二種r-stirling数の漸化式に以下のような式もある

$$S_r(n, k) = S_{r-1}(n, k) - (r-1)S_{r-1}(n-1, k) \quad n \geq r \geq 1$$

※参考文献 [1] "The r-stirling numbers" の Theorem4からの引用

母関数と合同式

●定義
数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ を数列 $\{a_n\}$ の母関数という。

● $\sum_{n \geq 0} a_n x^n \equiv_2 \sum_{n \geq 0} b_n x^n \iff$ すべての n に対して $a_n \equiv_2 b_n$

※ $a \equiv b \pmod{2}$ を $a \equiv_2 b$ と書く。

一般化された二項係数

●定義 n を整数とする

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (k: 1 \text{ 以上の自然数})$$

$$\binom{n}{k} = 1 \quad (k = 0)$$

前の定義より次が成り立つ。

(i) $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k}$

(ii) $k \geq 1$ のとき

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (n > 0)$
- $\binom{-n}{k} = -\binom{-n}{k-1} + \binom{-n+1}{k} \quad (n \geq 0)$

一般化された二項係数の母関数

$C^n(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$ において、(ii)を用いて計算すると、次が成り立つ。

$$C^n(x) = (1+x)^n$$

第二種r-スターリング数の母関数

第二種r-スターリング数の漸化式を用いることで次の結果が得られる。

$$\sum_{n \geq 0} S_r(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-(r+1)x) \cdots (1-kx)} \quad (k \geq r \geq 0)$$

$$\sum_{n \geq 0} S_r(n, k) x^n = 0 \quad (\text{otherwise})$$

第二種r-スターリング数の項係数の関係

Proposition(main result)

第二種-stirling数とr項係数において次の関係が成り立つ。

$$S_r(n, r) \equiv_2 \binom{n - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1}{n-k} \quad (n \geq k)$$

$$S_r(n, r) \equiv_2 0 \quad (\text{otherwise})$$

[Proof]

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} S_r(n, k) x^n &= \frac{x^k}{(1-x)(1-(r+1)x) \cdots (1-kx)} \\ &\equiv_2 \frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (1-2ix)} \\ &= x^k \frac{1}{(1-x)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (1-2ix)} \\ &= x^k \sum_{n \geq 0} \binom{-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n} x^{n+k} \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n-k} x^n \end{aligned}$$

係数を比較して、 $n \geq k$ のとき

$$S_r(n, r) \equiv_2 \binom{-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n-k} \cdots$$

が成り立つ。ここで160の右辺を変形する。

$$\begin{aligned} \binom{-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n-k} &= (-1)^{n-k} \binom{n-k + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}{n-k} \\ &= (-1)^{n-k} \binom{n-k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}{n-k} \\ &\equiv_2 \binom{n-k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}{n-k} \end{aligned}$$

よって、Propositionが主張される。 ■

今後の課題

参考文献に載っている第二種スターリング数で成り立っていることが第二種r-スターリング数でも成り立つかを調べる。

参考文献

- (1) A. Z. Broder, The r-Stirling numbers, Discrete Math 49(3), (1984) 241-259
- (2) O-Y CHAN and H. Y. MAZSA, Congruences for Stirling Numbers for the Second Kind, in Gems in Experimental Mathematics, Contemporary Math. 517, Amer. Math. Soc., (2010) 97-111

平面上の直線配置における領域数
The Number of Regions in the Arrangement of n Line on the Plane

木内 詠美 田中 琢
Kiuchi Eimi, and Tanaka Taku

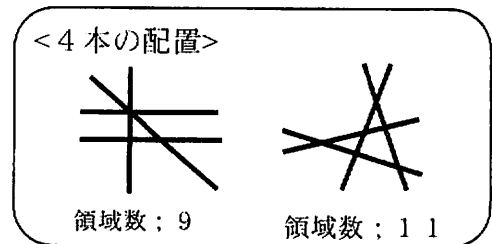
Abstract

We consider some problems about an arrangement of n lines on the plane. An arrangement of n lines in general position (no two lines are parallel and no three lines meet in a point) on the plane has $1+n+nC_2$ regions. We consider how many regions are there in every arrangement of n lines on the plane.

要旨 :

平面上に n 本の直線を配置するとき、配置方法によって領域数が異なる(右図)。ここで、次のように配置方法を定義する。

- 多重交差; 3 本以上の直線が 1 点で交わる。
- 一般の位置; 平行や多重交差を許さない配置。



一般の位置に対する領域数は一つに定まるが、多重交差や平行を許すと実現可能な領域数は複数個存在する。それらを特定するため、多重交差のみを許したときと、平行線を許したときを考え、それぞれに対し配置が与えられたときに領域数を求める公式を導いた。

平行線のみを許したときと多重交差のみを許したときの領域数を調べたところ、多重交差のみを許したときで実現可能な領域数は、平行線のみを許したときでも実現可能であると予想される。(もし正しければ、「一般の位置と平行」の領域数を「一般の位置と平行 or 一般の位置と多重交差」にまで拡張できる。) この予想の証明に取り組んだ。

キーワード ; line arrangement, simple arrangement, general position

平面上の直線配置における領域数

市川高等学校 2年
6組 木内詠美 7組 田中琢

テーマ

平面上に直線を配置したときの実現可能な領域数の特定

例①

例②

定義

多重交差: 3本以上の直線が1点で交わる。n本の直線が多重交差している点をn重の多重交差点という。

一般の位置: 平行や多重交差を許さない配置

領域数の求め方

定理1

平面上に、n本の直線を一般の位置に配置したときに、できる領域数を $R(n)$ とすると、

$$R(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} (= 1 + n + {}_n C_2)$$

証明

- ①領域を四角形で囲む
- ②水平線が存在しないよう回転する
- ③各領域の最も低い所に点を打つ
- ④③より点の数=領域数 $R(n)$ であり

点の数 = $1 + n + {}_n C_2$
(右下の点) (線の端) (交点)

定理2

平面上に、n本の直線を平行または多重交差を許して配置したときに、できる領域数を $P(n)$ とすると、

$$P(n) = 1 + n + \sum (a_i - 2) + 1$$

(l は交点数、 a_i は交点 P_i に対し、 P_i を通る直線の本数)

証明: a_i 重の多重交差点を考える。(ただし、 $a_i \geq 3$)

- ①四角形で囲み、回転させ、点を打つ
- ②多重交差点を通る水平線を引く
- ③水平線より完全に上で、多重交差点に対応する領域は $a_i - 1$ 個
- ④交点として1個カウントしているの、 $a_i - 2$ をたす

定理3

平面上に、n本の直線を平行のみを許して配置したときに、できる領域数を $Q(n)$ とすると、

$$Q(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^m a_i a_i$$

(ただし、平行な直線の組を $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ と表し、 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ とする。)

例

(3,2)

(3,2,2)

(3,2,1,1)

平行または多重交差のみを許したときの実現可能な領域数の個数

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
平行のみ許す	1	1	2	3	5	7	9	13	18
多重交差のみ許す	1	1	1	2	3	5	7	10	14

例

予想

実現可能な領域数の個数は、平行のみの方が常に多い ($n=0, 1$ のときを除く)

実現可能な領域数

n	平行のみ許す	多重交差のみ許す
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	6, 7	6, 7
4	8, 10, 11	8, 10, 11
5	10, 14, 15, 16	10, 14, 15, 16
6	12, 16, 18, 19, 20, 21, 22	12, 16, 18, 19, 20, 21, 22
7	14, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29	14, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29
8	16, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37	16, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37

予想

- 多重交差で表せるものは、平行でも表せる
- 平行でしか表せないものは、 (n) または (a_1, a_2) という形になっている (ただし、 $a_2 \geq 2$)

平行と多重交差の対応関係

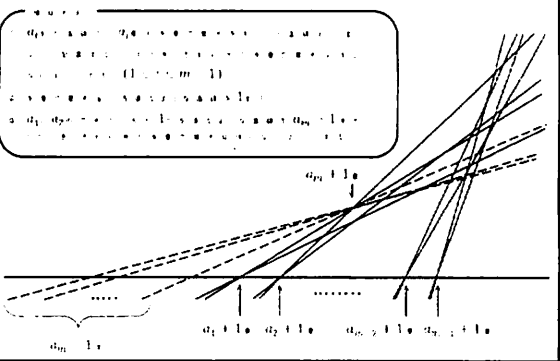
定理4

$m \geq 3$ とする。平行線のみを許した (a_1, a_2, \dots, a_m) と同じ領域数をもつ、多重交差のみを許した配置が存在する。

(a_1, a_2, \dots, a_m) から多重交差への具体的な構成方法

- a_1 本の直線で、 a_1 重の多重交差点を作り、一直線上に並ぶように配置する。このとき、それ以外の多重交差点は作らないようにする。 ($1 \leq i \leq m-1$)
- 多重交差点全てを通るような直線を1本引く
- a_2 と a_2 の交点のうちの1つを通るような直線を $a_m - 1$ 本引く。このとき、それ以外の多重交差点は作らないようにする。

