大手前高校 74期 S探 理系 数学分野論文集

3元 n 次方程式の表すもの

1. はじめに

私たちのグループメンバーは中学生の時に三平方(ピタゴラス)の定理『$a^2+b^2=c^2$』を学習し，その後にフェルマーの最終定理『$a^3+b^3=c^3$』を満たす自然数 a, b, c の組が存在しないということを知った。そこで，a, b, c の指数を 2 から 3 に 1 増やしただけで与えられた式を満たす自然数の組が存在しなくなることに興味を持ち，a, b, c の指数の組み合わせを三平方の定理やフェルマーの最終定理のように全て同じ指数にせず，様々な値に変え，そこから式を満たす自然数 a, b, c の組に何かしらの規則性がないか，また上手く行けば自分たちだけで，どうにかしてフェルマーの最終定理の証明が出来ないかと考えた。

2. 方法

まず，便宜上 a, b, c の指数の組を(p, q, r)とする。すなわち，$a^p+b^q=c^r$

すると，p, q, r がそれぞれ 2 または 3 のとき，考えられる p, q, r の組は

$(p, q, r)=(2, 3, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$の 4 組である。※今回$(2, 2, 2)$は三平方の定理，$(3, 3, 3)$はフェルマーの最終定理と一致するため除外し，a と b は順不同なので$(3, 2, 2)$, $(3, 2, 3)$も除外した。

この 4 組それぞれについて a, b, c を満たす自然数の組について調べようとした。(しかし，期間の都合上$(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$は調べることができなかった。)

(i) $(p, q, r)=(2, 3, 2)$，すなわち $a^2+b^3=c^2$ ……① のとき

これを満たす自然数 a, b, c の組を探そうとしたが，a, b, c にどのような値が入るのか想像がつかなかったので，とりあえず様々な値を式に代入したり，グラフを作成してみたりして実験することにした。

すると，①式を満たす自然数 c が存在することが分かり，またその存在する自然数 c は必ず 6 の倍数となっていることを発見した。このことについては，3. 結果で後述する。

(ⅱ) $(p, q, r)=(3, 3, 2)$，すなわち $a^3+b^3=c^2$ ……② のとき

まず，a, b, c がすべて素数であるときを考えた。このときは偶奇性に注目して場合分けして考えていった。

また，a, b, c がすべて素数でないときを考えたが，考えるべき場合が多く，試行錯誤して行ったが上手く行かなかった。

3. 結果

Ⅰ $(p, q, r)=(2, 3, 2)$ のとき

a, b, c に様々な値を代入して実験していくと，

$(a, b, c)=(1, 2, 3)$, $(\underline{3, 3}, 6)$, $(\underline{8, 8}, 24)$, $(\underline{15, 15}, 60)$, $(\underline{24, 24}, 120)$……の組が見つかり，下線部は初項 3，階差数列が $5+2(n-1)$の数列。つまり，一般項が n^2+2n の数列となっており，また，c の値は必ず 6 の倍数になるのではないかという可能性が考えられた。

これを数学的帰納法を用いて証明する。**証明は 2 ページ目から始まる**

(証明)

(i) $n=1$ のとき

$a=b=1^2+2\cdot1=3$ よって，$a^2+b^3=3^2+3^3=36=6^2$

$\therefore c=6$ (自然数)が存在

(ii) $n=k$ (k: 2 以上の自然数)のとき

$n=k+1$ のとき，$a=b=(k+1)^2+2(k+1)=k^2+4k+3$

よって $a^2+b^3=(k^2+4k+3)^2+(k^2+4k+3)^3$

$=k^6+12k^5+58k^4+144k^3+193k^2+132k+36$

$=(k+1)^2(k+2)^2(k+3)^2$　$\therefore c=(k+1)(k+2)(k+3)$ (自然数)が存在

(i), (ii)から，すべての自然数 n について成立する。

また，c は連続 3 整数の積だから，c は必ず 6 の倍数といえる。

Ⅱ $\boxed{(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 2)\ のとき}$ ※ここでは a, b, c はそれぞれ素数，$a\neq b\neq c$ という条件を加えた。

$a^3+b^3=c^2$　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ のうち (a^2-ab+b^2) は変形すると，$(a-b)^2+ab$ となる。

ここで，

① a, b のどちらか一方だけが 2(偶素数)であるとき，$a-b$ は奇数，すなわち $(a-b)^2$ は奇数，ab は偶数となり，$(a-b)^2+ab$ は奇数である。また，$a+b$ は奇数なので，$a^3+b^3(=c^2)$ は奇数。このとき，

$\begin{cases}(b+2)=c^2 & \cdots\cdots(\mathrm{I}) \\ (b^2-2b+4)=1 & \cdots\cdots(\mathrm{II})\end{cases}$ または $\begin{cases}(b+2)=1 & \cdots\cdots(\mathrm{III}) \\ (b^2-2b+4)=c^2 & \cdots\cdots(\mathrm{IV})\end{cases}$ または

$\begin{cases}(b+2)=c & \cdots\cdots(\mathrm{V}) \\ (b^2-2b+4)=c & \cdots\cdots(\mathrm{VI})\end{cases}$ のいずれかの組が成立する。

しかし，Ⅱは実数解が存在しないので，素数 b は存在しない。

また，Ⅲより $b=-1(\neq\mathbb{P})$ となり不適。

(Ⅴ), (Ⅵ)を連立すると，ともに式を満たす素数 b, c は存在しないと分かり，上記の 3 組について成立しないので $a^3+b^3=c^2$ を満たす素数 a, b, c の組はない。

② a, b のどちらも奇素数であるとき，$a-b$ は偶数，すなわち $(a-b)^2$ は偶数，ab は奇数となり，$(a-b)^2+ab$ は奇数である。また，$a+b$ は偶数なので，$a^3+b^3(=c^2)$ は偶数。$c\neq2$ より $a^3+b^3=c^2$ を満たす素数 a, b, c の組はない。

$\therefore$①，②より $a^3+b^3=c^2$ を満たす素数 a, b, c の組はない，という関係性を見つけることができた。

4. 考察

$a^p+b^q=c^r$ の $(p,\ q,\ r)$ を定数としたときの自然数 a, b, c の組を探すのはとても難しかった。今後研究を進めていくにあたっては，この組の効率的な探し方を見つけることが重要だと思った。今回設定できた a, b, c の組は，自然数のみなのでさらに他の関係性を見つけることが必要であると感じた。

5. 結論

今回，予定では素数の範囲で考えた後に自然数に拡張していこうとしたが，自然数の場合に上手く素数の時に得たことが使えず，思っていたよりも研究が進まなかった。何か素数と自然数の間に上手く範囲設定ができたらよかった。

ただ，$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 2)$ のときは $a=b$ という限定的な条件ではあるが，関係性を見つけ出すことがで

きて良かったと思う。

6. 参考文献(使用ソフト)

Geogebra(グラフ描画ソフト) https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja

関孝和を超えて 冪乗和の新公式

1.研究の背景（動機）

まずいきなりですが、嶋田マジックをしたいと思います。

紙と鉛筆を手元に置いてください。

1.なんでもいいので自然数 n を一つ紙に書いてみましょう。　例）4

2.その右に ${}_{n}c_{2}$ を書いてみましょう。　$4\quad {}_{4}c_{2}=6$

3.紙に書かれた 2 数を足してみましょう。　$4+6=10$

さぁ!それぞれの数を 3 乗,2 乗,2 乗してみましょう。　$4^3+6^2=10^2$

わぉお!!指数変えても成り立っている!!

～種明かし～

実は嶋田マジックは恒等式になっているのです。

$n^3+({}_{n}c_{2})^2=({}_{n+1}c_{2})^2$

昨年僕たちは、この恒等式を偶然見つけました。

それから一年間、この恒等式の美しさに魅力を感じ、この恒等式がパスカルの三角形、ピタゴラス数、Σと繋がっていることを解き明かしてきました。

1+0=1	$1^3+0^2=1^2$
2+1=3	$2^3+1^2=3^2$
3+3=6	$3^3+3^2=6^2$
4+6=10	$4^3+6^2=10^2$
5+10=15	$5^3+10^2=15^2$
6+15=21	$6^3+15^2=21^2$
7+21=28	$7^3+21^2=28^2$
8+28=36	$8^3+28^2=36^2$
9+36=45	$9^3+36^2=45^2$
$\mathrm{n}+{}_{n}c_{2}={}_{n+1}c_{2}$	$n^3+({}_{n}c_{2})^2=({}_{n+1}c_{2})^2$

Σとの関係

$$1^3+0^2=1^2$$
$$2^3+1^2=3^2$$
$$3^3+3^2=6^2$$
$$4^3+6^2=10^2$$
$$5^3+10^2=15^2$$
$$6^3+15^2=21^2$$

$$7^3 + 21^2 = 28^2$$
$$8^3 + 28^2 = 36^2$$
$$9^3 + 36^2 = 45^2$$
……………

$$n^3 + ({}_{n}c_2)^2 = ({}_{n+1}c_2)^2$$

全式足してみてください、いろんな部分が消えます。

$$1^3 + 0^2 = \cancel{1^2}$$
$$2^3 + \cancel{1^2} = \cancel{3^2}$$
$$3^3 + \cancel{3^2} = \cancel{6^2}$$
$$4^3 + \cancel{6^2} = \cancel{10^2}$$
$$5^3 + \cancel{10^2} = \cancel{15^2}$$
$$6^3 + \cancel{15^2} = \cancel{21^2}$$
$$7^3 + \cancel{21^2} = \cancel{28^2}$$
$$8^3 + \cancel{28^2} = \cancel{36^2}$$
$$9^3 + \cancel{36^2} = \cancel{45^2}$$
……………

$$n^3 + ({}_{n}c_2)^2 = ({}_{n+1}c_2)^2$$

残された式がこちら　$\sum_{k=0}^{n} k^3 = ({}_{n+1}c_2)^2$

Σがコンビネーションとつながっている！

これが本当に面白く感じたのでΣと二項係数についてのつながりを考察していきたいと思ったのが動機です。

2.研究の目的

冪乗和の既存の公式は累乗和しか表すことができないし、理解するためにはベルヌーイ数など高校生で理解するには難しい公式になっている。

そこで嶋田マジックから得られたヒントを手掛かりに高校生で理解できて、かつ範囲も冪乗まで広げられるような公式を導く。

3.実験方法

現存の累乗の公式から逆算してできるだけたくさんの冪乗和の式をコンビネーションで表して規則性を見つける。

実際にやってみて

$\sum_{k=1}^{n} k = {}_{n+1}c_2$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2{}_{n+1}c_3 + {}_{n+1}c_2$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6{}_{n+1}c_4 + 6{}_{n+1}c_3 + {}_{n+1}c_2$

