第13回 マスフェスタ

＜全国数学生徒研究発表会＞

日時　　2021年12月25日(土)

場所　　大阪府立大手前高等学校 本館

2021年度　マスフェスタ（全国数学生徒研究発表会）

日　時　　2021年12月25日（土）　午後1時10分～午後4時35分
場　所　　大阪府立大手前高等学校（大阪市中央区大手前2－1－11）
目　的　　数学に関する生徒の取り組み（課題研究、部活動等）の研究発表を行うことにより、数学に対しての興味・関心を高め、今後の数学教育活動の発展に資する。
内　容　　生徒による数学研究（課題研究等）についての発表会（ポスター）

時　程

■12月25日（土）

12:30受付開始　　順次発表準備開始（教室へ入室可）

13:10～16:25　ポスターセッション　（1～6階　教室）

13:10～13:50 発表①　グループA、C　13:55までには全ての発表を終了し、2方向開放にて換気をお願いいたします。

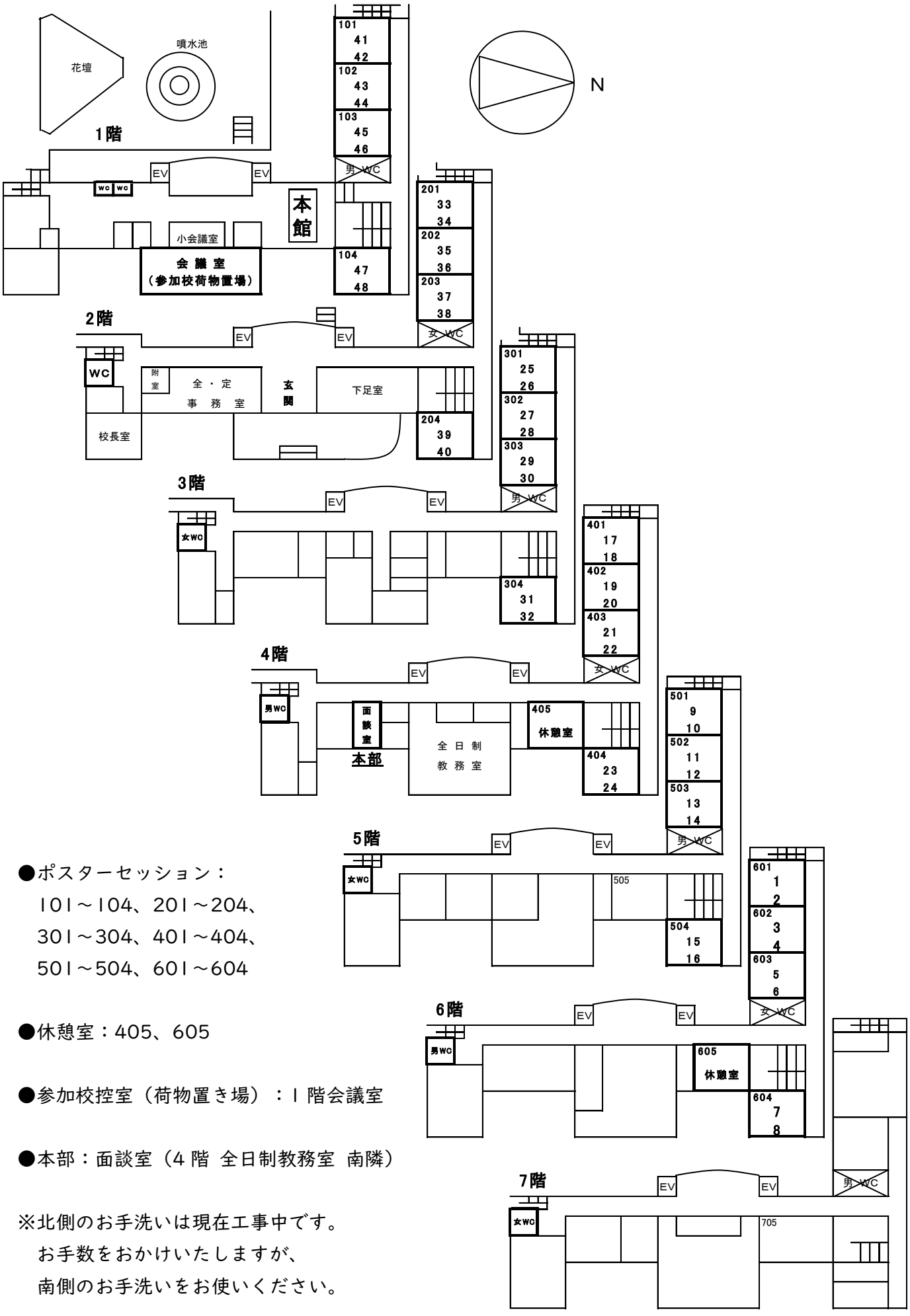
14:00～14:40 発表②　グループB、D　14:45までには全ての発表を終了し、2方向開放にて換気をお願いいたします。

14:50～15:30 発表③　グループA、D　15:35までには全ての発表を終了し、2方向開放にて換気をお願いいたします。

15:40～16:20 発表④　グループB、C　16:25までには全ての発表を終了し、2方向開放にて換気をお願いいたします。
全体会のご参加の準備をお願いいたします。