(a_1, a_2, \dots, a_m) から多重交差への具体的な構成方法の図



証明

定理2を用いて、領域数を計算し、一致していることを確かめる。

$$\begin{aligned}
 & 1 + n + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i a_i + (m-1) + (a_m - 1)}{2} \quad \text{交点数} \\
 & + (a_m - 1) \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i - 2 \right) + \sum_{i=1}^{m-1} (a_i + 1 - 2) + (a_m - 1 + 2 - 2) \\
 & - 1 + n + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i a_i + (a_m - 1)}{2} \quad \text{多重交差点に対する調整} \\
 & + (a_m - 1) \sum_{i=1}^{m-1} a_i - 2(a_m - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i + (a_m - 1) \\
 & = 1 + n + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i a_i}{2}
 \end{aligned}$$

今後の課題

- 多重交差のみ許して表せるものは、平行のみ許して表せる
 ・平行のみ許して表せないものは、 (n) または (a_1, a_2) という形になっている (ただし、 $a_2 \geq 2$)
 という予想を解決する。
- 多重交差と平行を同時に許したときの実現可能な領域数を求める。

離散グラフを使った身近な問題の解決

Problem solving using the graph of discrete mathematics

市ノ瀬弘祐 坂口美乃里 若林和哉 堀口恵莉菜
 Ichinose Kousuke Sakaguchi Minori Wakabayashi Kazuya Horiguchi Erina

Abstract

The graph of discrete mathematics which gives a meaning to a point and a line solves a problem. We tried solving Reality problems by the graph.

1. 目的

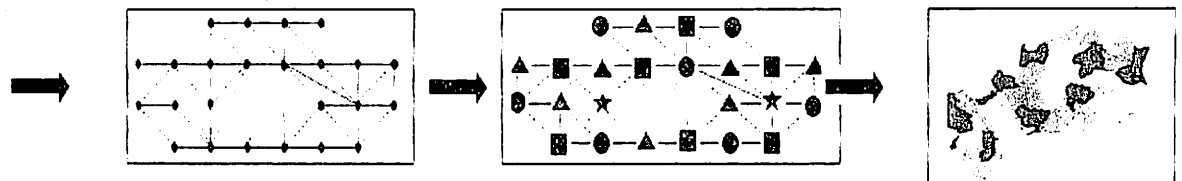
「離散グラフ」とは、点と線に意味を付けた図である。複雑な問題をシンプルに視覚化できるため、解決の見通しがよりよくなる特徴がある。それをクラスの文化祭準備に応用したところ、仕事の効率化が図れたので紹介したい。

2. 離散グラフを使った問題解決例

(1) 地図の塗り分け

問題：隣り合った県（下左図）を異なる色で塗るとき、最低何色で塗れるだろうか。

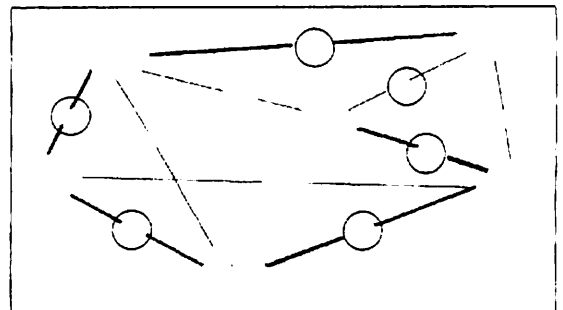
答え：4色 地図をそのまま使うと県の隣接関係が分かりづらい。離散グラフを使うと、塗り分けがわかりやすくなる。なぜなら県を点で、隣接を線で表すことで、色を変えるかどうかの判断がし易くなるからだ。



2) 雪かきの道

問題：雪かきをしてどの家から必ずすべての家に行けるようにしたい。必ずすべての道を雪かきすると121分かかる。それは大変だ。右図の離散グラフは、家の位置を点で、道を線で表し、さらに数値は雪かきにかかる時間（分）を表現している。どの道を選べば最短時間で復旧するだろうか。

答え：52分（右図の太線）



3) その他の問題解決例

離散グラフを使った握手問題、飛行高度問題、天気確率問題などの解決も、ポスターセッションにおいて紹介します。

3. 離散グラフを使った身近な問題の解決（文化祭準備）

問題：12日間かかっていた文化祭準備をなるべく短く効率的にしたい。

答え：5日間。離散グラフで作業手順を並列化することで、かかる日数を7日短縮でき、役割分担するグループ数も3人がもっとも効率的であることが分かった。

	作業内容	終わらせておく作業	かかる日数
A	教室内の配置図作り		1日
E	壁の装飾品作り	A	3日
C	指寫取り付け	E	1日
D	ホールツラカビ作り	A	1日
E	看板のデザイン作り		2日
F	持ち歩く看板作り	E	1日
G	貼り付ける看板作り	E	2日
H	衣装組立	A, B, C, F, G	1日
	合計		12日