・・・

これを繰り返して得られた恒等式をもとにコンビネーションの係数を表にしてみると面白い性質が見えた。

	${}_{n+1}C_8$	${}_{n+1}C_7$	${}_{n+1}C_6$	${}_{n+1}C_5$	${}_{n+1}C_4$	${}_{n+1}C_3$	${}_{n+1}C_2$
$\sum_{k=1}^{n} k^0$	・・・	−1	1	−1	1	−1	1
$\sum_{k=1}^{n} k^1$	0	0	0	0	0	0	1
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	0	0	0	0	0	2	1
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	0	0	0	0	6	6	1
$\sum_{k=1}^{n} k^4$	0	0	0	24	36	14	1
$\sum_{k=1}^{n} k^5$	0	0	120	240	150	30	1
$\sum_{k=1}^{n} k^6$	0	720	1800	1560	540	62	1

その性質とはどういったものかというと表の中のある係数一つを決める。そしてそれの左隣の数と足す。その足した数を最初に決めた数の一番上の段のコンビネーションの右側の数で書けると斜め下の数が出てくる。

例えば表の右から二行目上から四番目の 6 を見ると左隣の数は 6 足して 12。3 をかけて 36

これは左下の数と一致する。

尚、表の右の数の係数を 1 と仮定している。

この性質を用いて六乗から十乗の一般式を予想していくと見事に既存の式と恒等式となっていた。

この性質を用いて縦の係数の漸化式を作り、縦の列の公式を作る。

右から k+1 列の係数の数列をb_n、その右隣りの列の数列をa_nとすると

b_{n+1}=k$(b_n + a_n)$

表の一番右の数列c_n=1 としているのでそこから地道に解いていくと係数を決定する関数をえられた。

右から順に

$f(a,1)=1^a$

$f(a,2)=2^a-2$

$f(a,3)=3^a-3\times 2^a+3$

$f(a,4)=4^a-4\times 3^a+6\times 2^a-4$

$f(a,5)=5^a-5\times 4^a+10\times 3^a-10\times 2^a+5$

$f(a,6)=6^a-6\times 5^a+15\times 4^a-20\times 3^a+15\times 2^a-6$

	6^a	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a	0^a
$f(a,1)$						1	-1
$f(a,2)$					1	-2	1
$f(a,3)$				1	-3	3	-1
$f(a,4)$			1	-4	6	-4	1
$f(a,5)$		1	-5	10	-10	5	-1
$f(a,6)$	1	-6	15	-20	15	-6	1

ここで a は k の a 乗の a つまり一番目の係数表の縦の列の数である。
お気付きいただけただろうか？
係数にパスカルの三角形が表れていますよね。
ここでパスカルの三角形は二項係数で表すことができるので、

$$f(a,x)=\sum_{k=0}^{x} {}_xC_k\,(x-k)^a(-1)^k$$

といった式が予想できます。
また、面白いことにこの式は a が自然数の時区別できる a 人を区別できる x 部屋に分け、一人もいない部屋を作らないようにする場合の数と等しくなることが分かりました。

$f(a,x)$はa乗和の${}_{n+1}c_{x+1}$の係数を表します。
例えば$f(2,2)$は二乗和の式の${}_{n+1}c_3$の係数です。

この$f(a,x)$を用いてべき乗和の式を予想すると、

$$\sum_{k=1}^{n} k^a=\sum_{k=1}^{n} \quad f(a,k)\,{}_{n+1}C_{k+1}$$

という式が予想できます。この式はすごいです。PR させてもらいます。

既存の式は $\sum_{k=1}^{n} k^a = \frac{1}{a+1}\sum_{k=0}^{a}\binom{a+1}{k} B_k\, n^{a-k+1}$ $B_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j j^n \sum_{m=j}^{n}\frac{1}{m+1}\binom{m}{j}.$

となっており二項係数の中にaが入っているため負の数や複素数乗なども表せませんし
範囲が狭いです。またベルヌーイ数という高校生では理解しがたいし難しい係数があります。

それに比べて僕らの式が本当に成り立っていれば範囲が広く簡潔な式になります。

3.証明です。

帰納法を用いて証明します。尚、ここで$0^0=1$とします。

$S(a,n) = \sum_{k=1}^{n} k^a = \sum_{k=1}^{n} \quad f(a,k)_{n+1}C_{k+1}$ について
①n=1 のとき$S(a,1) = f(a,1)\ {}_2C_2 = 1$より、$\sum_{k=1}^{n} k^a$を満たす。
②n=1 から t-1 まで$S(a,n) = \sum_{k=1}^{n} k^a$が成り立つとき、
$S(a,t) - S(a, t-1)$のように差をとって考える。
$\sum_{k=1}^{t} k^a - \sum_{k=1}^{t-1} k^a = t^a$ を目標に証明します。
ここで${}_{t+1}C_{k+1} - {}_{t+1}C_k = {}_tC_k$より
$\sum_{k=1}^{t} k^a - \sum_{k=1}^{t-1} k^a = f(a,t) + \sum_{k=1}^{t-1} \quad f(a,k)\ {}_tC_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{t-1} \quad f(a,k)\ {}_tC_k$

わかりにくいので t=6 の時に成り立つことをお見せする。
右辺は下の和になる。

$f(a,1) = \mathbf{1^a}$ $\times\ {}_6C_1$

$f(a,2) = \mathbf{2^a - 2}$ $\times\ {}_6C_2$

$f(a,3) = \mathbf{3^a - 3\times 2^a + 3}$ $\times\ {}_6C_3$

$f(a,4) = \mathbf{4^a - 4\times 3^a + 6\times 2^a - 4}$ $\times\ {}_6C_4$

$f(a,5) = \mathbf{5^a - 5\times 4^a + 10\times 3^a - 10\times 2^a + 5}$ $\times\ {}_6C_5$

$f(a,6) = \mathbf{6^a - 6\times 5^a + 15\times 4^a - 20\times 3^a + 15\times 2^a - 6}$ $\times\ {}_6C_6$

何々のa乗の係数を整理して表にすると下のようになる。

6^a	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a
1	-6	15	-20	15	-6
	6	-30	60	-60	30
		15	-60	90	-60
			20	-60	60
				15	-30
					6

計算すると見事6^aがのこりました。

ここで面白い性質があります。表の縦の列を一番上の数で割ると

なんとびっくり

6^a	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a
1	1	1	1	1	1
	-1	-2	-3	-4	-5
		1	3	6	10
			-1	-4	-10
				1	5
					-1

なんとパスカルの三角形が出てきました。

パスカルの三角形の横の列を交互に足して引いてをしていくと 0 になります。

理由

$(1-1)^j = {}_jC_0 - {}_jC_1 + {}_jC_2 \cdots {}_jC_j = 0 = \sum_{k=0}^{j} {}_jC_k (-1)^k$

これを用いて証明します。

t=6 の時にしたように t が文字の時を考えると、

$(t-x)^a$の係数を考えることができて、下の式のようになる。

$$\sum_{k=0}^{x} {}_{t-x+k}C_k \ {}_tC_{t-x+k}(-1)^k$$

となり、これがx≠0 の時に 0 になればよい。

${}_{t-x+k}C_k \ {}_tC_{t-x+k}(-1)^k$
$= {}_tC_x \times {}_xC_k \times (-1)^k$

ゆえに、

$\sum_{k=0}^{x} {}_tC_x \times {}_xC_k \times (-1)^k$
$\Leftrightarrow {}_tC_x \sum_{k=0}^{x} {}_xC_k (-1)^k = 0$

また、$x=0$の時その係数の値は 1 としているので、t^aの係数は1より、

$\sum_{k=1}^{t} k^a - \sum_{k=1}^{t-1} k^a = t^a$が成り立ち、

①②より、$S(a,n) = \sum_{k=1}^{n} k^a = \sum_{k=1}^{n} \quad f(a,k)_{n+1}C_{k+1}$が成り立ち、

我々の予想は正しいことが証明された。

4.結果と考察

証明の途中にパスカルの三角形が出てきたり、部屋分けの概念が出てきたりして冪乗和の概念についていろいろなアプローチがありそうだと思った。

また、a が自然数の時に限っては$f(a,x)$が$a < x$の時 0 なので、

$\sum_{k=1}^{n} k^a = \sum_{k=1}^{n} \quad f(a,k)_{n+1}C_{k+1} = \sum_{k=1}^{a} \quad f(a,k)_{n+1}C_{k+1}$