16:25～16:35　全体会（放送にて実施）
指導助言者の講評
校長挨拶

16:35～17:00　撤収・解散



●ポスターセッション：
101～104、201～204、
301～304、401～404、
501～504、601～604

●休憩室：405、605

●参加校控室（荷物置き場）：1階会議室

●本部：面談室（4階 全日制教務室 南隣）

※北側のお手洗いは現在工事中です。
お手数をおかけいたしますが、
南側のお手洗いをお使いください。

No.	都道府県	学校名	発表教室	グループ	ポスタータイトル
1	北海道	市立札幌開成中等教育学校	601	A	遠投に適した角度を求める
2			601	B	解析力学の幾何的側面と一般相対論への応用
3		北海道釧路湖陵高等学校	602	C	原点可視格子”円” ～席替えで好きな人が見える確率～
4			602	D	多角形の面積公式
5	青森	青森県立八戸北高等学校	603	A	図形の最短経路問題～シュタイナー木による～
6	茨城	茨城県立並木中等教育学校	603	B	ライフゲームにおける四則演算計算機の構築
7		茗溪学園高等学校	604	C	シュート時の最適角度を求める
8	栃木	作新学院高等学校	604	D	正多角形による円の近似
9		栃木県立栃木高等学校	501	A	$x^k+y^k=1$が表す曲線の概形について
10			501	B	フラクタル図形が映す影について
11	千葉	市川学園市川高等学校	502	C	Erdös Szekeres予想解決に向けたk-cap l-cup理論の拡張
12			502	D	自己相似をもつ数列と拡張したコラッツ予想への応用
13	東京	筑波大学附属駒場高等学校	503	A	文化祭準備における人員配置の最適化
14			503	B	無限個の基数と有限桁数での非負整数の表記法
15	神奈川	横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校	504	C	折り紙で作る面積最大の正多角形
16	富山	富山県立富山中部高等学校	504	D	囚人のジレンマを用いたいじめを減らす方法の検討
17	東京	東京学芸大学附属高等学校	401	A	コラッツ予想の定式化
18			401	B	接待AIのための適切な方策
19			402	C	ペンローズの三角形のステレオ写真作成
20		東京都立小石川中等教育学校	402	D	フィボナッチ数列の逆数和の研究
21	石川	石川県立金沢泉丘高等学校	403	A	折り紙による様々な方程式の解法について
22	長野	長野県屋代高等学校	403	B	物体の固有振動数と物体の強度との関連性
23	愛知	愛知県立明和高等学校	404	C	d次元〇×ゲームについて
24			404	D	星型多角形の内角・外角の和
25	静岡	静岡市立高校	301	A	ダンゴムシの交替性転向を数学的に解明する
26	愛知	名古屋市立向陽高等学校	301	B	確率のパラドクス
27			302	C	フィボナッチ数列
28			302	D	無理数の連分数展開
29		愛知県立旭丘高等学校	303	A	初等的に見た数の分解
30	奈良	奈良女子大学附属中等教育学校	303	B	中線定理およびスチュワートの定理の拡張
31	大阪	大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎	304	C	コンピュータと数学による物理現象の解明
32		大阪市立東高等学校	304	D	正弦の拡張
33		大阪府立生野高等学校	201	A	復元数
34			201	B	偏差値の誤差
35		大阪府立岸和田高等学校	202	C	49と同じ性質をもつ自然数
36		大阪府立高津高等学校	202	D	ルービックキューブの規則性に関する数学的考察
37		大阪府立四條畷高等学校	203	A	AIを用いた衣服のブランド判別
38		大阪府立千里高等学校	203	B	モーリーの定理に関する三角形の中心の共線証明
39		大阪府立天王寺高等学校	204	C	単位円に内接する正多角形と外接する正多角形の面積について
40			204	D	フィボナッチ数列を素数で割ったときの余りについて
41	島根	島根県立出雲高等学校	101	A	n × nの〇×ゲームが引き分けることの証明
42	広島	広島大学附属高等学校	101	B	”封筒”の一刀切り
43	山口	山口県立徳山高等学校	102	C	ナポレオン三角形の拡張
44	沖縄	沖縄県立球陽高等学校	102	D	Substitution ruleによる大きな平面的正5角形リングの構成
45	大阪	大阪府立大手前高等学校	103	A	建物補強の効率化
46			103	B	倍数判定法
47			104	-	有限集合における位相空間
48	京都	ノートルダム女学院中学高等学校	104	-	曲がる国歌と曲率

市立札幌開成中等教育学校
Sapporo Kaisei Secondary School

遠投に適した角度を求める
Determine the best angle for long throwing

Abstract

To improve our long throwing skills, we sought the best angle from three methods. At first, we did throw the ball outside. Next, we made a device to throw the ball at fixed angles. Finally, we made a simulator to optimize the angle. From these three methods, we found the best angle for long througing.

１．目的

昨今の体力テストでは学生の記録が年々低下している。ソフトボール投げにおいては学生の記録を伸ばすためには体力面だけでなく、正しい投げ方を知ることも大切だと考え、最適な角度に着目して学生の記録を伸ばすことをめざす。

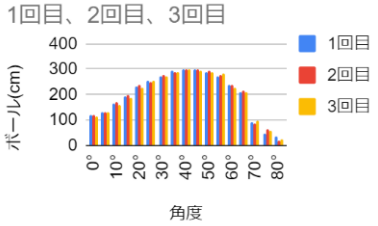
２．方法

今回、最も適した角度を求めるために、1.実際に投げる実験、2.実験器具を使用した実験、3.シュミレーター(プログラミングで自作)を用いる方法の 3 パターンで実験を行った。1 については、空気抵抗、揚力および人体の構造の影響を考慮できるが、角度が精密に測れない。2 については、空気抵抗、揚力を考慮でき、角度もある程度精密に測れるが、人体の構造が考慮できない。3 については、空気抵抗を考慮でき、角度も非常に精密に測れるが、揚力と人体の構造を考慮できない。よって、1、2、3 を組み合わせることで最適な角度を考えられると考えた。

３．結果

実験 1 では 0° から 90° の範囲を 22.5° 刻みで 4 分割して、各範囲について 5 人が投げた。その結果、45° ～67.5° の範囲が最適となった。実験 2 では 5° 刻みで自作の装置を用いてボールを打ち出した結果、40° ～45° が最適と求められた。実験 3 ではオイラー法を用いたシミュレーションで最適な角度は 43.2° となった。

〈実験 2 の結果〉



〈実験 3 で用いた微分方程式〉

$$m \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m \cdot \boldsymbol{g} + \frac{1}{2} \cdot Cd \cdot \rho \cdot A \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \boldsymbol{v}$$

m:球の質量 Cd:空気抵抗係数 ρ:空気の密度 A:球の投影面積
v:速度ベクトル **g**:重力加速度ベクトル

４．結論・展望

実験の結果、45° 付近が最も適した角度だとわかった。実験 1 については、投げる人を増やすことや角度の範囲を狭めることでより精度の高い実験にしていきたい。実験 2 については、装置の大きさ上ソフトボールを打ち出すことができなかったので、ソフトボールを打ち出せる装置を作ることでより精度の高い実験にしたい。実験 3 については、オイラー法よりも精度の高い中点法やルンゲクッタ法を使うことでより精度の高い実験にしたい。