7日短縮

4. まとめ

離散グラフを身近な問題（文化祭準備）の解決に応用してみたが、実際に仕事を効率化できたことが達成感となっている。

5. 参考文献

高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書、2011 国立教育政策研究所

6. キーワード

離散グラフ 身近な問題の解決

離散グラフを使った身近な問題の解決

Problem solving using The Graph of Discrete Mathematics

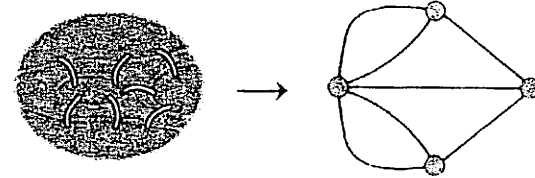
長野県屋代高等学校

市ノ瀬弘祐 坂口美乃里 若林和哉 堀口恵莉菜

離散グラフって何？

身近な問題を、点と線だけで表したグラフ

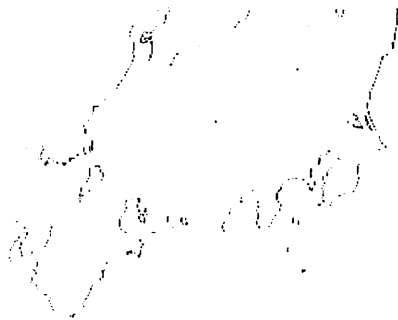
代表例：ケーニヒスベルクの一筆書き問題



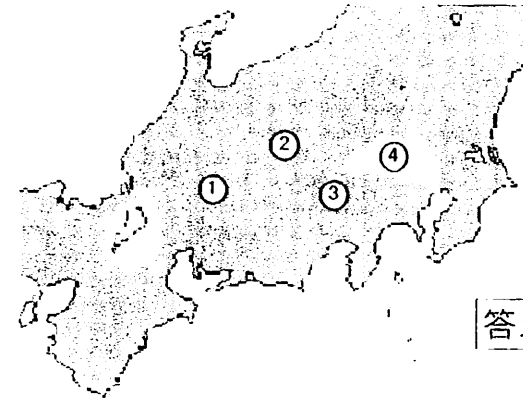
ただし問題ごとに、
点や線の意味を変えることが重要

地図の塗り分け問題

問題：隣り合った県を異なる色で塗るとき、
最低何色で塗れるだろうか。



方法：実際の地図に塗ってみる



答え：4色

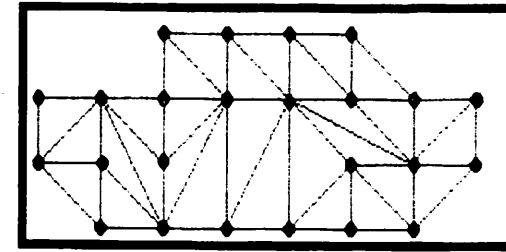
方法：離散グラフを使ってみる

でも、実際の地図で塗り分けると、隣の関係が気づきにくい。

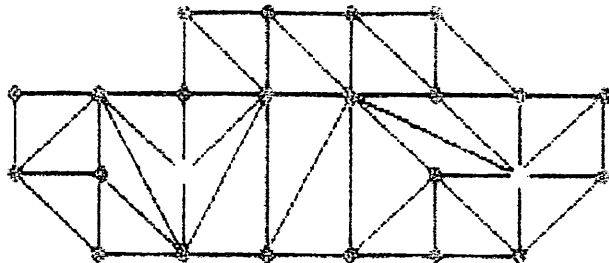
そこで、
離散グラフを使ってみよう。

方法：地図を離散グラフに

県を点で、隣接を線で表すことで、色を変えるかどうかの判断がし易くなる



見方：線分の両端は違う色



答え：4色

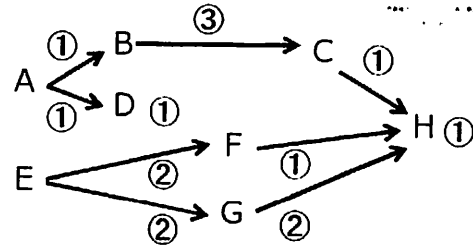
文化祭準備に応用

問題：今まで12日間かかっていた文化祭準備をなるべく短く、効率化したい。

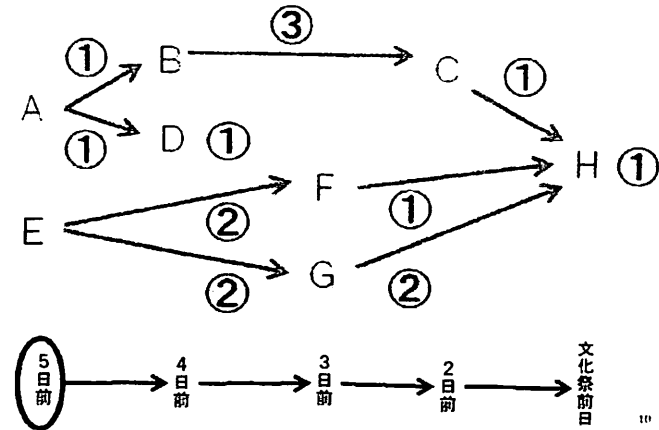
	作業内容	終わらせておく作業	かかる日数
A	教室内の配置図作り		1日
B	壁の装飾品作り	A	3日
C	昭幕取り付け	B	1日
D	ポーリングのピン作り	A	1日
E	看板のデザイン作り		2日
F	持ち多く看板作り	E	1日
G	貼り付ける看板作り	E	2日
H	内装組立	A, B, C, F, G	1日
	合計		12日

方法：問題を離散グラフに

- 作業内容 (A,B,C,D,E,H) を点に
- 作業順序を矢印 (→) に
- かかる日数を数値に



見方：並列できる仕事を見つける



なるべく短く、効率化したい

- なるべく短く
並列化によって、**7日間も短縮!**
5日間で終わることがわかった
- 効率化したい
表で分担すると、A~Hの8グループ必要に見えるが、
並列化によって、仕事は最大3系統であった。
そこで、3グループつくればよいことがわかった。

最後に。

離散グラフを使うことで、
問題はよりシンプルに見える化します。

ポスターセッションで
他の事例も
いっぱい紹介しています。

ぜひ、来てね。

ご清聴ありがとうございました。m(_ _)m

$y = (-2)^x$ のグラフ表現の研究とそれとともに表現可能となったグラフ

The study of the expression of the graph of $y = (-2)^x$ and the graphs become possible to be made

市ノ瀬弘祐

Ichinose Kousuke

Abstract

I tried making a graph of $y = (-2)^x$ which is not to learn in the high school. It was a graph to use Cartesian plane and the Gaussian plane for.

1. 目的

$y = (-2)^x$ のグラフなど、高校では扱わないグラフをどう描いたらよいかを研究した。さらにデカルト平面とガウス平面をどう組み合わせるのかを調べ、他のグラフ表現も試みた。

2. 2つの平面の利用を発見したきっかけ

$(-2)^x$ に $x = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}i$$

となるから、複素数も考慮しなければならない。

よって、デカルト平面+ガウス平面の空間内でグラフを作成する。

$(-2)^x$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} (-2)^x &= (-1)^x \times 2^x \\ &= (\cos\pi + i\sin\pi)^x \times 2^x \\ &= (e^{i\pi})^x \times 2^x \quad (\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta) \\ &= e^{i\pi x} \times 2^x \end{aligned}$$

$$(-2)^x = 2^x \cos(\pi x) + 2^x i \sin(\pi x)$$

媒介変数 t を用いて、 $2^x = t$ とおくと、 $y = (-2)^x$ の媒介変数表示は次のようになる。

$$\begin{cases} x = \log_2 t \\ y_r = t \cos(\pi \log_2 t) \\ y_i = t \sin(\pi \log_2 t) \end{cases}$$

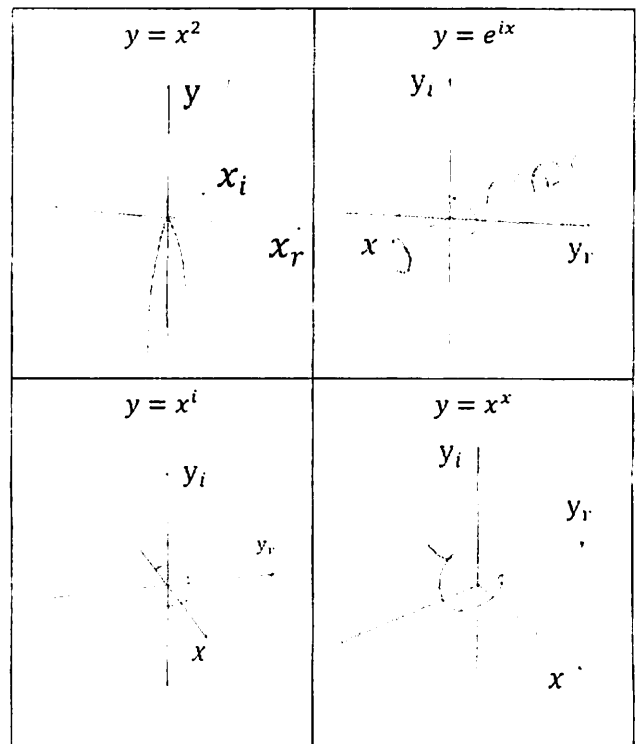
3. $y = (-2)^x$ のグラフ

媒介変数表示によって、 $y = (-2)^x$ のグラフは次のように表現できた。



4. 表現可能になったグラフ

この考え方を得たことで、さまざまなグラフの表現が可能になった。



5. 結論

デカルト平面とガウス平面を組み合わせるという考え方を得たことで、 $y = (-2)^x$ のほかにも、さまざまなグラフを表現することが可能になった。

今後は、三角関数や対数関数、高次関数などへ拡張させたい。またこれらのグラフを微積分したときどんなグラフになるかなど、さらにどう活かすかも考えてみたい。

6. キーワード

$y = (-2)^x$, グラフ, 媒介変数表示, ガウス平面

投象による立体のゆがみ
Distortion of the solid by projection

発表者 木下直 発表者 森内一生
Nao Kinoshita, and Issei Moriuchi

Abstract

Our research investigated main projection. If main projection is used, a from will be distorted and this distortion will change as the solid is moved from place to place. A main projection of a regular polyhedron was carried out using a camera, and a distorted solid was recorded. Moreover, it was investigated whether a solid can be specified from its shadow, and finally whether it could be established from the shadow if the original solid was a sphere.

1. 目的

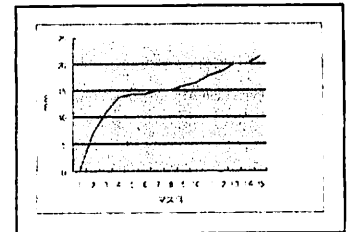
カメラやテレビのように3次元（立体）を2次元（平面）にうつすのは日常の出来事だが投象についてはあまり知られていないから。

2. 方法

5m離れて、1.5mの高さにカメラを固定する。そして方眼黒板に基準となる点を定める。カメラのレンズの中心に方眼黒板の基準となる点をあわせ、その点に、四面体の頂点を重ねる。1目盛りずつ正四面体をずらし撮影し、目盛りから頂点がどれだけずれたかを測る。

3. 結果

右のようなグラフが得られた。



4. 考察

一定の割合では変化しなかった。そのような結果になった要因の一つとして記録の取り方や実験方法が挙げられる。

5. 結論

実験・記録方法を改善し、他の正多面体のデータを集めていく。また、そこで得られた結果から球に応用できるかを調べたい。

6. 参考文献

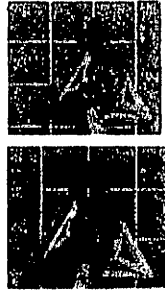
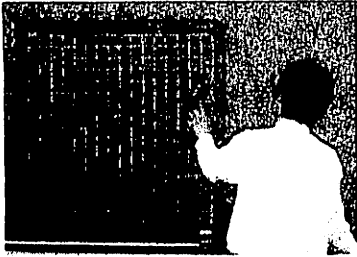
・ 図形科学（著・宮崎興二/小高直樹） 鳴門教育大学 松岡隆

7. キーワード

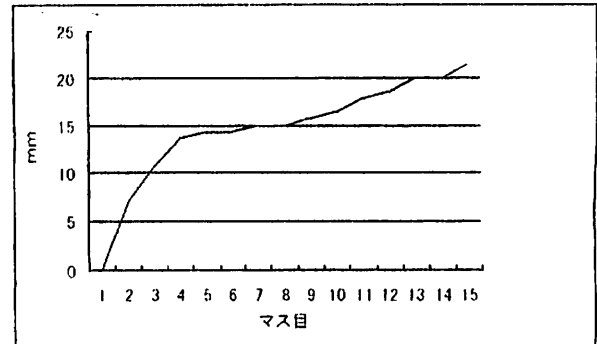
中心投象 正多面体

実験の様子

- 実験をしている写真
- 立体がゆがんでいる写真



実験結果(グラフ)



考察と課題

- 一定の割合で変化していない
- しかし、実験方法が正確であるとはいえないのでさらにデータを集めていきたい
- 他の多面体でも実験をして、球に応用できるかを調べたい

単位円に内接する正多角形を表す関数

The function showing the regular polygon inscribed in a unit circle

稲守 樹生

Tatsuki Inamori

Abstract

I define a general formula of the function which becomes a graph showing the side of the regular polygon inscribed in a unit circle. It is, however, only one equation.