となり、簡単に一般式が出せますが、それ以外の時はΣの範囲が n までとなり、n が大きくなると計算が煩雑になり、実用性は全くないです。

5.結論

関孝和を超えた？冪乗和の公式を生み出すことができた。

6.参考文献

特になし。

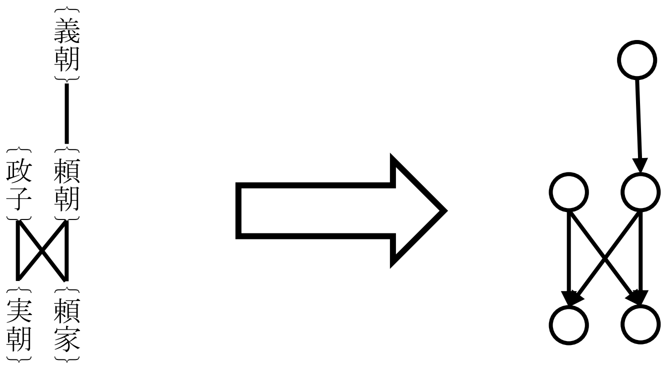
位相空間

1. 緒言

我々の研究は遠山啓先生の書籍、無限と連続の一節で、閉集合の説明に用いた源氏の家系図を見たときの違和感から始まった。それは源氏の家系図の関係性が親から子への一方通行だった。そこから自分達で少しアレンジしてその空間の研究をした。その結果として位相空間を知る上で比較的一般的なモデルを作ることができた。

2. 方法

下図のように源氏の家系図を、人物については一般的な点、人と人との関係性については矢印に置き換えてみた。



図①　図②

図②の極力具体性を排除した点と矢印の集合を研究したいと思い、位相空間論の開集合と閉集合を援用した。開集合と閉集合を導入する前に**空間の定義**を示す。

空間の定義

・点(**要素**)と矢印から空間(**集合**)が構成される

・点から矢印を伸ばす

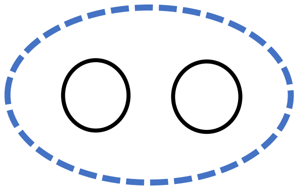
・全体集合は注目している点全てを含んだ集合である

・空集合はいかなる点も含まないものである

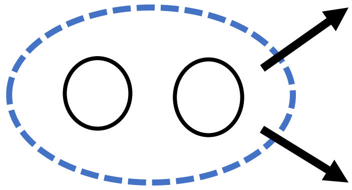
開集合の定義

定義された全体集合の中の部分集合のうち、集合内の要素に来る矢印が集合内の要素のみから来る集合を**開集合**とする。言い換えると外部から矢印が入ってこない集合が**開集合**である。

簡略化した図を用いると図③、図④のようになる



または



となる

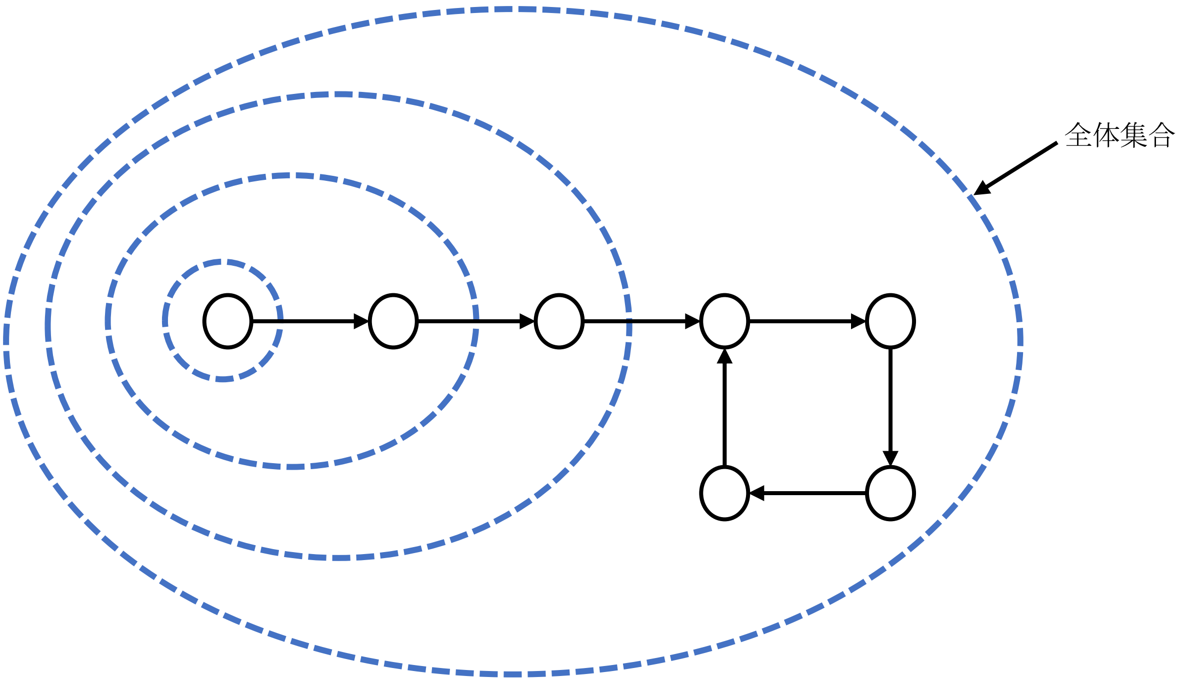
外部との矢印無し

外部へ出る矢印のみ

図③

図④

開集合の例を挙げてみる



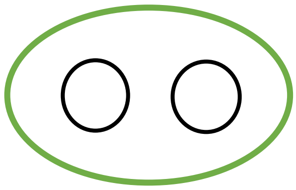
図⑤

この全体集合のうち囲まれた部分と全体集合、空集合が**開集合**となる。

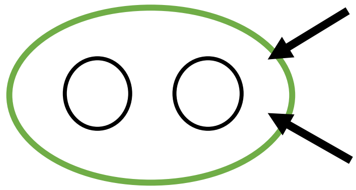
閉集合の定義

定義された全体集合の中の部分集合のうち、集合内の要素から出る矢印が集合内の矢印のみに行き着く集合を閉集合とする。言い換えると外部に矢印が出ていかない集合が閉集合である。

簡略化した図を用いると図⑥, 図⑦のようになる



または



となる

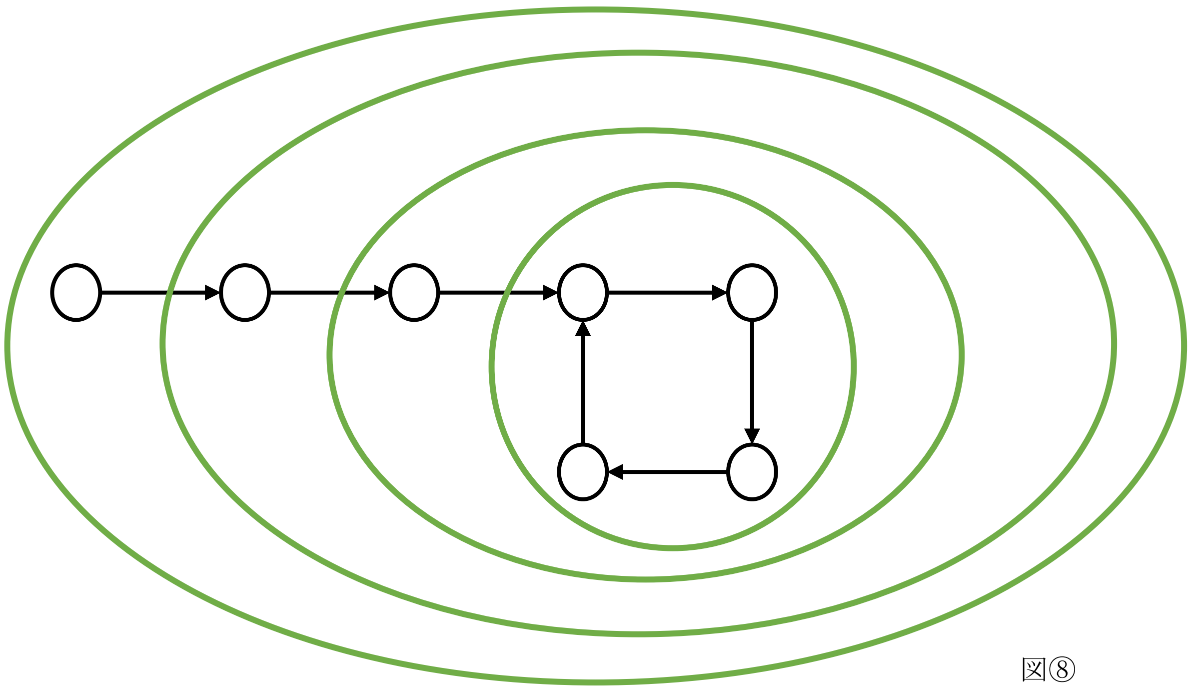
外部との矢印無し

図⑥

外部から入る矢印のみ

図⑦

閉集合の例を挙げてみる



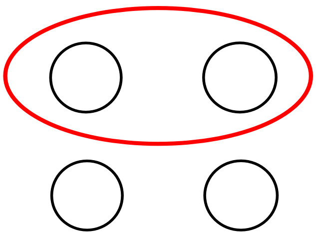
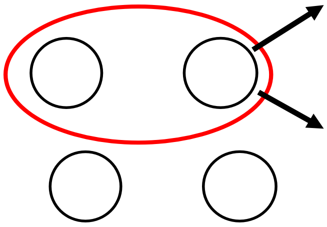
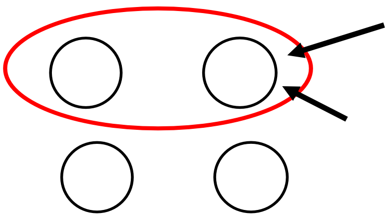
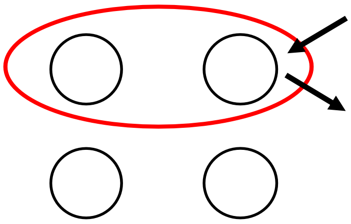
図⑧