５．参考文献

朝日新聞デジタル「子どものボール投げる力、低下傾向続く、野球離れ影響？」
Science. Tools「的あてボール（ボールの軌跡計算）」
Science. Tools「球の抗力係数の計算」

６．キーワード

微分方程式　空気抵抗係数　オーラー法　遠投

市立札幌開成中等教育学校
Sapporo Kaisei Secondary School

解析力学の幾何的側面と一般相対論への応用
Geometric aspects of analytical mechanics and application to general relativity

Abstract
We derive the Hamiltonian of the gravitational field using the 3+1 decomposition.

1　目的
一般相対論の Einstein 方程式を変分原理を用いずに導出することを考えたい.本研究ではその手掛かりとして,重力場の Hamilton 形式による定式化を試みる.

2　方法
3+1 分解という方法を用いて,4 次元 Lorentz 多様体 M を空間的な 3 次元超曲面Σ_t（M の部分多様体）と時間軸 t に分解する.これにより重力場の作用を t とΣ_t上の 2 つの積分に分解し,Hamiltonian を求めることができる.

3　結果
重力場の作用S_gは以下のように分解できることが分かった.ただし変分に寄与していない項は落としており,時空は有限でないとした.

$$S_g = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3y N\sqrt{h}\left({}^3R + K^{ij}K_{ij} - K^2 - 2\Lambda \right)$$

これにより、Hamiltonian H は以下のように求まる.

$$H = \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h}\left(N\left(K^{ij}K_{ij} - K^2 - {}^3R + 2\Lambda\right) - 2N_i D_j \pi^{ij}\right)$$

4　考察
重力場の Hamiltonian を求めることはできたが,通常の力学系のようにエネルギーの物理的解釈は式の形からはできなかった.また,系の時間変化を記述する力学的変数が Hamiltonian に含まれておらず,重力場が他の力学系に比べ特異なものであることが示唆される.

5　結論
3+1 分解により,重力場の Hamiltonian を導出できた.

6　参考文献
[1] Eric Poisson, A Relativist's Toolkit, Cambridge University Press, 2008
[2] 佐古彰史「ゲージ理論・一般相対論のための微分幾何入門」, 森北出版, 2021

7　キーワード
・解析力学　・一般相対論　・微分幾何学　・多様体　・3+1 分解

北海道釧路湖陵高等学校
Hokkaido Kushiro Koryo High School

原点可視格子“円”　～席替えで好きな人が見える確率～
lattice points from which we can see the origin

Abstract
We read a research about lattice points from which we can see the origin and think that we can get more precise data by regarding lattice points on a plane as circles. Then, in the same way as the previous research, we calculated the probability that people on each lattice point can see the origin in terms of changing seats.

１．目的
先行研究では人を点とみなしていたので、頭の大きさを考慮し点ではなく円にして、席替えで好きな人が見える確率をより正確に求める。

２．方法
①座標平面上の格子点を中心とした半径 30 ㎝(1.5 目盛り)の円を描く。
②先行研究と同様に原点が見えるかを判断し、その性質を考察する。
③席替えで好きな人が見える確率を求める。

３．結果
原点可視格子円となる点は、ｙ軸を軸とした線対称性や原点を中心とした点対称性などがあり、その座標は、$|x| \leqq 3$、$|y| \leqq 3$、$|x|, |y|$のいずれか一方が1だった。

４．考察
$|x| \leqq n$、$|y| \leqq n$（nは自然数）の範囲で原点可視格子円になる確率をA_nとする。

・$n \leqq 3$ のとき、$A_n = \frac{2}{n+1}$　　・$n \geqq 3$ のとき、$A_n = \frac{24}{(2n+1)^2-1}$

５．結論
原点可視格子円の考え方を席替えに適用するには、後ろの席も見えるとされる現状の改善をはじめとする工夫が必要である。また、前方の席と後方の席で円の半径を変えるなど、より現実に近いモデルの設定を目指す。

６．参考文献
武田　渉　“原点可視格子点～好きなあの子が見える確率～”　数理ウェーブ. 2018

７．キーワード
原点可視格子円　席替え　確率

北海道釧路湖陵高等学校
Hokkaido Kushiro Koryo High School

多角形の面積公式
Polygon area formula

Abstract
We focused on the polygon which inscribed in a circle, and tried to find a new formula about its area. First, we want to find an area formula of a pentagon inscribed in a circle. However, we can't find common points to Brahmagupta's formula. We wonder if we should expand easy formula gradually after add some conditions.

1, 研究動機

円に内接する四角形の面積を、四角形の４辺の長さから求めることができる「ブラーマグプタの公式」が存在することを知った。五角形以上の多角形について同様の公式を調べても見つけられなかった。そこで、円に内接する多角形の面積公式を、様々な図形的条件を組み合わせて求めてみたいと考え本研究を行った。

2, 研究方法

四角形の面積公式であるブレートシュナイダーの公式は、外接円をもつ四角形の面積公式であるブラーマグプタの公式を一般化したものであるから、外接円を持ち、五辺の長さが自明である五角形の面積公式を求め、そこから一般化する。

3, 結果及び考察

五角形は外接円を持つとき、五辺の長さが定まれば五角形が一意に決まると考えた。そこで、面積公式を、余弦定理から cos の値を求め、そこから sin の値を算出し、五辺の長さのみの面積を求めたが、簡潔な公式が求められず、ヘロン・ブラーマグプタの公式との共通点も見つけられなかった。

4, 結論

今後は条件を増やし、簡単な面積公式を求めてから、徐々に拡張していくべきだと考えている。また、辺の長さがすべて自明である円内接五角形の面積公式は、５次方程式の解と等しくなるため存在しないという文献を目にしたが、詳しくは読めていない。