After all, the general formula of the even regular polygon was able to be found.

1. 目的

単位円に内接する正多角形の辺を表すグラフになるような、一つの方程式で定義される関数の一般式を求める。すなわち、媒介変数表示などの多数の方程式または不等式で定義しない。

2. 方法

正 n 角形において、 n が偶数のときを考える。 $n = 4$ のとき、 $|x| + |y| = 1$

$n = 6$ のとき、 $\left| \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right| + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right| + |y| = \sqrt{3}$

$n = 8$ のとき、 $|x| + |y| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right| = 1 + \sqrt{2}$

ここから、一番遠い点同士を結んだ直線の方程式を二点のうち第一象限または第二象限にあるほうの点の座標を $(b, -a)$ として、 $ax + by = 0$ と表したときの左辺を絶対値記号で囲い、それぞれの和をとったものである。

又、右辺については $(1, 0), \left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right)$ を通る直線の y 切片となる。

3. 結果

正 n 角形の一般式は、正偶数角形のとき $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left| x \sin \frac{2k\pi}{n} + y \cos \frac{2k\pi}{n} \right| = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$ となる。

4. 考察

今回は正偶数角形しか求められなかったので、正奇数角形についても絶対値を用いた一般式が存在すると思われる。

5. 結論

絶対値を用いることで正偶数角形の関数を表すことが可能である。

6. 参考文献

新装版オイラーの贈物 人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ 東海大学出版会 吉田武
2010年1月23日初版

7. キーワード

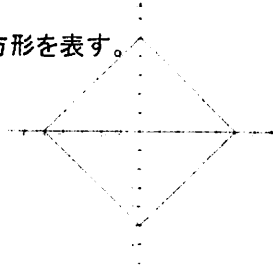
正多角形 絶対値

単位円に内接する正多角形の関数

一つの方程式で表す。

例えば、この式でも正方形を表す。

$$\begin{cases} y = x + 1 (-1 \leq x \leq 0) \\ y = x - 1 (0 \leq x \leq 1) \\ y = -x + 1 (0 \leq x \leq 1) \\ y = -x - 1 (-1 \leq x \leq 0) \end{cases}$$



絶対値を用いる

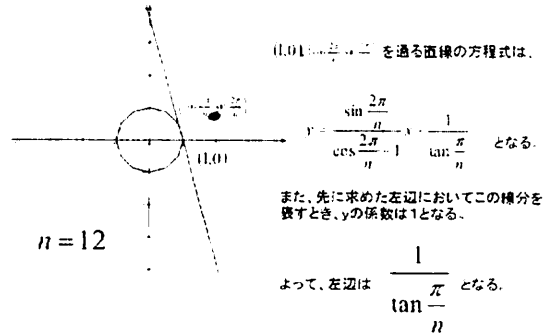
- $|x| + |y| = 1$ 正方形
- $\left| \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right| + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \sqrt{3}$ 正六角形
- $|x + 1| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right| = 1 + \sqrt{2}$ 正八角形



左辺

$$\begin{aligned} & \left| x \sin \frac{2\pi}{n} + y \cos \frac{2\pi}{n} \right| + \left| x \sin \frac{4\pi}{n} + y \cos \frac{4\pi}{n} \right| + \dots + \left| x \sin \pi + y \cos \pi \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left| x \sin \frac{2k\pi}{n} + y \cos \frac{2k\pi}{n} \right| \end{aligned}$$

右辺



一般式

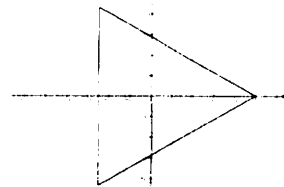
正 n 角形において、

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left| x \sin \frac{2k\pi}{n} + y \cos \frac{2k\pi}{n} \right| = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$$

(ただし $n \geq 4$ とする偶数)

正奇数角形

- $\frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{4} \right) + |y| + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 正三角形



最後に・・・

ポスターセッションではもうひとつの発表、
『実数を1、2、...、 n 倍したとき的小数部分のふるまい』
についての発表も行います。

実数を 1 倍、2 倍、 \dots n 倍したときの小数部分のふるまい
The behavior of decimal place of real numbers multiplied by natural number

小粥 康平
Kohei Kogai

Abstract

The objective is to prove that the behavior of decimal place of real numbers multiplied by natural number. It is periodical if the number is a rational number and it is dense if the number is an irrational number. It is shown by using geometrical proof and analytical proof

1. 目的

$\{x\}$ を x の小数部分であるとするとき、与えられた任意の実数 α について数列 $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}, \dots$ の分布を考察する。

2. 方法

第一に幾何学的証明を与える。この数列のふるまいを考えることは正方形内でのビリヤード問題を考えることと同じであるので、円の動径 $2\pi n\alpha$ ($n=1,2,\dots$) の場所に点を打っていくときの点の分布を考える。第二に連分数展開を用いた証明を与える。この数列は α が無理数のとき、どの項も同じ値をとらないことが言える。また連分数展開を用いることで α に対して無限に良い近似値がとれる。以上の二つを利用して同様に点の分布を考える。

3. 結果

この数列は α が有理数の場合、 α を既約分数であらわしたときの分母の数を周期とする周期数列となる。 α が無理数の場合は区間 $[0,1]$ において稠密である。

4. 考察

第一の方法、第二の方法の両者とも近似という操作を行って同じ結果を導いている。したがって他の近似の方法でもこの数列の分布がわかるのではないかと考えられる。

5. 結論

有理数を n 倍 ($n=1,2,\dots$) したときその小数部分はその有理数を q/p とあらわしたとき p 種類の数がある。無理数を n 倍 ($n=1,2,\dots$) したとき、その小数部分は数直線上に均等に敷き詰められる。このことは、有理数での近似によって知ることが出来る。

6. 参考文献

連分数のふしぎ 無理数の発見から超越数まで (ブルーバックス 2012 木村 俊一)

7. キーワード

数列の分布 ビリヤード問題 連分数展開 近似

オイラーの多面体定理の考察

Consideration of the Euler's Theorem for Polyhedra

竹内 勝己 中塚 心愛 高原 健 石井 勇志 松本 大輝

Takeuchi Katsumi, Nakatsuka Kokoa, Takahara Ken, Ishii Yushi, and Matsumoto Hiroki

Abstract

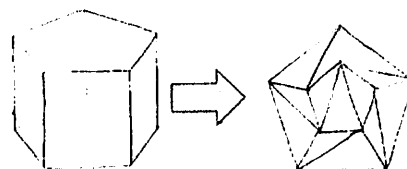
We researched about the Euler's Theorem for Polyhedra. This theorem holds good with all polyhedrons. We were interested why it was. In this research, we made a original rule. We use it when we prove this theorem.

1. 目的

多面体において、頂点の数を v 、辺の本数を e 、面の数を f としたとき、 $v-e+f=2$ が成り立つというオイラーの多面体定理が成り立つことを、目で見て分かる形で証明する。

2. 方法

多面体の1枚の面を取り外すと $v-e+f=1$ となる。外した面の位置から見える内部を観察し、平面に表した図は $v-e+f=1$ を満たす。この図を独自のルールにしたがい、 $v-e+f$ は1のまま、三角形1つにまで変化させることができるのではないかと考えた。そして取り外していた面を戻すことで、 $v-e+f=2$ が成り立つということを証明していく。



3. 結果

平面に表した図を変化させていく際、変化の方法によっては $v-e+f$ が1でなくなる場合が起きる。この問題を解決するために、変化のさせ方のルールを作った。このルールに従えば、どの多面体においても $v-e+f$ は1のまま、変化させていくことができると予想できた。

4. 考察

正多面体5種類を先述の方法で平面に表すことで、このルールが使えることが分かった。さらに準正多面体のいくつかの多面体でも試してみたが、このルールによって証明できることができた。