この全体集合のうち囲まれた部分と全体集合、空集合が閉集合となる。

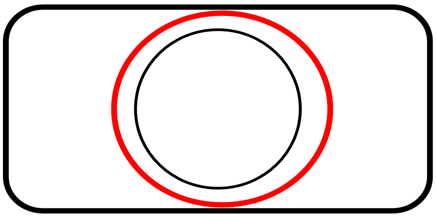
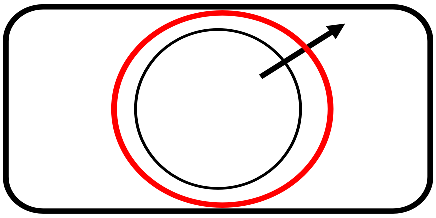
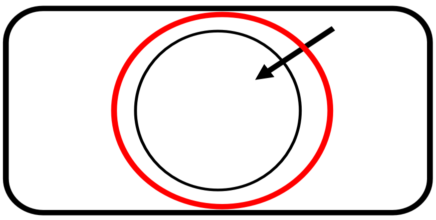
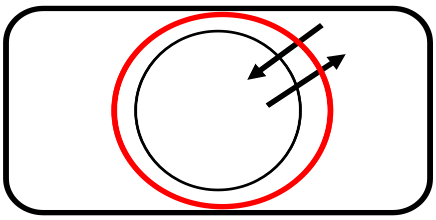
開集合 と 閉集合

4 つの点を全体集合と考え、丸で囲まれた部分集合が外部との矢印のやりとりによってどんな集合となるかを簡単に表①、大枠的に捉えるため、四角を全体集合と考え、丸の部分集合が外部との矢印のやりとりによってどんな集合となるかを表②に表した。

表①

	開集合かつ閉集合 	開集合 
	閉集合 	どちらでもない 

表②

	開集合かつ閉集合 	開集合 
	閉集合 	どちらでもない 

3. 結果

この研究で得られた主な結果は以下の三つである。

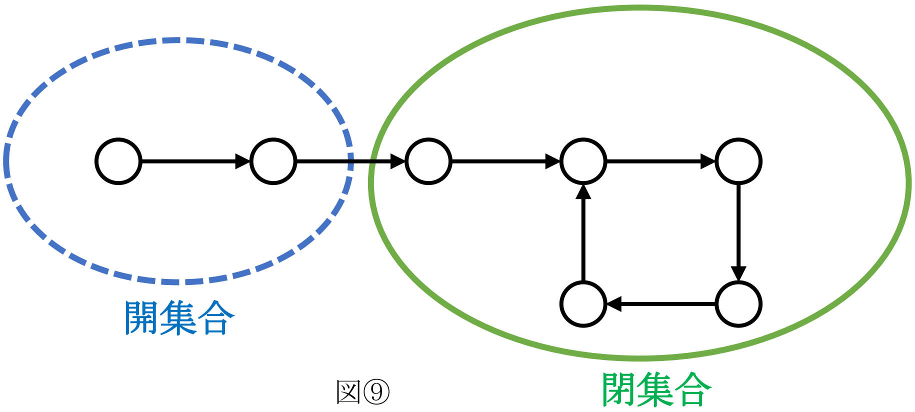
① 開集合・閉集合の諸性質
② 有限集合における考察
③ 無限集合における考察　　　である

研究成果①

定義した開集合・閉集合は以下の性質を満たしている。

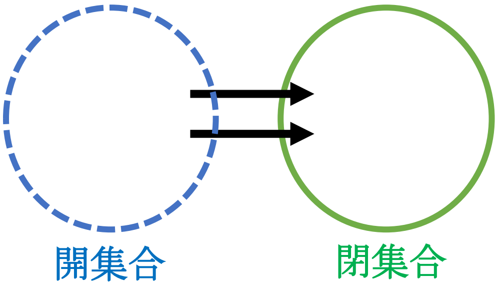
(1)開集合の補集合は、閉集合
閉集合の補集合は、開集合
(2)開集合と開集合の和集合は、開集合
閉集合と閉集合の和集合は、閉集合
(3)開集合と開集合の共通部分は、開集合
閉集合と閉集合の共通部分は、閉集合

(1)開集合の補集合は、閉集合
閉集合の補集合は、開集合



図⑨

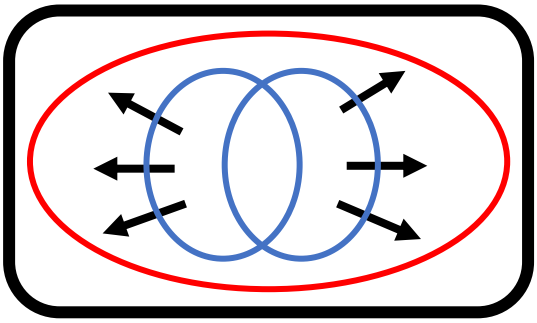
図⑩のように、大枠を見れば「自明」



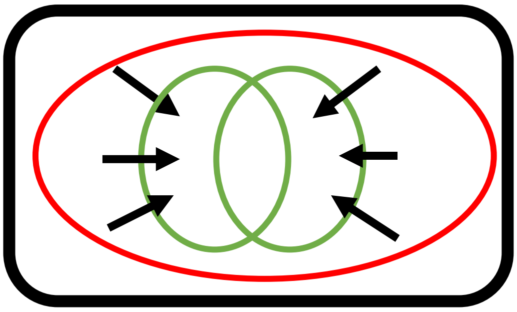
図⑩

(2)開集合と開集合の和集合は、開集合
閉集合と閉集合の和集合は、閉集合

四角を全体集合とし丸で囲まれた部分集合である和集合は図⑪では開集合、図⑫では閉集合となっている。



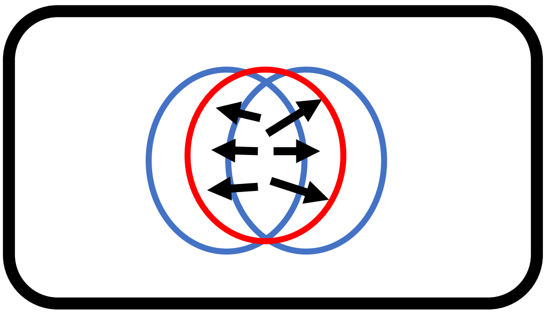
図⑪
開集合と開集合の和集合は、開集合



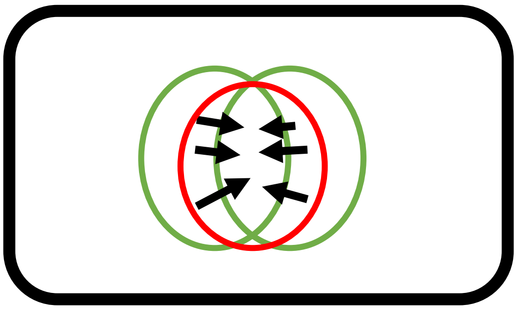
図⑫
閉集合と閉集合の和集合は、閉集合

(3)開集合と開集合の共通部分は、開集合
閉集合と閉集合の共通部分は、閉集合

四角を全体集合とし丸で囲まれた部分集合である共通部分は図⑬では開集合、図⑭では閉集合となっている。



図⑬
開集合と開集合の共通部分は、開集合



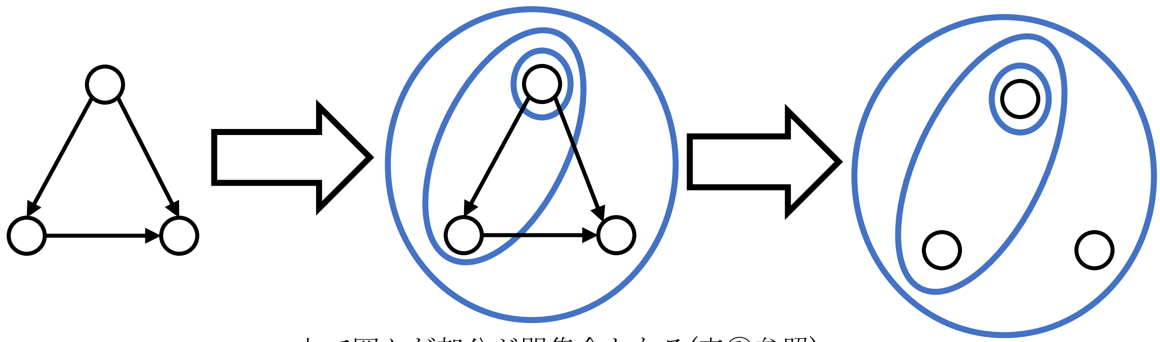
図⑭
閉集合と閉集合の共通部分は、閉集合

研究成果②

有限集合では矢印図から開集合系(閉集合系)が確定するだけでなく、開集合系(閉集合系)が与えられると対応する矢印図を少なくとも1個作成できる。

例として三つの点を全体集合と考えた矢印図を開集合系に写し替えてみる

矢印図　　⇒　　開集合系(閉集合系)