６．参考文献

https://methodology.site/bretschneiders-formula/
ブレートシュナイダーの公式【四角形の面積】大学入試数学の考え方と解法

７．キーワード

ブラーマグプタの公式
四角形 ABCD の面積をS、各辺の長さをp, q, r, sとし、$T = \frac{p+q+r+s}{2}$ とすると、

$$S = \sqrt{(T-p)(T-q)(T-r)(T-s) - pqrs\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

青森県立八戸北高校
Aomori Prefectural Kita High School

図形の最短経路問題～シュタイナー木による～
Solving shortest distance problems for figures using a Steiner tree

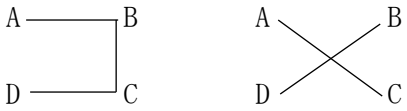
Abstract

We have researched the shortest distances needed to connect the points of various figures, reaching both a mathematical and scientific solution for a triangle, square, and pentagon using a Steiner tree.

１.目的

図形の最短経路とは各点を結ぶ線分の総和が最も短くなるときの点の結び方のことである。例えば一辺の長さが１の正方形 ABCD の場合、下の図（ア）（イ）のように線で結ぶと、線分の長さはそれぞれ（ア）３（イ）$2\sqrt{2}$ となるが、もっと短い線分が存在する。最短経路にはフェルマー点が関係しており、四角形におけるフェルマー点について考察し、可視化する。また、ほかの多角形におけるフェルマー点も可視化し、社会生活に応用できるかを考察する。

（ア）　　（イ）



２．方法

フェルマー点を数学的に証明する。

プラスチック板二枚と釘およびシャボン液を用い、表面張力を利用して、各点を結ぶ最小の線分を可視化する。

３．結果

各点をつなぐ最小の線分が膜として現れた。可視化の様子はポスターや当日の実験で紹介予定である。

４．考察

膜に働く表面張力は、膜の面積に比例する。面積を最小にするため、ポスターで紹介するような形の膜が現れ、最短経路と一致していると推測できる。

５．結論

四角形においては、各頂点をつなぐ最短経路を発見し、可視化することができた。

五角形についても可視化は成功したが、六角形については、１１月末現在可視化には成功していない。

社会生活への応用については、例えば発電所と送電についてが考えられる。主要都市へ送電する電線の長さが最小になるように発電所を建設することで、電力の損失を最も少なくすることができると考えられる。

６．参考文献

高校数学の美しい物語 /マスオ

７.キーワード

フェルマー点　　シュタイナー木　　最小シュタイナー木問題

茨城県立並木中等教育学校
Ibaraki Prefectural Namiki Secondary School

ライフゲームにおける四則演算計算機の構築
Building a basic arithmetic engine on Conway's Game of Life

Abstract

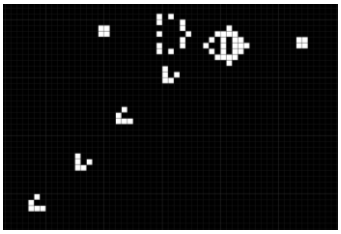
The purpose of this research is to build an arithmetic engine which is possible to calculate basic arithmetic operations in the world of Life Games. Specifically, this research starts with creating the logic circuit to express NOT, AND, OR, XOR. Also, It should be possible to show the result in an easy-to-understand way.

１．目的

ライフゲームの平面世界で、NOT、OR、AND、XOR の論理回路を基礎として、自然数同士の四則演算を行うことを目的とする。

２．方法

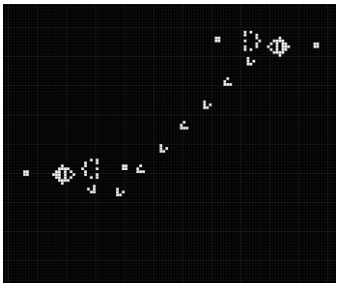
セルオートマトンのシミュレーション用ソフトウェアであるGollyを用いた。ライフゲーム上の論理回路は、「Glider Gun」から一定の間隔で連射される、同じ形を保ちながら永遠に直線的に移動する「飛行物体」の最も簡潔な「Glider」の列を信号とし、消滅させたり、或いはGlider同士をぶつけ合って消滅させるなどの方法で再現することとする。



Glider Gun（右上）から連射されるGliderの列

３．結果

NOT は右図のように、別の Glider Gun から連射されたGliderの列を遮ることで再現することができた。これを用いて、AND及びOR、そしてXORを制作することが出来た。



４．考察

２進数における計算の基礎としての AND 回路を一つ再現する毎に、300を超えるピクセルを要することが分かった。各セルの持ちうる情報が最小限に限られるが故に、演算などを再現する際にはより大きな構造が必要であると考える。

５．結論

Gliderの列を信号に見立てることで、ライフゲーム上に論理回路を再現することができた。これにビットシフトの仕組みを加えることで、２進数の四則演算機を作り上げることが出来ると考える。

６．参考文献

Golly Game of Life Home Page　http://golly.sourceforge.net/
ライフゲームの世界　https://aidiary.hatenablog.com/entry/20130105/1357353184

７．キーワード

ライフゲーム　Golly　セルオートマトン　論理演算

学校名　茗渓学園高等学校
Affiliation Meikei high school

シュート時の最適角度を求める
Find the optimal angle for shooting.

Abstract
Objective: To calculate the angle of a shot that can be taken from any distance.
Method: Raise the ball above the ground and find the initial velocity. Change the distance and find the angle of the shot for each distance.