5. 参考文献

上垣渉・何森仁 著 数と図形の歴史 70 話 第一版 2010 日本評論社

6. キーワード

オイラーの多面体定理 正多面体

オイラーの多面体定理の考察



竹内 勝己
石井 勇志 萩原 健
中野 心成 松本 大樹

オイラーの多面体定理とは？

多面体において、
頂点の数: v 辺の本数: e 面の数: f



$$v - e + f = 2$$

これまでの研究

6種類しかない正多面体を調べていると、
オイラーの多面体定理を発見。

3次元の定理であるオイラーの多面体定理が
2次元でも似た性質がないか？

⇒ 平面の敷詰(タイル張り)を行い、平面
の敷詰の方法が11種類あることを
発見。

これまでの研究2

オイラーの多面体定理とは？

多面体において、
頂点の数: v 辺の本数: e 面の数: f



$$v - e + f = 2$$

今回のテーマ

オイラーの多面体定理がどのような正多面体
でも成り立つのかどうかを調べる。



目で見て分かるような調べ方を考える。

考え方～正四面体～

あ) 正四面体の一枚の面をはずした図を考える。



正四面体	はずした後
$v : 4$	$v : 4$
$e : 6$	$e : 6$
$f : 4$	$f : 3$

$$v - e + f = 1$$

考え方～正四面体～

い) はずした面から多面体の内部を観察し、平面
に表し v, e, f を調べる。

はずした後	平面に表す
$v : 4$	$v : 4$
$e : 6$	$e : 6$
$f : 3$	$f : 3$

平面に表しても v, e, f の値は変化しない。

考え方～正四面体～

う) 三角形を一枚除去し、その後、 v, e, f を調べる。

平面に表す	除去した後
$v : 4$	$v : 4$
$e : 6$	$e : 5$
$f : 3$	$f : 2$

$$v - e + f = 1 \text{ のまま}$$

考え方～正四面体～

え) 三角形の除去をもう一度繰り返すと、
三角形ひとつになる。

最終的に三角形ひとつになると
$v : 3$ $e : 3$ $f : 1$

$$v - e + f = 1$$

最初から最後まで変わらない！！

考え方～正四面体～

お)面を除去していた多面体に面を戻し、もとの多面体を考える。



除去した面を再び戻す。
(fが1増加する)



$$v - e + f = 2$$

考え方～立方体～

多角形はすべて三角形に分割できる!!

$$v : 8$$

$$e : 12$$

$$f : 5$$



$$v : 8$$

$$e : 17$$

$$f : 10$$

$$v : 8$$

$$e : 16$$

$$f : 9$$



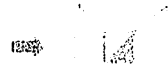
$$v : 3$$

$$e : 3$$

$$f : 1$$

$$v - e + f = 1$$

～立方体～



$$v - e + f = 0$$

$$8 - 17 + 9 = 0$$

例) 1



$$v : 8$$

$$e : 12$$

$$f : 5$$

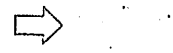
$$v - e + f = 1$$

成り立たない

そこで、最先学算数クラブで特別ルールを作りました。

- ・ルール
- ・1個当たりの辺の数が、少ないところから取っていくこと
- ・変換した時に、図形が分裂してはいけないこと

例) 正多面体の場合



$$v = 10$$

$$e = 22$$

$$f = 13$$

$$v - e + f = 1$$



$$v = 10$$

$$e = 22$$

$$f = 13$$

$$v - e + f = 1$$

$$v = 10$$

$$e = 17$$

$$f = 9$$

$$v = 5$$

$$e = 7$$

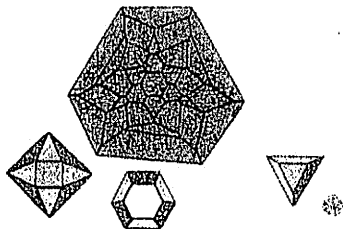
$$f = 2$$

$$v = 3$$

$$e = 3$$

$$f = 1$$

v-e+f=12、6、0の場合でもなった。



予想～適当な多面体～

面を一枚はずし、そこから内部を観察してできる平面図
 はもとの多面体と比 v, e, f の値が変わらない。

その平面図をすべて三角形に分割し

$$v - e + f = 1$$

をみたしたまま、三角形が一つになるまで除去
 することができる。

はずした面をよもとに戻してできる多面体は

$$v - e + f = 2$$

をみたす。

今後の課題

現段階では、正多面体や一部の準正多面体で
 しか調べられていない。



すべての多面体が、今回の方法で調べることが
 可能であるかを調べていきたい。

ドラえものの4次元ポケットの考察

青田 なな子
Aota Nanako

Abstract

I think about Doraemon's four-dimensional Pocket. I consider some conditions and assumptions about four-dimension. Based on them, I build up some hypotheses. I consider whether these hypotheses are consistent with Doraemon's story.

1. 目的

「ドラえものの4次元ポケット」の4次元とはなんなのかを漫画「ドラえもん」の中の描写を参考にしながら考察する。

2. 方法

最初に次元というものを定義し、そこから今回の考察をする上での条件や留意点を述べたうえでいくつか複数の有力そうな考察に的を絞りドラえものの4次元ポケットの考察を数学的に行っていく。

3. 考察

次元の考え方を定義し2次元と3次元に置き換えて4次元ポケットを理解する。その定義、4次元ポケットの理解、本編の描写から4次元ポケットは利用者の思考を読み取って対応する内容物を出す汎用的な物体格納及び運搬ツールであることが考えられた。

4. 結論

4次元ポケットは存在するかもしれないが、我々はそれを認識できない。また、4次元ポケットの説明を可能な限りしようとするどこかで矛盾が生じてしまう。

5. 参考文献

次元とは？

<http://www.geocities.jp/tyominda/TM02.html>

4次元の世界って何だろう？

<http://hooktail.sub.jp/welcome/what4dim/>

6. キーワード

ドラえもん 4次元ポケット 次元 ベクトル

Fractals

藤岡 佳帆理
Fjioka Kaori

Abstract

I think about Fractals. Fractals are a figure which has infinite similar figures. My aim is to make the Fractal. I could make it by using sequence.

1. 目的

パスカルの三角形とフラクタル図形について興味深い性質があった。パスカルの三角形を2で割り切れないものに色を塗っていくと対称性のあるフラクタル図形を見つけることができた。今回は他の数の並びを用いてフラクタル図形を作っていた。

2. 方法

図のように自然数を正方形状に無数に並べていく。このときパスカルの三角形と同様に2で割り切れないものや3で割り切れないものを色で塗っていきできた図形のフラクタル性を調べていく。

1	4	9	16
2	3	8	15
5	6	7	14
10	11	12	13

3. 考察

ある法則によって数を正方形状に並べてできた図形はフラクタル性を持つのではないかと考えられた。

4. 結論

上記でできた図形はフラクタル性が見られた。これからは他に数の並びを作ってフラクタル性を持つかどうかを調べていきたい。

5. 参考文献

高等学校 数学B (数研出版)

6. キーワード

フラクタル図形 パスカルの三角形 階差数列

ナイトツアー Knight Tour

杭田 裕也 福重 海 福本 隼也
Kueda yuya , Hukushige Kai , Hukumoto syunya

Abstract

We are interested in Knight's tour problem.
From an arbitrary starting position, move a Knight chess piece around a chess board visiting all other squares on the board exactly once.
We could discovery property of Knight' tour.

1. 目的

このナイトツアーはチェスのナイトの動きをしながらすべてのマスを一回ずつ通ることができるかという問題である。この問題を解決するために様々な性質を見つけていく。

2. 方法

初めは5×5マスから一つ一つやっていった。そこで奇数でできている図形、偶数でできている図形によって性質が分けることのできるのではないかと思い考えていった。

ナイトツアーの例

3	10	21	16	5
20	15	4	11	22
9	2	25	6	17
14	19	8	23	12
1	24	13	18	7

3. 考察

アプリケーションを使うことによって300×300までの偶数の図形は閉路が存在することが確認できたので偶数でできている図形は必ず閉路が存在するのではないかと考えている。

4. 結論

3×3と4×4は不可能であることが分かった。そこで奇数でできている図形は出発点によってはナイトツアーができない点もあることが分かり証明ができた。また、閉路が存在する図形はどこから始めてもナイトツアーができるということも証明ができた。また、限定的ではあるがナイトツアーの解の作り方も見つけることができた。

5. 参考文献

- ◆ パズルランド <http://www.ne.jp/asahi/suzuki/hp/main.htm>
- ◆ グラフ理論入門

6. キーワード

ナイトツアー 閉路

四則計算による自然数の生成 Generation of natural numbers

児子晴南 佐藤結美菜 浅井悠介 川北如水
Haruna Nigo Yumina Sato Yusuke Asai Ikumi Kawakita

Abstract

There is a theorem which says that “Whatever four different natural numbers we choose, then we can come up with 10 as an answer using the four basic math operations.” Using the same rule, we thought that there are other answers besides 10 that can be generated. As a result, 3 could be generated using 126 patterns using the same rule.