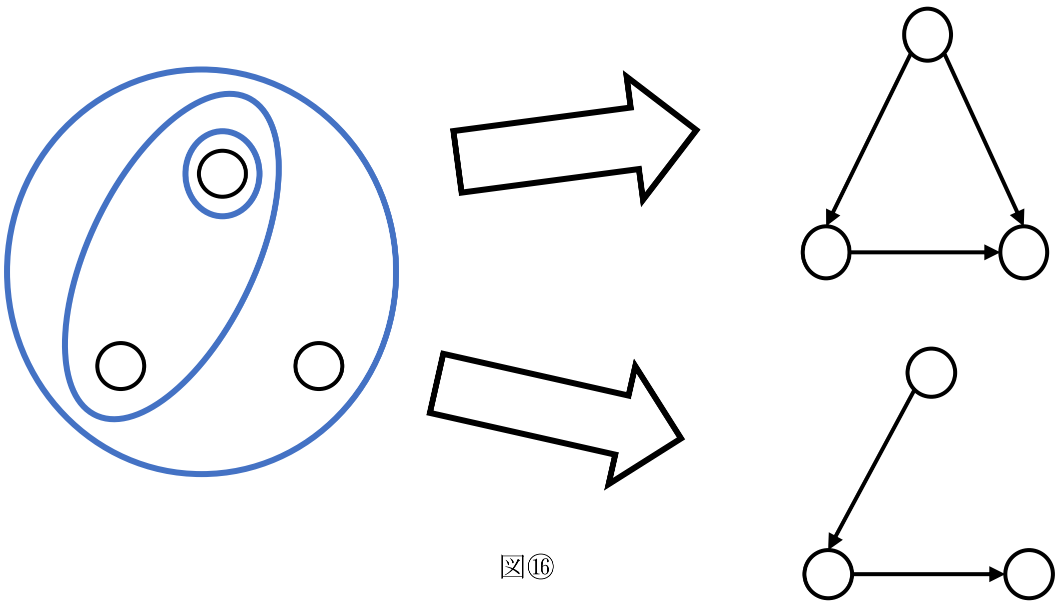


丸で囲んだ部分が開集合となる(表①参照)

図⑮

逆に開集合系から矢印図に写し替えると

開集合系(閉集合系)　　⇒　　矢印図



図⑯

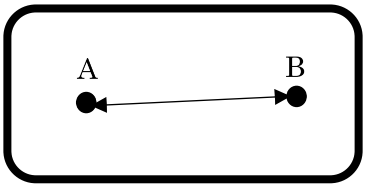
このように異なった矢印図ができあがることもあるが、開集合系(閉集合系)が与えられると対応する矢印図を少なくとも1個作成できる。

矢印図から開集合系に写しかえられるのは自明だが、開集合系から矢印図に写しかえるには説明が必要だ。それで、四角を全体集合とし全体集合の中のある二点、点 A,点 B について考える。このとき全体集合内のその他の注目していない点との関係性については考えない。

点 A,点 B について(開集合は破線、閉集合は実線で表す。)

点 A を含み、点 B を含まない開集合と閉集合が共に存在しない場合

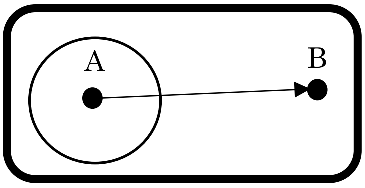
⇒点 A,点 B 間に双方向の矢印を引く。



点 A を含み、点 B を含まない開集合が存在し、

点 A を含み、点 B を含まない閉集合が存在しない場合

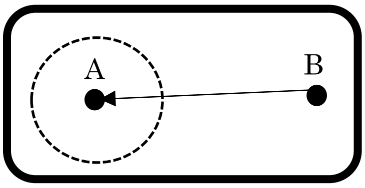
⇒点 A から点 B に向かって矢印を引く。



点 A を含み、点 B を含まない閉集合が存在し、

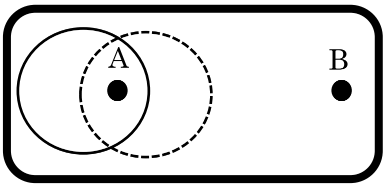
点 A を含み、点 B を含まない開集合が存在しない場合

⇒点 B から点 A への向きの矢印を引く。



点 A を含み、点 B を含まない開集合と閉集合が共に存在する場合

⇒点 A,点 B 間に矢印は引かない。



図⑰

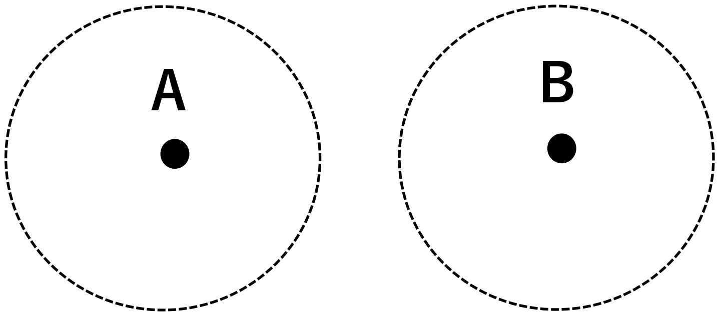
このように有限集合の場合、全体集合の中のある二点で上記のことが成り立つように追加の点を考えてみても、図⑰の通りになる。このことは有限集合では全体集合の中のある二点についてどちらかの部分集合が図⑰の4種類のいずれかであると決まったときに、必ずその二点の関係性(矢印の有無、向き)が**確定する**ということを示す。

研究成果③

有限集合の場合矢印図はどんな開集合系(閉集合系)からでも作成可能であり、矢印図で全ての開集合系が表現可能である。では無限集合ではどうなのだろうか。
結論として無限集合では開集合系(閉集合系)が表現できない。

開集合系(閉集合系)が表現できない例を挙げてみよう

任意の 2 点 A,B を用意して



図⑱

A のまわりの開集合　　B のまわりの開集合

両方が開集合になるため、A,B 間に矢印を引くことができない。このことは有限集合の時に確定していた部分集合が開集合、閉集合か決まれば二点の関係性が決まるということが、無限集合では成り立たないことを示す。

4. 結論

・我々の空間の開集合と閉集合の満たす諸性質が位相空間論の開集合と閉集合の定義と一致した
・有限集合においては一般の連続空間と何ら異ならない性質を示した
・無限集合のところが正確な議論ができていないいわば仮定みたいなものであるため、連続無限、離散無限の濃度の違いを踏まえて数学的な知見から考えていくことが今後の研究課題

5. 参考文献

無限と連続/岩波新書/遠山 啓

ウラムの螺旋

ウラムの螺旋の定義

ウラムの螺旋とは

ウラムの螺旋は自然数を 1 から順に渦巻き状に並べたものです。

下図は1から100までを渦巻き状に並べたときのウラムの螺旋の図です。僕たちはこのウラムの螺旋が無限まで続いたときのウラムの螺旋の性質について研究しました。

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

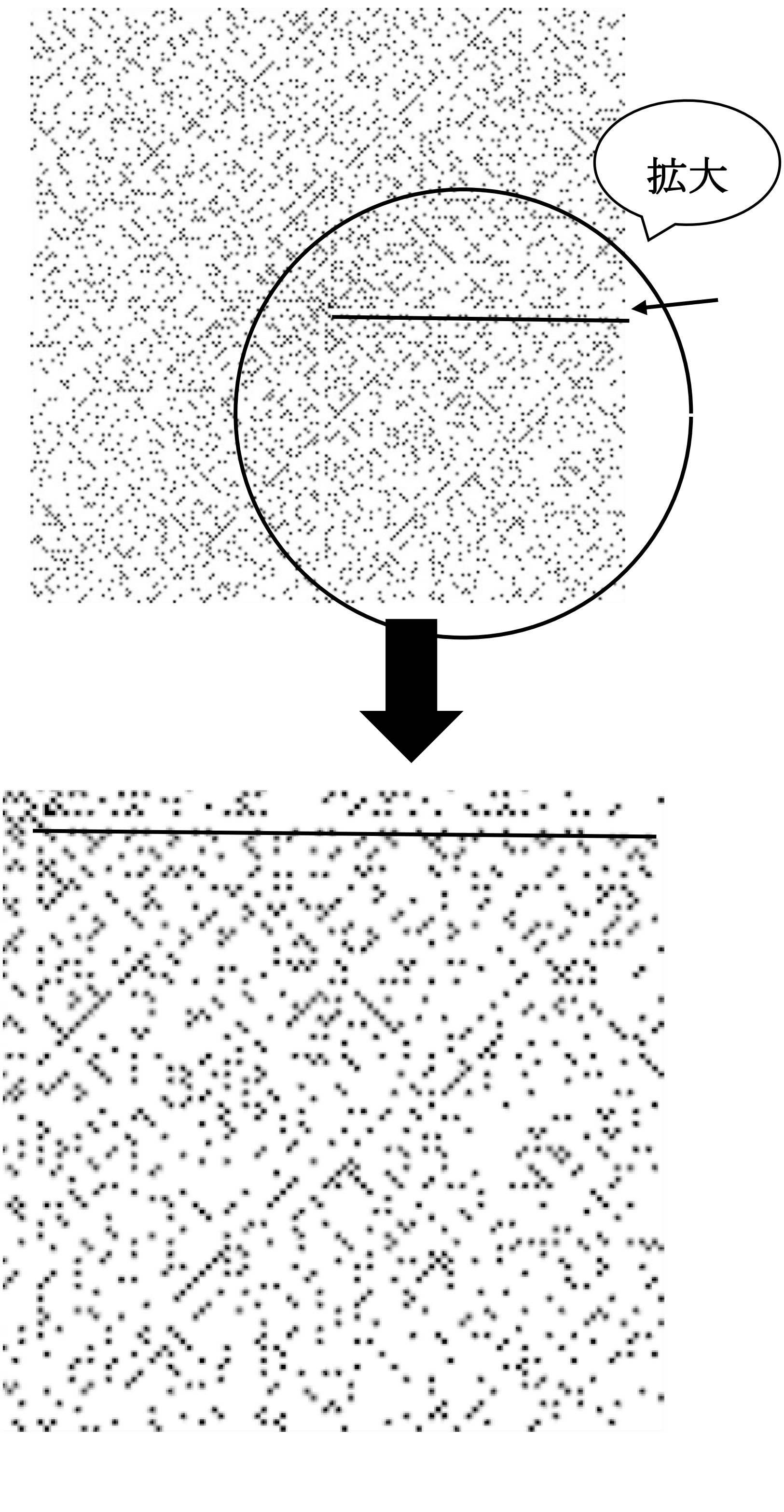
ウラムの螺旋の周期について

僕たちは初項と末項を設定し、その初項から末項までをひと周期に設定しました。まず1を初項かつ末項に設定します。それを1周期にするので、1周期には1だけが含まれていることになります。次に1周期の末項が1なので、2周期の初項は2となります。2から後の数字を追いかけていくと、9まで追いかけた時に初項の2からひと回転して戻ってくるので、末項を9に設定します。これが2周期です。次に9の次は10なので、3周期の初項を10にして…といった要領で決めていきます。つまりは、1以外の初項は前の周期の末項の1だけ大きい数に設定し、末項は初項から数を追っていき、ひと回転したときの数に設定するということです。