1. 目的
どこの距離からでも決められるシュートの角度を計算する。

2. 方法
ボールを真上に上げ初速度を求めた。到達距離は 2.35m であった。
自分の身長 1.5m、バスケットゴールは 3.05m として、シュートを打つ位置を変えていき,ゴールまでの距離ごとに打ち出しの角度を求めた。

3. 結果
初速度は、ボールを上に投げ上げて、その到達距離から求めた。
ボールが頂点に来た時は速度が 0 になる時なので、(gを重力加速度)
初速度をaとすると　$a - gt = 0$　このとき　$t = a/g$
高さを y とすると(頭頂部から到達距離まで＋ボールを投げる高さから頭頂部までを y とした。)

$y = at - \frac{1}{2}gt^2$　　これに代入すると　$y = \frac{a^2}{2g}$

ここから初速度を求め、斜方投射の公式を使い、$\tan\theta$の二次関数にし、値を求めた。
このとき、角度は2つ得られるが、大きい角のほうが、リングにあたる確率が小さいので、大きいほうを採用した。(右上表参照)

距離(m)	角度(度)
0.5	87
1.0	85
1.5	82
2.0	79
2.5	76
3.0	73
3.5	69
4.0	64

4. 考察・結論
ゴールまでの距離から、打ち出し角度をもとめる式を求め、グラフ化して、その関係を視覚化したい。また、コート内のどこからでもシュートが可能な初速度も計算したい。

5. 参考文献
https://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/high-school_index/mechanics/motion/henkan-tex.cgi?target=/math/physics/high-school_index/mechanics/motion/vertical_throwup.html
http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/p/mech/henni/toukasokudo.html
http://www.sousakuba.com/Programming/algo_dandoukeisan2.html
https://www.yukimura-physics.com/entry/dyn03
http://emath.s40.xrea.com/ydir/Wiki/index.php?plugin=attach&refer=%BB%B0%B3%D1%B4%D8%BF%F4%C9%BD&openfile=trig-table.png

6. キーワード
等加速度直線運動　斜方投射

作新学院高等学校
Sakushin Gakuin High School

正多角形による円の近似

Regular polygon and approximation of circle

Abstract

The equation of a circle is derived by expressing a regular n-sided polygon on a coordinate plane and making “n” to be sufficiently close to infinite.

１．目的

正 n 角形を座標平面上で表し，n を無限大に近づけることで，円の方程式を導く。

２．方法

極方程式を用いる方法と，絶対値を用いる方法について検証する。

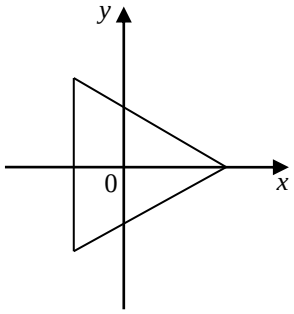
正 n 角形（n は 3 以上の整数）について，

【方針①】極方程式を用いる方法

原点からの正 n 角形上の一辺の任意の点との距離を求めて，

x 軸の正の向きからの角度 θ $\left(0 \leq \theta < \frac{2\pi}{n}\right)$ を設定し，ガウス記号を用いて，

極方程式を周期的に変化させ，正 n 角形の一般式を求める。



【座標平面上の正三角形】

【方針②】絶対値を用いる方法

単位円に内接する正 n 角形の頂点と原点を結んだ直線の方程式を，

絶対値を用いながら辺を区切ることで，正 n 角形の一般式を求める。

３．結果

【方針①】では，正 n 角形の一般式を求めることができ，n を無限大に近づけることで，円の方程式を導くことができた。

【方針②】では，辺を区切るための直線が消去できず，正 n 角形の一般式を求めるに至っていない。

４．考察

【方針①】の方法を発展させ，正多面体の一般式を導くことを考える。

【方針②】については，辺を区切るための直線を消去し，正 n 角形の一般式を求める。

５．参考文献

『数学とは何か』　R.クーラント　H.ロビンズ共著　森口繁一監訳　岩波書店

『チャート式　基礎からの数学Ⅱ＋B，Ⅲ』　チャート研究所編著　数研出版

６．キーワード

正多角形　近似　極方程式　ガウス記号　絶対値

栃木高校
Tchigi High School

$x^k+y^k=1$が表す曲線の概形について
Curves defined by $x^k+y^k=1$

Abstract
The purpose of this study is to find out the relationship between curves defined by $x^k+y^k=1$ and k.
The paper examined general forms of the curves by displaying them in GeoGebra. The authors discovered that the concavity and convexity of the curves are determined by the size relationship between k and 1.

１． 目的
$x^k+y^k=1$が xy 平面上で表す曲線を k を変化させて考察し、その変化から規則性を導くこと。

２． 方法
GeoGebra を用いて、k を変化させたときに$x^k+y^k=1$が表す曲線がどのような曲線になるのかを調べ、k に対する曲線の規則性を考える。

３． 結果
$x^k+y^k=1$……①が xy 平面上で表す曲線を C とする。

（Ⅰ）定義域と値域

k=$\frac{q}{p}$（p と q は互いに素な自然数）として、

（ⅰ）q が奇数、p が偶数のとき 0≦x≦1、0≦y≦1

（ⅱ）q、p がともに奇数のとき　定義域、値域はともに実数全体であるが、x と y がともに負であるとき①を満たさないので C は第三象限に存在しない。

（ⅲ）q が偶数、p が奇数のとき-1≦x≦1、-1≦y≦1

（Ⅱ）対称性

C は y=x について対称である。また、（ⅲ）は原点について対称である。

（Ⅲ）増減と凹凸

（ⅰ）のとき 0≦x≦1 において単調減少し、0＜k＜1 のとき 0＜x＜1 で下に凸である。k＞1 のときは凹凸が入れ替わる。

（ⅱ）のとき単調減少し、0＜k＜1 のとき x＜0 で上に凸、0＜x＜1 で下に凸、1＜x で上に凸である。k＞1 のときは凹凸が入れ替わる。

（ⅲ）のとき 0＜k＜1 のとき C はアステロイドのような曲線になる。k＞1 のときは凹凸が入れ替わる。

４． 考察
①式を x で微分することで $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1}$ 、これを再び x で微分して $\frac{d^2y}{dx^2}=(1-k)\frac{x^{k-2}}{y^{2k-1}}$ が得られる。(x≠0,y≠0)

５． 結論
C の概形は k に対して規則性を持つ。

６． 参考文献
GeoGebra（図形作成時に使用）

７． キーワード
図形と方程式　微分法

栃木高校
Tchigi High School

フラクタル図形が映す影について
Shadows cast by fractal figures

When the fractal figure is a plain figure or a space figure, compare the shadows that are formed on the plain when the entire figure is illuminated, find a relationship. In addition, what has been put into practical use is a combination of solids such as the Sierpinski tetrahedron, and we will consider why it is put into practical use.