目的

桁の自然数から異なる4つの数を選び、四則計算を用いて126通り全てで生成可能な数を探す。同時に、証明を効率的に進める方法を開発する。そして、その方法を実際に用いて検証を行う。

方法

- 実際に、126通り全ての組合せで四則計算を用いて計算した。
- i. 9つの中から4つ選ぶのではなく、6つの数から4つを選んだ組合せ15通りで候補の数の生成を行った。
- ii. iiで残った候補の数(3, 5, 12, 16, 18)を126通り全ての組合せで実際に計算した。

結果

- 10は全ての組合せで生成できた。
- i. 3, 5, 12, 16, 18が15通り全てで生成でき、126通り全てで生成できる候補の数となった。
- ii. 3が126通り、12が1通りを残して125通り計算できた。

考察

126通り計算する中で簡単なものと難しいものがあり、特に有理数に変換する必要がある組合せは難しい。iiのときに扱いづらい数を選んだほうが、126通り生成できる数の候補を絞ることができる。

結論

10と同様に126通り全ての組合せで生成できることがわかった。126通りで生成できる数の候補を絞ると、最初から126通りの組合せを計算するのではなく、6つの数字を選び、その組合せ15通りで生成可能な数みを126通り計算する候補の数とする方法は効率的に証明を進めるにあたって有効だった。

キーワード

四則計算 自然数の生成

Generation of Natural Numbers

Haruna Nigo Yumina Sato
Yusuke Asai Ikumi Kawakita
Okayama Ichinomiya High School

Question

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{5} \textcircled{8} \Rightarrow 10$$

$+$ $-$ \times \div $()$

Theorem

If you choose four different natural numbers, then we can come up with 10 as an answer using the four basic math operations.

1 2 3 4	$\Rightarrow 1+2+3+4$	} 126 patterns
1 2 3 5	$\Rightarrow (2+3+5) \times 1$	
1 2 3 6	$\Rightarrow 2+3+6-1$	
1 2 3 7	$\Rightarrow (3+7) \times (2-1)$	
1 2 3 8	$\Rightarrow 1+3+8-2$	
1 2 3 9	$\Rightarrow (3+9-2) \times 1$	
1 2 4 5	$\Rightarrow 2+4+5-1$	
1 2 4 6	$\Rightarrow (4+6) \times (2-1)$	
	\vdots	
6 7 8 9	$\Rightarrow (7+9) \times 2 \div 3$	

Difficult

$$3\ 4\ 7\ 8 \Rightarrow 10$$

Definition

Number that can be generated from the 126 combinations of four numbers from 1 to 9 is called the Galaxy Number.

Hypothesis

others also exist besides **10**.

Candidates for the Galaxy Number

1 2 3 4 5 6 8
12 15 18 20

1 2 3 4 ⇒
1 2 3 5 ⇒
1 2 3 6 ⇒
1 2 3 7 ⇒
1 2 3 8 ⇒
1 2 3 9 ⇒
1 2 4 5 ⇒
1 2 4 6 ⇒
1 2 4 7 ⇒
1 2 4 8 ⇒
1 2 4 9 ⇒
1 2 5 6 ⇒
1 2 5 7 ⇒
1 2 5 8 ⇒
1 2 5 9 ⇒
1 2 6 7 ⇒
1 2 6 8 ⇒
1 2 6 9 ⇒
1 2 7 8 ⇒
1 2 7 9 ⇒
1 2 8 9 ⇒
1 3 4 5 ⇒
1 3 4 6 ⇒
1 3 4 7 ⇒
1 3 4 8 ⇒
1 3 4 9 ⇒
1 3 5 6 ⇒
1 3 5 7 ⇒
1 3 5 8 ⇒
1 3 5 9 ⇒
1 3 6 7 ⇒
1 3 6 8 ⇒
1 3 6 9 ⇒
1 3 7 8 ⇒
1 3 7 9 ⇒
1 3 8 9 ⇒
1 4 5 6 ⇒
1 4 5 7 ⇒
1 4 5 8 ⇒
1 4 5 9 ⇒
1 4 6 7 ⇒
1 4 6 8 ⇒
1 4 6 9 ⇒
1 4 7 8 ⇒
1 4 7 9 ⇒
1 4 8 9 ⇒
1 5 6 7 ⇒
1 5 6 8 ⇒
1 5 6 9 ⇒
1 5 7 8 ⇒
1 5 7 9 ⇒
1 5 8 9 ⇒
1 6 7 8 ⇒
1 6 7 9 ⇒
1 6 8 9 ⇒
2 3 4 5 ⇒
2 3 4 6 ⇒
2 3 4 7 ⇒
2 3 4 8 ⇒
2 3 4 9 ⇒
2 3 5 6 ⇒
2 3 5 7 ⇒
2 3 5 8 ⇒
2 3 5 9 ⇒
2 3 6 7 ⇒
2 3 6 8 ⇒
2 3 6 9 ⇒
2 3 7 8 ⇒
2 3 7 9 ⇒
2 3 8 9 ⇒
2 4 5 6 ⇒
2 4 5 7 ⇒
2 4 5 8 ⇒
2 4 5 9 ⇒
2 4 6 7 ⇒
2 4 6 8 ⇒
2 4 6 9 ⇒
2 4 7 8 ⇒
2 4 7 9 ⇒
2 4 8 9 ⇒
2 5 6 7 ⇒
2 5 6 8 ⇒
2 5 6 9 ⇒
2 5 7 8 ⇒
2 5 7 9 ⇒
2 5 8 9 ⇒
2 6 7 8 ⇒
2 6 7 9 ⇒
2 6 8 9 ⇒
2 7 8 9 ⇒
3 4 5 6 ⇒
3 4 5 7 ⇒
3 4 5 8 ⇒
3 4 5 9 ⇒
3 4 6 7 ⇒
3 4 6 8 ⇒
3 4 6 9 ⇒
3 4 7 8 ⇒
3 4 7 9 ⇒
3 4 8 9 ⇒
3 5 6 7 ⇒
3 5 6 8 ⇒
3 5 6 9 ⇒
3 5 7 8 ⇒
3 5 7 9 ⇒
3 5 8 9 ⇒
3 6 7 8 ⇒
3 6 7 9 ⇒
3 6 8 9 ⇒
3 7 8 9 ⇒
4 5 6 7 ⇒
4 5 6 8 ⇒
4 5 6 9 ⇒
4 5 7 8 ⇒
4 5 7 9 ⇒
4 5 8 9 ⇒
4 6 7 8 ⇒
4 6 7 9 ⇒
4 6 8 9 ⇒
4 7 8 9 ⇒
5 6 7 8 ⇒
5 6 7 9 ⇒
5 6 8 9 ⇒
6 7 8 9 ⇒

126
patterns

Takes too much
time

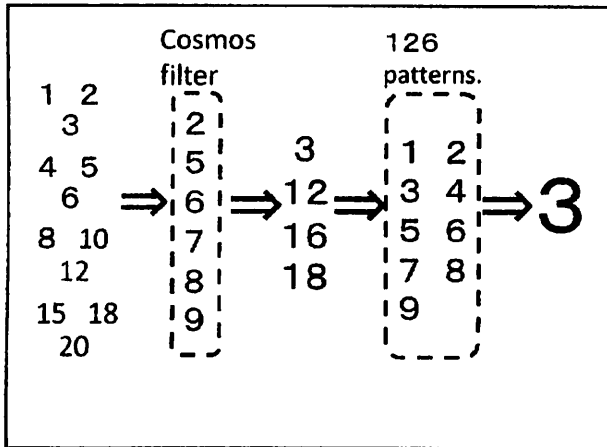
Definition

Number that can be generated from the 15 combinations of four numbers from 2,5,6,7,8,9 is called the Cosmos Number.



These combinations are only 15 patterns.

- | | | |
|-----------|-----------|---------------|
| 2 5 6 7 ⇒ | | } 15 patterns |
| 2 5 6 8 ⇒ | | |
| 2 5 6 9 ⇒ | | |
| 2 5 7 8 ⇒ | | |
| 2 5 7 9 ⇒ | 2 6 8 9 ⇒ | |
| 2 5 8 9 ⇒ | 2 7 8 9 ⇒ | |
| 2 6 7 8 ⇒ | 5 6 7 8 ⇒ | |
| 2 6 7 9 ⇒ | 5 6 7 9 ⇒ | |
| | 5 6 8 9 ⇒ | |
| | 5 7 8 9 ⇒ | |
| | 6 7 8 9 ⇒ | |



Question

1 3 4 7

⇒ **3**

串刺し団子の一筆書きと完全順列に見る漸化式の立て方

How to make recurrence formula from the analysis of unicursal skewered dumplings and derangement.

志賀 明日香

Shiga Asuka

Abstract

We can make recurrence formula by analysing detailed case .It is available to the questions such as derangement and catalan number.