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

研究1ウラムの螺旋の白線証明

①緒言



上図のように素数のないライン（以下白線と書く）ついてなぜこのような線ができるのか、またウラムの螺旋をさらに広げたときでも白線は続いているのかを研究した。

②方法

ある白線を形成する数字をならべてみると

10,27,52,85,126,175…

これを数列{Am}とおく（mは自然数）

階差数列を用いて計算すると

$Am=4m^2+5m+1$

$\quad=(4m+1)(m+1)$

mは自然数で $4m+1\neq m+1$ だから

これにより、Am は合成数であるとわかる。

③結果

したがって上記の理由で白線は形成され、ウラムの螺旋を広げても白線は続くことが

証明された。

④考察

同様にすることで、このような白線をいくつか見つけることができた。

ここから、白線が形成されている部分は整式をたてられ、かつ合成数となることが

考察できる。

⑤結果

ウラムの螺旋が白線を形成するのは証明することができる。

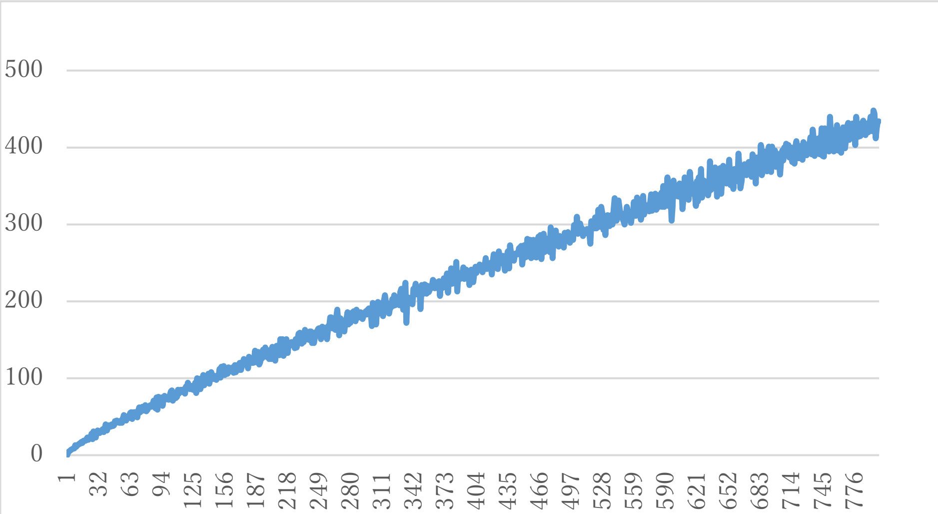
研究2

①緒言

周期毎の素数について調べる。

ウラムの螺旋の 1 を一周期目として、n 周期(nは整数)における素数の個数の規則性を検討する。

↓周期における素数の個数



上のグラフより1～149 周期までは不規則な関数となるので、150 周期以降を一次関数とみて研究を進める。

→このグラフと x 軸で囲まれた部分は、その周期までに含まれる素数の個数を表す。

→1～n 周期に含まれる素数の個数を調べる。

②方法

(1)積分利用

1から 149 周期までは関数に変換できないため、数え上げる。

150 周期からは y=1／2x+25 の一次関数とみなして積分を利用する。ただし、yはx周期に含まれる素数の個数である。

次に示すデータより、1 から 149 周期目までの素数の個数は 8550 個である。

周期	初項	末項	素数の個数	周期	初項	末項	素数の個数	周期	初項	末項	素数の個数	周期	初項	末項	素数の個数	周期	初項	末項	素数の個数
x	4x^2-12x+10	4x^2-4x+1																	
1	2	1	0	31	3482	3721	32	61	14162	14641	48	91	32042	32761	76	121	57122	58081	90
2	2	9	4	32	3722	3969	30	62	14642	15129	51	92	32762	33489	73	122	58082	59049	86
3	10	25	5	33	3970	4225	29	63	15130	15625	55	93	33490	34225	71	123	59050	60025	90
4	26	49	6	34	4226	4489	31	64	15626	16129	56	94	34226	34969	75	124	60026	61009	88
5	50	81	7	35	4490	4761	32	65	16130	16641	47	95	34970	35721	64	125	61010	62001	85
6	82	121	8	36	4762	5041	34	66	16642	17161	52	96	35722	36481	73	126	62002	63001	88
7	122	169	9	37	5042	5329	30	67	17162	17689	56	97	36482	37249	77	127	63002	64009	94
8	170	225	9	38	5330	5625	34	68	17690	18225	56	98	37250	38025	73	128	64010	65025	81
9	226	289	13	39	5626	5929	40	69	18226	18769	53	99	38026	38809	73	129	65026	66049	100
10	290	361	11	40	5930	6241	32	70	18770	19321	49	100	38810	39601	75	130	66050	67081	89
11	362	441	13	41	6242	6561	36	71	19322	19881	58	101	39602	40401	72	131	67082	68121	99
12	442	529	14	42	6562	6889	39	72	19882	20449	62	102	40402	41209	77	132	68122	69169	86
13	530	625	15	43	6890	7225	37	73	20450	21025	56	103	41210	42025	83	133	69170	70225	91
14	626	729	15	44	7226	7569	37	74	21026	21609	60	104	42026	42849	84	134	70226	71289	91
15	730	841	17	45	7570	7921	40	75	21610	22201	63	105	42850	43681	71	135	71290	72361	104
16	842	961	16	46	7922	8281	38	76	22202	22801	58	106	43682	44521	76	136	72362	73441	91
17	962	1089	19	47	8282	8649	39	77	22802	23409	60	107	44522	45369	80	137	73442	74529	99
18	1090	1225	19	48	8650	9025	44	78	23410	24025	65	108	45370	46225	74	138	74530	75625	99
19	1226	1369	19	49	9026	9409	42	79	24026	24649	57	109	46226	47089	76	139	75626	76729	94
20	1370	1521	21	50	9410	9801	45	80	24650	25281	59	110	47090	47961	85	140	76730	77841	106
21	1522	1681	23	51	9802	10201	44	81	25282	25921	63	111	47962	48841	80	141	77842	78961	93
22	1682	1849	20	52	10202	10609	42	82	25922	26569	64	112	48842	49729	84	142	78962	80089	99
23	1850	2025	23	53	10610	11025	42	83	26570	27225	65	113	49730	50625	85	143	80090	81225	108
24	2026	2209	23	54	11026	11449	45	84	27226	27889	63	114	50626	51529	83	144	81226	82369	103
25	2210	2401	28	55	11450	11881	42	85	27890	28561	64	115	51530	52441	82	145	82370	83521	99
26	2402	2601	21	56	11882	12321	48	86	28562	29241	71	116	52442	53361	86	146	83522	84681	99
27	2602	2809	31	57	12322	12769	52	87	29242	29929	63	117	53362	54289	80	147	84682	85849	103
28	2810	3025	25	58	12770	13225	49	88	29930	30625	61	118	54290	55225	89	148	85850	87025	98
29	3026	3249	23	59	13226	13689	45	89	30626	31329	75	119	55226	56169	87	149	87026	88209	103
30	3250	3481	30	60	13690	14161	50	90	31330	32041	59	120	56170	57121	94				

150 周期から k 周期は$\int_{150}^{k} y\,dx=\int_{150}^{k} 1/2x+25dx$

$=1/4k^2+25k-5000$

⑵Σ利用

関数を 1～149周期も含めてy=1/2xとして1～k周期までの総和を求め①より

1～149周期までを数え上げたものへ差し替える. (まとめて計算不可能のため)

1～k 周期に含まれる素数の個数は

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2}m+25-\sum_{k=1}^{149}\left(\frac{1}{2}+25\right)+8550=\frac{1}{4}k^2+\frac{121}{4}k+\frac{1525}{2}$$

③結果

⑴、⑵の計算の結果の定数部分で誤差が生じた理由は⑴の積分によって整数ではない周期まで考えてしまったためであると思われる。

よって、今回はより厳密な⑵を採用することとする。

上記の研究からガウスの素数定理との関連性について考えた.

→素数の出現頻度は、数が増えるにつれて減少していく.

→以下のようなグラフの作成.