1. 目的

フラクタル図形（本研究ではシェルピンスキーのギャスケット、カーペットを用いる）が平面図形である場合、空間図形である場合において、その図形全体に光を当てた際に平面上にできる影をそれぞれ比較し、関係性を見出す。また、実用化されているのはシェルピンスキーの四面体のような立体を組み合わせたものだが、なぜ実用化されているのかを考察する。

２．方法

平面図形の場合、シェルピンスキーのギャスケットとカーペットを空間におき、傾きを変化させて射影し、その影の面積を比べる。

空間図形の場合、GeoGebra を用いて立体を作り、正四面体のねじれの位置にある辺のそれぞれの中点を通る直線と、それに平行な直線を光と見なし、影を正射影する。

３．結果

平面図形である場合、常にシェルピンスキーのカーペットの方がギャスケットよりも影の面積が大きくなる。

空間図形である場合、シェルピンスキーの四面体では、ねじれの位置にある２辺の中点を結んだ直線上に光源があるとき、各立体の影が隙間なく並び、光の通る空間がなくなることがわかった。光源のずれと光の通る空間が少々できる。
一方メンがーのスポンジでは、常に影が重なっているため、光の通る空間はなかった。

４．考察

フラクタル図形が平面であった場合、光の傾きに対し常にカーペットの方が影の割合がギャスケットより大きいことが証明できたが、シェルピンスキーのギャスケットで構成された四面体、シェルピンスキーのカーペットで構成された六面体（メンガーのスポンジ）それぞれの影は、四面体では影内部の隙間の変化はあるが、六面体にはないことから、四面体が実用化に至ったのは、日よけという用途に光の量の変化があるこの四面体の図形的性質が適していたのではないかと考える。またカーペットの場合、六面体となる性質上、影においてフラクタル図形であるということは意味を持たなくなってしまうことがわかった。

５．結論

シェルピンスキーの四面体は影の光量の変化をつけるのに効果的であった。一方、メンガーのスポンジは影において六面体と違いが見られなかった。

６．参考文献

GeoGebra（図形作成時に使用）

７．キーワード

フラクタル図形　幾何　射影

市川高等学校
Ichikawa High School

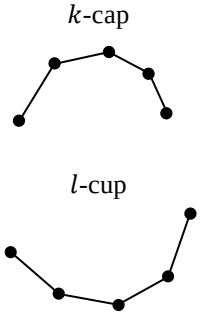
Erdös Szekeres 予想解決に向けたk-cap l-cup 理論の拡張
Extension of the k-cap l-cup theory to solve Erdös Szekeres conjecture

Abstract

Let $g(k,l)$ denote the least integer such that any set of $g(k,l)$ points in general position in the plane always contain k-cap, l-cup or $(k-1)$-cap and $(l-1)$-cup which have endpoints in common. We believe the function $g(k,l)$ exists and, tried to solve Erdös Szekeres conjecture.

１．定義

平面上の一般の位置の点集合に対し, 凸n角形が存在するために必要な点の個数の最小値を $f_{\mathrm{ES}}(n)$ とおく. このとき $f_{\mathrm{ES}}(n)=2^{n-2}+1$ が成り立つという予想を Erdös Szekeres 予想という. また xy平面に点集合を埋め込んで考えたとき, k点集合が x座標の増加とともに隣り合う2点の傾きが減少していくものを k-cap, l点集合がx座標の増加とともに隣り合う2点の傾きが増加していくものを l-cup という. ここで, 一般の位置にある点集合に対し, k-cap または l-cup が存在するために必要な点の個数の最小値を $f(k,l)$ とおく.



２．先行研究

$f(k,l)=\binom{k+l-4}{k-2}+1$ (P. Erdös, G. Szekeres, 1935)

$2^{n-2}+1\le f_{\mathrm{ES}}(n)$ (P. Erdös, G. Szekeres, $1960-61$)

$f_{\mathrm{ES}}(n)\le\binom{2n-5}{n-2}+1 \quad (n\ge 5)$ (G. Tóth, P. Valtr, 2005) ※$\binom{n}{r}={}_nC_r$

３．目的・結果

$f_{\mathrm{ES}}(n)$ のより良い上からの評価を得るために, 平面上の一般の位置の点集合に対し, k-cap または l-cup または両端点を共有する $(k-1)$-cap と $(l-1)$-cup が存在するために必要な点の個数 $g(k,l)$ について考える. このとき条件の追加が及ぼす点構成の変化や一意性について調べた.

４．参考文献

1. P. Erdös and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math., $2(1935), 463-470$
2. P. Erdös and G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, Ann. Univ. Sci. Budapest, $3-4(1960-61), 53-62$
3. F. R. K. Chung and R. L. Graham, Forced Convex $n-$Gons in the Plane, Discrete & Computational Geometry, $19(1998), 367-371$

５．キーワード

Erdös Szekeres 予想

市川高等学校
Ichikawa high school

自己相似をもつ数列と拡張したコラッツ予想への応用
Sequences with self-similarity and applications to the extended Collatz problem

Abstract

The sequence which appear in the similar problem of the Collatz problem has the self-similarity which the same property as that of m-La suite de lézard, which the sequence formed by extracting terms that are multiples of m and residual terms coincide with the original sequence. Applying it to the Collatz problem, I found that there is a partial self-similarity.