1.目的

図形(串刺し団子)の一筆書きの総数を求める問題についていろいろな解法を考えてみることで、場合の数の問題の面白さに触れる。また、それを通して完全順列の漸化式について、これまで行われていなかったであろう立て方を提示する。

2.方法

「マスターオブ場合の数」という問題集で出会った問題を通して、いろいろな別解を考えたり、調べたりした。

3.結果

少ない場合分けで済まそうとすることで、簡潔ではあるが、ときに思いつき辛い漸化式の立式になることがある。細かく場合分けすることで、手順は多くても、自然な立式ができることが分かった。その方式で、完全順列、カタラン数などの漸化式の立式の見通しが良くなる。一筆書きの問題については、未解決の問題群(団子の変形版)が残った。

4.考察

団子の問題および完全順列に対し、自分の納得できる解答が考えられてよかった。団子の変形版の未解決問題については、これからも考えていきたい。

5. 結論

漸化式で場合の数を求めたいとき、ある種の問題については、細かく場合分けすることで簡単になることがある。

6.参考文献


大学への数学「マスター・オブ・場合の数」東京出版 三石数学塾のサイト

7.キーワード

一筆書き 串刺し団子 漸化式 完全順列 モンモール数 場合の数 カタラン数

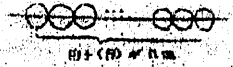
串刺し団子の一筆書きと完全順列に見る漸化式の立て方

大阪府立北野高校2年生
志賀 明日香



はじめに

ここでは、次の問題を、特に漸化式を用いて解く方法について考察する。



団子(串)が5個

問 上図のような串刺し団子を左端から書き始めて一筆書きで描く方法は何通りか。

団子は一筆書き可能

団子的问题是、一筆書きすることができる。

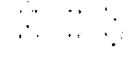
実際に書くときに何通りになるかを考えてみる。

n 個の団子を書く方法を $F(n)$ 通りとする。

団子1個のとき

・団子が1個の場合
前進するのに3通り、後退するのに2通り、あとの進み方は1通りなので、 $3 \times 2 = 6$ 通りである。

よって、 $F(1) = 6$

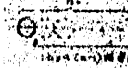


団子がn個あるとき

$F(n)$ が $n-1$ 個を使って欲しい。
どうしたら、 $F(n-1)$ で書けるか？
まずは、 $F(n-1)$ が書けるように場合に分けてみる。

→1個目の団子を全て書き終えてから、次の団子を書くときを考える。 $6F(n-1)$ 通りとなる。

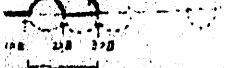
ただし $n \geq 2$



団子がn個あるとき①

●1個目の団子を途中で切り上げ、左から3つ目の分岐点で左に戻るとき

$3 \times 3 \times 2 \times 2 \times F(n-2) = 36F(n-2)$ 通り



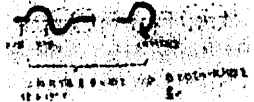
このように書き終えてから、左から3つ目に戻るとき、 $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times F(n-2)$ 通り。

団子がn個あるとき②

●一般化して、一筆目の団子を切り上げて左から $(k+1)$ 個目までの分岐点で左に戻るとき

同様に入ると、 $6^k F(n-k)$ 通り

● $k=n$ のときは、0通り



団子がn個のとき

$F(n)$ は、 $F(n-1)$ 、 $F(n-2)$ 、...、 $F(1)$ などを用いて

$F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 6^k F(n-k)$ と書ける。ただし $n \geq 2$

あとは、この漸化式を解けばよい。

団子がn個のとき

$F(n) = 6F(n-1) + 36F(n-2) + \dots + 6^k F(n-k) + \dots + 6^{n-1} F(1) + 6$

$6F(n-1)$ 以降の項に注目する。

$F(n-1) = 6F(n-2) + 36F(n-3) + \dots + 6^{n-2} F(1) + 6$

ただし $n \geq 2$

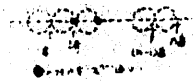
【 $6F(n-1)$ 以降の項の係数は、 $6F(n-1)$ が 6^2 、 36 、したがって $6^k F(n-k) = 6^k F(n-k) = 36^k F(n-k)$ 、 $6^{k+1} F(n-k-1)$ が乗る。

【 $6^k F(n-k)$ は、 $36^k F(n-k)$ 、 $6^{k+1} F(n-k-1)$ が乗る。したがって、 $6^{k+1} F(n-k-1)$ は、 $36^{k+1} F(n-k-1)$ が乗る。したがって、 $6^{k+1} F(n-k-1)$ は、 $36^{k+1} F(n-k-1)$ が乗る。

】

補足: マーキング(印付け)

- 左から7番目、7番目、n-1番目の分岐点のどれかを選択し、(7)に赤から始めて左側に戻ることはする(左からn番目の分岐点に赤から戻るしかない)ので、戻る。この仕組みをついておけば、1つの塗り方に対して常に6通りの書き方がある。塗り方は、各分岐点を赤く塗るか塗らないかの選択を繰り返して2ⁿ⁻¹通りある。よって、印付けをすることで2ⁿ⁻¹通りもある。三石数学館というウェブサイトで見つかった。



補足: 2つ目の場合分け

- 一箇目の団子を切り上げるとき
どのような書き方でも、必ず一度だけ左から2つ目の分岐点に戻ってくる。そして、そのときに一箇目の団子の残っている部分を右回りに回るか、左回りに回るかを決めることになる。
よって、 $3 \times F(n-1) \times 2 = 6F(n-1)$
あとは一箇目の団子をすべて書き終えたときの $6F(n-1)$ 通りと合わせて同じ結果を得る。

団子と完全順列

団子のときと似た方法で、完全順列の漸化式も立てられることがわかった。

※完全順列については、
 $g(n) = (n-1)g(n-1) + g(n-2)$
という漸化式が知られている。

完全順列とは

- 完全順列の問題とは、次のような問題である。
仲良しの n 人 ($n \geq 1$) でパーティーを開くことになり、各自がプレゼントを持ち寄って交換することになった。もちろん、自分が持ってきたプレゼントを自分がもらうことはない。このときのプレゼント交換の仕方の総数を求めよ。
※他にモンモールの問題、攪乱順列などとも呼ばれる有名な問題、いろいろなバリエーションがある。

細かく分ける

- 完全順列を $g(n)$ 通りとする。
 $g(1) = 0$, $g(2) = 1$, $g(3) = 2$ は明らかである。
さて、 n 人で交換するとき、人間に番号を振る $(1, 2, 3, \dots, n)$ 。1の人(以後1と呼ぶ)が2にプレゼントを渡すことを $(1 \rightarrow 2)$ と表すことにしよう。
また、(1) のような状態を「長さ2のループをなす」、(1) のような状態を「長さ3のループをなす」ということにする(n 人も同様)。

問題の読み替え

ループ図を導入したことで、問題を次のように読み替えることができる。

1 ~ n でいくつかの(1つでもよい)ループをつくる時、長さが1のループをつくらなければ、何通りのループができるか。

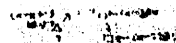
細かく分ける

- (1) が長さ2のループをなすとき
図の k に当てはまる人が k 以外の $(n-1)$ 通りある。ループが1つできれば、あとの $(n-2)$ 人で完全順列のループをつくることになる。これは、 $g(n-2)$ 通りある。(n-1)通りのおのについて、 $g(n-2)$ 通りあるので、 $(n-1)g(n-2)$ 通りとなる。



細かく分ける

- 一般化して、 k 人 ($2 \leq k \leq n-2$) でループをなすとき
図の \square が $(n-1)$ 通り、 \square が $(n-2)$ 通り、... と繰り返して $(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)g(n-k)$ 通りとなる。
 $k = n$ 、つまり全体でループが1つだけのとき
同様の考え方で $(n-1)!$ 通りである。



団子を真似する

以上より、 $g(n)$ は、 $g(n-1)$, $g(n-2)$, ... などを用いて

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} (n-k)g(n-k)$$

($n \geq 4$) とかける。
あとはこの漸化式を解けば良い。

団子を真似する

$g(n) = (n-1)g(n-2) + (n-1)(n-2)g(n-3) + \dots + (n-1)(n-2) \dots 4 \cdot 3g(2) + (n-1) \cdot 1$ (ただし $n \geq 4$)
 この漸化式も同じように解ける。
 $g(n-1) = (n-2)g(n-3) + (n-2)(n-3)g(n-4) + \dots + 1$
 2 の $(n-1)g(n-2)$ の項は $(n-1)g(n-1)$ に等しい。
 よって、 $g(n) = (n-1)g(n-2) + (n-1)g(n-1) + (n-1)g(n-1) + \dots + (n-1)g(n-1) + (n-1)g(n-2)$ が得られる。ただし $n \geq 4$ 。
 $g(4) = 3g(2) + 3 \cdot 2g(1) + 3 \cdot 1 = 3(2) + 3(1) + 3(1) = 10$ となって、これは $n=4$ のときも成り立つ。
 あとは、 $g(2)$ 、 $g(3)$ の値から順に求めていけばよい。

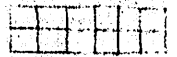
人生漸化式

普通の漸化式は前の段階、あるいは前とそのさらに前の段階を使って表す。
 ここで述べた方法は前のことすべてを使ってあるので、感覚的には人生漸化式といえるかもしれない。昔のことすべて振り返って今のこと(次のこと)を考えるほうが自然に考えられることもある。