(横軸は整数 x、縦軸はその数 x までに存在するの素数の個数)

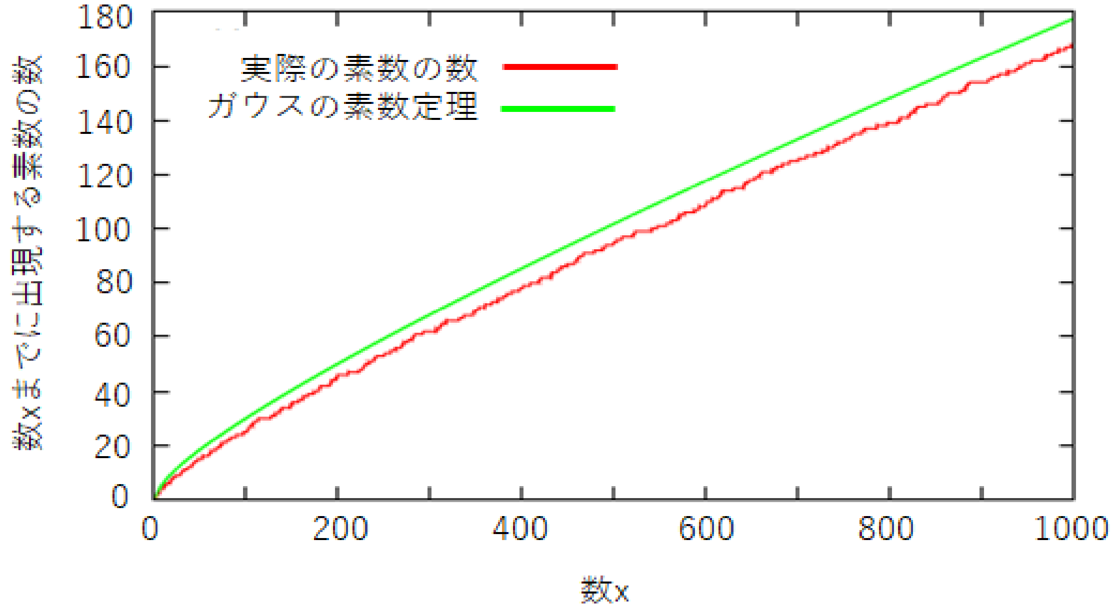
→赤い曲線は実際の素数の数であるが、数が増えるとだんだんと傾きが緩やかになっている．
これは数が大きくなるほど、素数が見つかりにくくなってくるということを表している．
→ガウスは、ランダムにある数を選んだときに、その数が素数である確率は、以下の式で表現できるとした．

任意の数 x が素数である確率$=\frac{1}{logx}$

この式は”ガウスの素数定理”と呼ばれている

④考察

このグラフの横軸の整数xを周期kに変換してグラフを描くと、(2)のグラフと
一致すると考えられる



⑤結論

ウラムの螺旋の性質から素数の周期性やガウスの素数定理との関係性について
考えることができた。

⑥参考文献

・素数生成機
https://tools.m-bsys.com/calculators/prime_number_generator.php
・ガウスの素数定理のグラフ
http://analytics-notty.tech/wp-content/uploads/2018/05/ガウスの素数定理.jpg
・ウラムの螺旋画像
https://cdn-ak.f.st-hatena.com/images/fotolife/s/spark856/20190702/20190702183358.png
・ウラムの螺旋画像
https://sansu-seijin.jp/blog/wp-content/uploads/2016/03/ウラムの螺旋_01.jpg

折り紙とその復元方法の不思議

1.緒言

ほとんどの人は一度、折り紙で遊んだことはあるかと思う。しかし、**誰が折っても一つのパターンにしかならない折り紙**を実際考えてみた人は少ないのではないだろうか。この探求は「誰が折っても一つのパターンにしかならない折り紙」になるための条件を探す手がかりとなっている。

2.用語

・単一折り紙(個人の定義):

誰が折っても一つのパターンにしかならない折紙。ある展開図から、折り目を過剰、過不足なく用いて折り紙を作るとき、出来上がる折り紙がただ一通り、元の図形に決まる折り紙。ただし、平坦折り紙に限定する。

例:

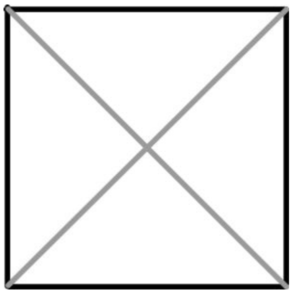


図1

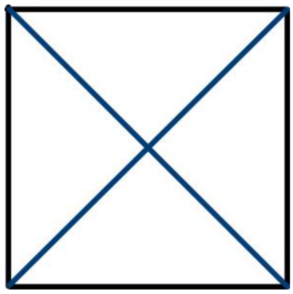


図2

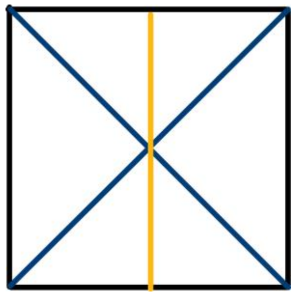


図3

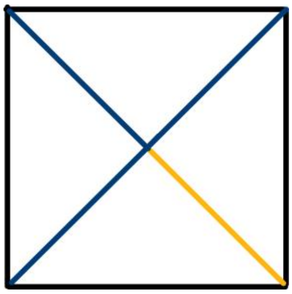


図４

折り目：　未決定｜　山｜　谷

図１のような展開図があり、その の部分を や を無造作に決めていく。例えば、図２のように山と谷を設定したとする。しかし、図２の展開図を実際に折って復元するとき、平坦折りという条件を満たすためには、図３の の折り目が存在しなければならない。すなわち、図３は図１に対して過剰に折り目を用いる必要があるということだ。したがって、図２の折り目の設定は条件を満たさず、復元できない。また、図１の復元パターンは図４のみである。（図４の山と谷を入れ替えたものも元の図形に復元できるが、これは図４を裏返して復元を行うことに等しいので、復元パターンを図４のみとしている。）

・平坦折り紙:

本に挟まれても形状を崩さず、展開図に戻したとき、折り目が増加しない折り紙。平らな折り紙。紙の厚さは無視して考えるものとする。）

・立体折り紙:
本に挟まれると形状が崩れ、展開図に戻したときに折り目が増加する折り紙。立体である折り紙。

・頂点:
折り目が交わる場所。

・前川定理:
「平坦折りの折り目は、すべての頂点において山折りと谷折りの数の差が|2|となる。」とされている定理。

3. 方法

（インターネットや書籍に）公開されている既成の公開図を用いて、規則性を見出し、それをもとに独自の折り紙パターンを作成し、その規則性の真偽を確かめる。規則性に非があると発見した場合、規則性を修正し、修正された規則性をもとに折り紙パターンを作成して、規則性を確かめる。

これを繰り返す。

～探求活動を引き継ぐ方へ～

探求を始めた当初は折り紙の展開図ソフト（公開されているもの）を使って進める予定でしたが、残念なことに学校のコンピュータと自宅のものにそのソフトが適応されず、この方法で検証することを断念した。仮に、この展開図ソフトを使用できる環境が整っているようでしたら、利用したほうが研究の効率があがるかと思う。

４．経過と結果

二年時の探究目的

ある折り紙の展開図から元の形状に復元する方法を１通りしか持たない折紙の図形的意味をさぐる。

↓

復元方法が一通りのみである折紙の特徴・規則性（仮）

その１

「ねじり」の要素を含むとき

↓

考察

ねじり折りを含む折り紙に立体折り紙がおおくふくむ。また、立体折り紙の展開図からの復元方法は１通りであることがおおい。

平坦折り紙で、ねじりの要素を含むものは少数しかなく、展開図のパターンが一

↓

平坦折り紙において検証できる母体数がすくないため、規則性その１についての探求を打ち切る

その２

折り目が交差する点において「山」と「谷」の数の差がすべて２または０となるとき（差が０の時は、折り目が平行の場合も含む）

↓

考察

反例を発見した。

折り目に交わりがないとき、すなわち、※[1]すべての折り目が平行であるとき、折り目の間隔に関わらず、「その展開図から、折り目を十分に使用し、造形をつくりだすとき、出来上がるものはただ一つになるとは限らない。」

注※[1]：プリーツパターン

↓

規則性その２の「折り目が交差する点において『山』または『谷』の数の差がすべて２」は、すなわち、前川定理を指している。そこで、展開図の辺縁部における折り目の特徴に目を向けるようにした。

三年時の探求目的

単一折り紙となる展開図の特徴と図形的な意義を探る。

復元方法が一通りのみである折紙の特徴・規則性（仮）

その２（変更後）

Ⅰ

展開図のすべての折り目に少なくとも一ヵ所交わっている箇所がある

不足を発見、Ⅰを満たしても、平行な折り目が存在するとき、復元によって出来上がる図形はただ一通りに決まらないことがわ

Ⅰ（変更後）

展開図のすべての折り目に少なくとも一ヵ所交わっている箇所があり、平行な折り目を持たない場合。

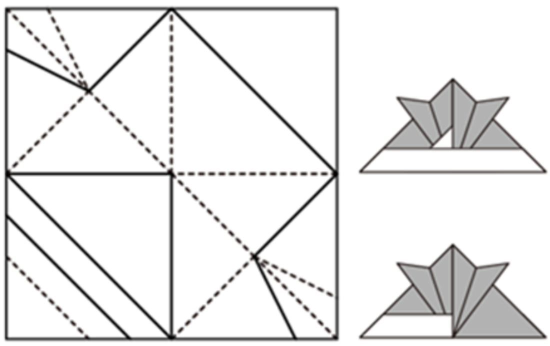
Ⅱ

展開図の辺縁部において、
折り目が交わるとき、折り紙の辺縁部における「山」と「谷」の差が０となる場合。
折り目が交わらないとき、折り紙の辺縁部における「山」と「谷」の差は存在しないとみなす（０とする）。