１．定義

①自己相似をもつ数列(m-La suite de lézard)

・(m の倍数)番目の項を取り出してできる数列が元の数列と一致する

・残った項でできる数列が元の数列と一致する

例)3-La suite de lézard

1，2，①，1，1，②，1，2，①，1，2，…

※　○のところだけ見ても、残ったところだけ見ても元の数列と同じである

②コラッツ予想の類似問題と拡張したコラッツ予想

類似問題

$$\begin{cases} \dfrac{n}{m} & (n \equiv 0 \ (mod\ m)) \\ (m-1)n+p & (n \equiv p \ (mod\ m)) \end{cases}$$

拡張したコラッツ予想

$$\begin{cases} \dfrac{n}{m} & (n \equiv 0 \ (mod\ m)) \\ (m+1)n+m-p & (n \equiv p \ (mod\ m)) \end{cases}$$

(m は 2 以上の自然数，p は $(m-1)$ 以下の自然数)

２．結果

【類似問題】$m=3$ のとき 1→3→1→…となる 1 の循環と 2→6→2→…となる 2 の循環が現れた。

また、$n=1$ から循環の種類を書き並べると 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, …となり、これは 3-La suite de lézard の性質をもつことがわかった。さらに、これは一般化できることがわかった。

【拡張したコラッツ予想】$m=3$ のとき 1→6→2→9→3→1…となる 1 の循環と 7→30→10→…→21→7…となる 7 の循環が現れた。$n=1$ から循環の種類を書き並べると 1, 1, 1, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, …となる。これは

① $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ の項を取り出してできる数列が元の数列と一致する

② $n \equiv 2, 3\ (mod\ 4)$ の項を取り出してできる数列が元の数列とおよそ一致する

という性質をもち、循環の種類に今のところ規則性は見出せていない。

３．考察，結論

コラッツ予想に自己相似があるのはわかったが、まだ不完全なため解決には至らなかった。しかし $m=k$ のとき $mod\ (k+1)$ で自己相似を補完することができればコラッツ予想を解決できる。また、循環の種類や循環の数の規則性を考えることで、コラッツ予想に 1 の循環以外が現れないことを示せるのではないかと考えた。

４．参考文献

オンライン整数列大辞典 https://oeis.org/A117943

５．キーワード

コラッツ予想

筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba

文化祭準備における人員配置の最適化
Optimization of staffing in preparation for school festival

Abstract
In this study, in order to minimize the preparation period for the school festival, I examined how many people should be assigned to each position. In addition, by considering the working procedure, I built a more realistic model. Then, I found the optimum solution using the Excel solver.

１．目的
私が通っている学校では毎年文化祭準備が直前まで終わらないという事態に直面している。特に今年私のクラスでは、文化祭当日の朝 6 時に来て準備を終わらせるという生徒が何人か見られた。そこで私は今年の実際の作業状況に近いモデルを構築し、各役職に何人配分すれば準備期間を最小化できるのか割り出したいと考え、この研究を始めるに至った。

２．方法
各役職に配分する人数を変数でおき、目的関数である作業時間を最小化するような組み合わせを求めた。また、合計人数が 21 人であることを制約条件とした。

３．結果
作業時間が最適化する前の時間を下回る配置を発見できた。

４．考察
クラスの責任者は一人にすべきという結論が出たが、実際責任者だった身として一人だと心細い。また、作業順序は条件に組み入れられたが、個人の能力差を条件として考慮することはできなかった。個人の能力差を上手く条件にできれば結果も変わるかもしれない。

５．結論
数理モデルを構築し、文化祭の準備期間を最小化するように人員を配置すると、実際かかった時間より早く終わることが分かった。

６．参考文献
大野勝久・逆瀬川浩孝・中出康一「Excel で学ぶオペレーションズリサーチ」近代科学社　2014 年

７．キーワード
数理モデル　最適化

筑波大学附属駒場高等学校
Senior High School at Komaba, University of Tsukuba

無限個の基数と有限桁数での非負整数の表記法
The expression of non-negative integers with infinite cardinal numbers and finite digits

Abstract

In this research, inspired by the problem in SLP, I've determined all the possible numerous system in which every non-negative integer can be expressed by using infinite kinds of cardinal numbers and only finite digits.

１．目的

先日、IMO SLP を漁っていると、次のような問題に出会った。1998 年に作られた問題である。

Let a_0, a_1, a_2, ... be an increasing sequence of nonnegative integers such that every nonnegative integer can be expressed uniquely in the form $a_i + 2a_j + 4a_k$, where i, j and k are not necessarily distinct. Determine a_{1998}.

一目見て題意を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することにまず驚いたが、同時に a_i, a_j, a_k の「1,2,4」という係数に必然性があるのかを疑問に思った。これが本研究の動機である。次のような問題提起を行った。

[問題]

$N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_n$ を満たす自然数 $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$ に対し、次のような条件を満たす非負整数の部分集合 B が存在する条件とは何か。

条件：任意の非負整数 x に対し、$x = b_0N_0 + b_1N_1 + b_2N_2 + \dots + b_nN_n$ を満たす B の要素の組$(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n)$がちょうど 1 組だけ存在する。

２．結果・結論

提起した問題の答えは 2 以上の自然数 m を用いて$(N_0, N_1, N_2, \dots, N_n)=(1, m, m^2, \dots, m^n)$と表されることだと示すことができた。

３．展望

上の問題のさらなる一般化として、文字の取る範囲を実数に拡張した場合、用いる演算として別の形のものを採用した場合などが考えられる。

４．参考文献

https://artofproblemsolving.com/community/c6h18498p124444

５．キーワード

整数論　N 進法　記数法

横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校
Yokohama Science Frontier High School

折り紙で作る面積最大の正多角形
The Largest Regular Polygon Shapes an Origami Can Make

Abstract:

The objective of the study is to determine and create the largest regular polygon shape possible, via a 15cm x 15cm square origami paper by folding the paper to determine the length of the shape's sides. An equilateral triangle, a regular pentagon, and a regular hexagon are all the largest polygon shapes possible to be created within the available area of the origami.