×は連続しない

次の問題は、普通は2つの数列を用意して連立漸化式をつくって解く。詳細は書かないが、これも人生漸化式を使うと直接求まる。

右図のような12個のマスのそれぞれに○か×かを記入していくとき、たてにも横にも×が連続しないような記入の仕方は何通りあるか。



自然数の表し方

自然数 n を1以上の自然数の和(1つでもよい)で表す方法の総数を求めよ。
 ただし、和の順番が異なれば別の和と考える。たとえば、 $3 = 1+1+1 = 2+1 = 1+2 = 3$ で $n=3$ のときは4通りである。
 この問題も人生漸化式で簡単に解ける。

新たな例 カタラン数

カタラン数 C_n とは、 $n \times n$ の正方形の格子について、対角線を跨がずに、端から端へ移動する最短経路の個数のことである。
 ※カタラン数には数多くのバージョンがある。
 $2n$ 人が円になって手を交差させないで握手をする場合の数、 $1)$ を正しく並べる方法、などもカタラン数である。

カタラン数にも人生漸化式

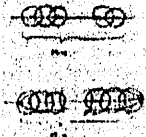
カタラン数についても、人生漸化式が成り立つ。

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \quad (C_0 = 1)$$

これは既に知られている結果だった。この漸化式を解くには、たみこみと呼ばれる方法が必要で、団子や完全順列のように単純には解けない。が、完全順列、カタラン数に人生漸化式が適用できるのはおもしろい。

派生した未解決問題

団子を拡張した次のような問題については、まだ何通りあるか不明。少し違うだけで難易度が格違になる。



参考文献

大学への数学「マスター・オブ・場合の数」
 東京出版
 三石数学塾のウェブサイト

魔方陣

愛知県立明和高校 SSH 部数学班

野田聖 稲垣征哉 伊藤樹 吉田敏 船戸開

定義

魔方陣は $n \times n$ マスの正方形に 1 から n^2 までの数字が入っており、その縦、横、対角線のいずれの和も等しくなるというものとする

・特殊な魔方陣

完全魔方陣…「対角線に平行なマス目の数の和も縦、横、対角線の和と等しい」という条件を満たした魔方陣

4×4 の完全魔方陣の場合はどこの 2 行×2 列をとっても和が一定である

1	8	13	12	1	8	13	12	色つきの部分と縦、横、 対角線の和は 34 で等しい
14	11	2	7	14	11	2	7	
4	5	16	9	4	5	16	9	
15	10	3	6	15	10	3	6	

・複数魔方陣

定義

$n \times n$ の方陣が m 個あり 1 から mn^2 までの数字を入れて魔方陣を m 個完成させる。

その m 個の魔方陣の縦、横、対角線の和がすべて等しいものを複数魔方陣とする。

作り方

1. m 個の方陣に n^2 個ずつ数字を合計が等しくなるように割り振る
2. それぞれの方陣で数字が小さいほうからある 1 から n^2 までの $n \times n$ の魔方陣をもとに埋めていく

①

1	6	7	12	2	5	8	11	3	4	9	10
13	18	19	24	14	17	20	23	15	16	21	22
25	30	31	36	26	29	32	35	27	28	33	34
37	42	43	48	38	41	44	47	39	40	45	46

②

1	12	11	4
10	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

↓

1	43	42	12	2	44	41	11	3	45	40	10
36	18	19	25	35	17	20	26	34	16	21	27
24	30	31	13	23	29	32	14	22	28	33	15
37	7	6	48	38	8	5	47	39	9	4	46

すべての縦、横、対角線の和が 98 となっている

課題① どのような場合に複数魔方陣を作ることができるのか

結果 n の値が偶数でなくてはいけない

・作り方の②で用いる $n \times n$ の魔方陣のすべての縦、横、対角線が

2 分の n 個の奇数と 2 分の n 個の偶数でできている

課題② 特殊な魔方陣をもとにして複数魔方陣を作ったときその性質を受け継ぐかどうか

完全魔方陣の場合

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6



1	24	37	36	2	23	38	35	3	22	39	34
42	31	6	19	41	32	5	20	40	33	4	21
12	13	48	25	11	14	47	26	10	15	46	27
43	30	7	18	44	29	8	17	45	28	9	16

縦、横、対角線、対角線と平行な線、2 行×2 列すべて和が 98

結果

特殊な魔方陣の性質をうけつぐ。

統計学から見た食物と学力・身長・肥満との関係

The relationship between food and academic ability, height or obesity based on statistics

井口 舞香 田中 亮輔 上河 美恵 山名 幸世

Maika Iguchi Ryosuke Tanaka Mie Tsuchikawa Sachiyo Yamana

Abstract

We analyzed food and relations with scholastic ability, height, the obesity using statistics. The correlation coefficient of food and academic ability, height and overweight was calculated using Excel based on the data according to all prefectures, and a relationship was considered.

1. 目的

統計学を利用して、食物と学力・身長・肥満との関係を分析する。

2. 方法

様々な参考文献から都道府県別統計を集める。そのデータをもとに Excel を利用して食物と学力・身長・肥満との相関係数を求める。さらに偏相関係数を求め、数ある食物の中から学力・身長・肥満に影響を与える食物を抽出する。

3. 結果・考察

学力

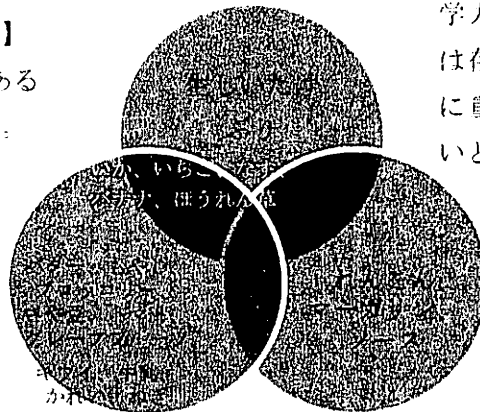
【相関係数を求めた結果と考察】

相関係数が 0.4 以上で相関があるものは右のベン図の通りである。

学力と身長に重複して関係のある食物は存在するが、学力と肥満、身長と肥満に重複して関係のある食物は存在しないと考えられる。

身長

肥満



【偏相関係数を求めた結果と考察】

表1より生しいたけが学力に影響することが分かる。ぶりといちごも影響するのではないかと考えられる。その他の食べ物は影響していないと考えてもよいと考えられる。

また表2より、かれい・いか・バター・ねぎ・なす・キウイフルーツが身長に影響することが分かる。ほうれん草・もやし・さや豆・トマト・いちご・バナナも影響するのではないかと考えられる。その他の食べ物は影響していないと考えてもよいと考えられる。

参考URL：家計調査 <http://www.tododan.jp/data/>

都道府県別統計とランキングで見る県民性

<http://todoran.com/>

表1 ↓
食物と学力との関係
表2 →
食物と身長との関係

ぶり	0.32
いか	0.22
ほうれん草	0.27
なす	0.19
生しいたけ	0.37
いちご	0.33
バナナ	0.20

かれい	0.37
いか	0.41
牛乳	0.26
バター	0.38
ほうれんそう	0.31
ねぎ	0.46
ブロッコリー	0.26
もやし	0.34
さやまめ	0.32
なす	0.52
トマト	0.30
グレープフルーツ	0.20
いちご	0.29
バナナ	0.32
キウイフルーツ	0.37

超完全順列とその拡張
Super-Derangement and its expansion

松井 聡
Matsui Satoshi

Abstract

I discovered that there are 2 types in Derangement and named one of them Super-Derangement (SD). I tried to find the total number of SD and also I tried to expand SD into two dimensions. As a consequence, I was able to find the total number, but I couldn't find that of two-dimensional SD so far.

1. 目的

一般に順列の中でどれも正しい場所にはない順列を完全順列と呼ぶが、完全順列が2つに分けられることを発見し、その一方を超完全順列と名付けた。ここで、超完全順列について一般項を求め、さらに、2次元への拡張（平面上に並べる）を目指した。

2. 方法

まず、完全順列について漸化式をまとめ、同じ考えを超完全順列にも適応させて一般項を求めた。2次元については1次元との対応をもとに定義し、同様に一般項を求めることを試みた。2次元の一般項はうまくいかなかったため、1つ1つ数え上げて規則を見出すことで一般項の推測を図った。

3. 結果

1次元の超完全順列の一般項を求め、さらに2次元の超完全順列の定義を定めることができた。しかし、2次元での超完全順列の一般項は推測で終わり、結局求められなかった。また、本題とは少しずれるが、研究の過程で背の順問題（背の順に並べるのに必要な最小手数が最大となる並び）に超完全順列が応用できることが分かった。

4. 参考文献

なし

5. キーワード

完全順列 超完全順列 背の順問題