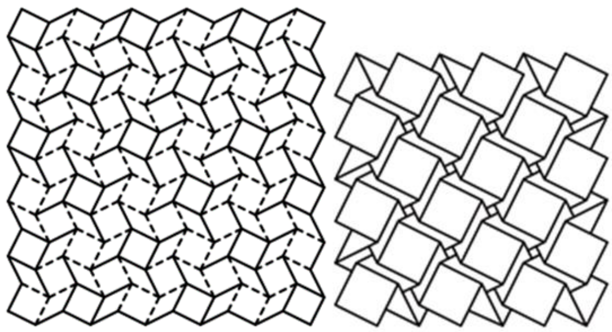
結果

Ⅰ(変更後)とⅡを同時に満たす展開図は単一折り紙である可能性が高い。（証明を行っていない）

〈規則性を満たさない〉



〈規則性を満たす〉



<u>注※[1]プリーツパターン</u>

→一般的には、折り目が等間隔で、「山」と「谷」が交互に来るものをさすことが多いが、ここでは、単に折り目が平行であるパターンのことをさす。

《プリーツパターンの展開図からの復元パターンは複数個通り存在する》

・等間隔のとき

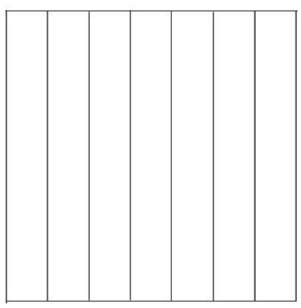


図５

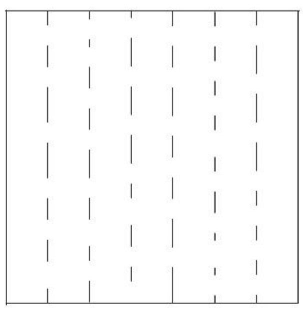


図６

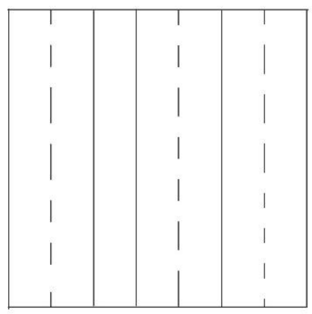


図７

図5のような、等間隔なプリーツパターンの展開図があるとする。この折り目を「過剰・過不足なく用いる」という条件のもと、「山」と「谷」を決めていくと、一般的なプリーツパターン以外にも、図6や図7のようなパターンも存在しうることがわかった。

図6と図7については、≪7.そのほかの資料≫中のスライド㉔を参考にするとよい。

・等間隔でないとき

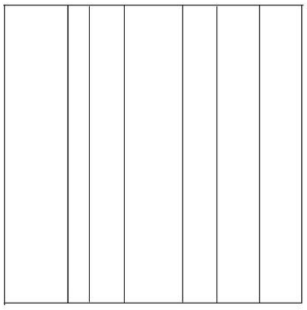


図８

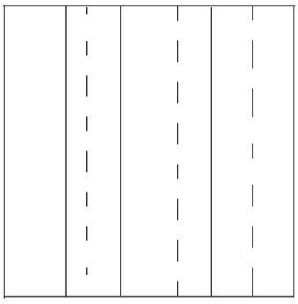


図９

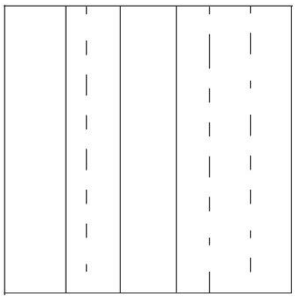


図１０

図8のような、等間隔でないプリーツパターンの展開図があるとする。この折り目を「過剰・過不足なく用いる」という条件のもとに、「山」と「谷」を決めていくと、図9や図 10 のようなパターンも存在しうることがわかった。
図9と図10については、≪7.そのほかの資料≫中のスライド㉓を参考にするとよい。

以上より、プリーツパターンの展開図からの復元パターンは複数通り存在することが判明した。

5.考察

今回の探究活動で扱った（推定）150～200 個の折り紙パターンにおいて、最終的に見いだした2つの（仮の）規則性のどちらにも満たしていないが、単一折り(紙)であるパターンが一種類存在する。すなわち、風船の基本形パターンである（図11）。しかし、扱った折り紙のうち、このパターンに類似したものがなく、比較できる対象が他のパターンと比べかなり少ないため、「風船の基本形パターン」についてほぼ無知であるといえる。

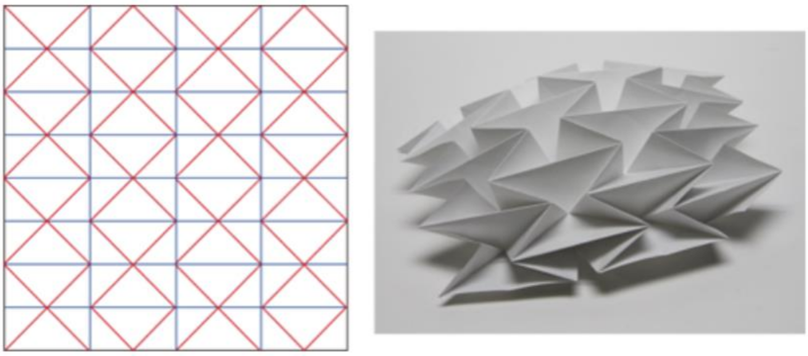


図１１

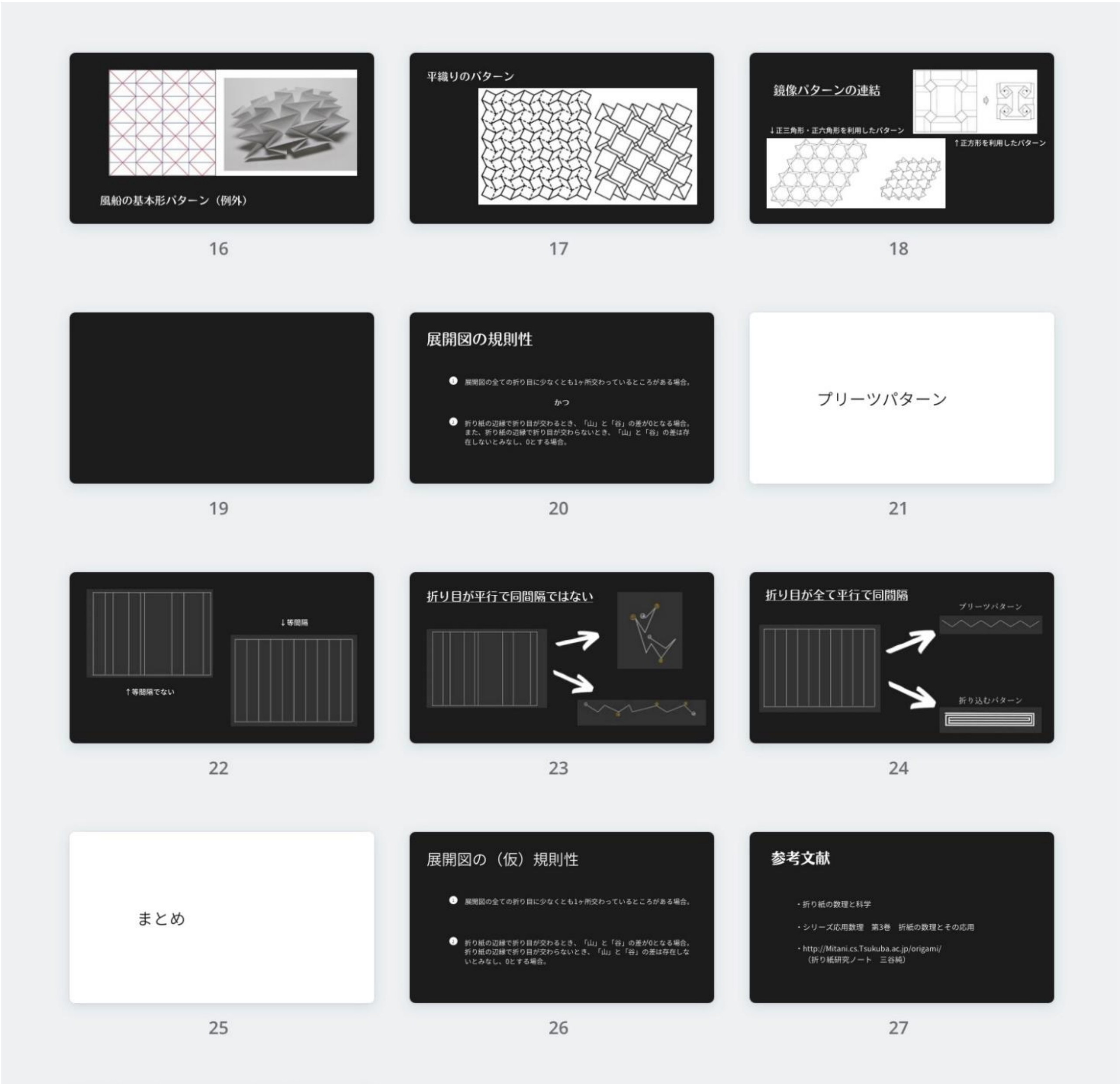
6.結論

特殊パターン（風船の基本形パターン）を除く単一折り紙は以下の2つの規則性を同時に満しているであろう。

1. 展開図のすべての折り目に少なくとも一ヵ所交わっている箇所があり、平行な折り目をお持たない。
2. 展開図の辺縁部において、折り目が交わるとき、「山」と「谷」の差が0となる場合。また、折り目が交わらないとき、「山」と「谷」の差は存在しないとみなす（0とする）。

また、これまでの探究活動で、この課題についての理解はまだまだほんの一握りにしかすぎず、検証や証明を進める必要がある。

7．そのほかの資料（最終発表時Power Point）



8．参考文献

・折り紙の数理と科学 Thomas Hull,川崎敏和著

・シリーズ応用数理 第3巻 折紙の数理とその応用 日本応用数理学会

・http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/origami/ （折り紙研究ノート 三谷純）