１．目的

正方形の折り紙からできる面積最大の正多角形の折り方を研究する。

２．方法

正多角形が正方形の内部に収まり面積が最大になる条件を調べる。折り目を図形の辺として正方形の折り紙から作るときの折り方を研究する。折る回数をなるべく少なくし折り目がずれにくく正確な方法を考察する。

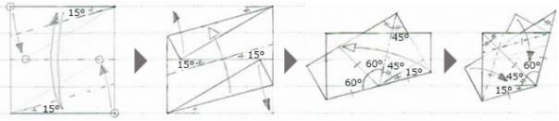
３．結果

正方形に対する正多角形の傾きを変化させ面積が最大になる必要十分条件がわかった。

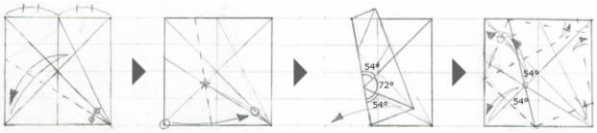
４．考察

正多角形の面積が最大になる条件を満たすように角度や長さの値から折り方を考察した。

【正三角形】



【正六角形】



【正五角形】

５．結論

正三角形、正五角形、正六角形を面積が最大になるように折ることができた。

６．参考文献

https://www.youtube.com/watch?v=Bi99O7cvyWA

７．キーワード

折り紙　正多角形

富山県立富山中部高等学校
Toyama Prefectural Toyama Chubu High School

囚人のジレンマを用いたいじめを減らす方法の検討
Examination of decreasing bullying by using Prisoner's dilemma

Abstract

Prisoner's dilemma, which has been used in a lot of fields, is a model of game theory. This time I thought that I would be able to decrease the occurrence of bullying by using it.

１．目的

「囚人のジレンマ」というゲームを用いて、学校内でのいじめを減らす方法を見つける。

２．方法

クラス内のいじめにおける「傍観者」という立場に注目し、「傍観者」の行動を「制止」、「傍観」、「加担」の３つを組み合わせて設定する。それぞれの行動に点数をつけて下の式を用いて、いじめの発生と「加害者」の人数との関係についてVBAのプログラミングを用いて調べる。

傍観者の合計点数－（－加害者の合計点数）＝X

（最終的にX≧０でいじめは発生しなかった、X＜０でいじめは発生したとする）

３．結果

いじめの有無には「加害者」の人数、行動が関係していることが分かった。

	被害者	加害者	いじめの有無	加害者の人数
1	1597	-1366	×	16
2	1234	-1608	○	21
3	2262	-1575	×	12
4	1884	-794	×	14
5	1748	-2006	○	18
6	1004	-2147	○	23
7	1213	-1895	○	20
8	2298	-1148	×	13
9	2155	-1291	×	15
10	1382	-2127	○	20

図１　結果の一部

1	All S	全て制止を選択
2	All L	全て傍観を選択
3	All C	全て加担を選択
4	Per SL	制止と傍観を交互に選択（SLSLS）
5	Per LS	傍観と制止を交互に選択（LSLSL）
6	Per　LC	傍観と加担を交互に選択（LCLCL）
7	Per　CL	加担と傍観を交互に選択（CLCLC）
8	TFT（SL）	初回は制止を選択、初回で相手が制止していれば制止を、相手が傍観/加担していれば傍観を２回目から選択し続ける

図２ 戦略の一部

４．考察

今回点数を「制止」と「加担」の点数をそれぞれ1,-1と置いて試行したがこの点数を2,-1や3,-1などにしてみると、結果が変わり、さらに応用の利くものになると思う。また、行動のレパートリーを増やしたり、実際に学生にどのような行動が予想されるか聞いて取り入れたりしても面白い。

５．結論

いじめは完全になくならないにしても、傍観者の人数、行動によって減らすことは可能だということが分かった。

６．参考文献

岡田章：「ゲーム理論　第３版」、有斐閣、2021　鎌田雄一郎：「ゲーム理論入門の入門」、岩波新書、2019
森口朗：「いじめの構造」、新潮新書、2007

７．キーワード

囚人のジレンマ、ゲーム理論、いじめの四層構造、Excel VBA

東京学芸大学附属高等学校

コラッツ予想の定式化

Abstract

In order to analyze the Collatz conjecture in mathematical terms, we created a mathematical formula to find the result by determining the initial values and operations of the Collatz conjecture, and obtained propositions that are equivalent to the Collatz conjecture.

１．目的

コラッツの操作（任意の自然数に対して、奇数ならば 3 倍して 1 足し、偶数ならば 2 で割る）の結果を初期値、コラッツの操作を特定する数列を使って表す。その式を基にコラッツ予想を表記する。

２．方法

漸化式 $a_{n+1}=f(a_n),g(a_n)$（但し$f(x)=\frac{2x+1}{3},g(x)=\frac{x}{2}$とする）を解く。その式を、$a_1$を表す式に変形し、$a_n=1$を代入した式を使って、コラッツ予想と同値な命題を求める。

３．結果

ある連続した（0 または 1 回でも連続したと考えるとする）、奇数に対する操作が、c回目に行われた奇数に対する連続した操作の時、その連続した回数をb_cとする。また、ある連続した、奇数に対する操作が、e回目に行われた奇数に対する連続した操作の時、その連続した回数をd_eとする。

$$a_n=3^{\sum_{i=1}^{\infty}b_i}\cdot 2^{\sum_{i=1}^{\infty}(-b_i-d_i)}\cdot a_1+\sum_{j=1}^{\infty}3^{\sum_{i=j+1}^{\infty}b_i}\cdot 2^{\sum_{i=j}^{\infty}(-b_i-d_i)}\cdot\left(3^{b_j}-2^{b_j}\right)\cdots①$$

よって、「b_n, d_nは常に 0 以上の全ての整数をとりうるとして、yは

$$y=(1-\sum_{j=1}^{\infty}3^{\sum_{i=j+1}^{\infty}b_i}\cdot 2^{\sum_{i=j}^{\infty}(-b_i-d_i)}\cdot\left(3^{b_j}-2^{b_j}\right))\cdot 3^{\sum_{i=1}^{\infty}-b_i}\cdot 2^{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i+d_i)}$$

で表されるとすると、yは全ての自然数をとりうる。」という命題は、コラッツ予想と同値である。

４．考察

①から、コラッツ予想は「$n_0=0$、n_i(iは自然数)は任意の自然数として、a_{n_i}は$a_1=-1$、$n_i>1$の時は、$a_{n_i}=2^{n_i-2}$とする。$\sum_{k=1}^{m}(\frac{2^{\sum_{j=1}^{k}n_{j-1}}}{3^k}\sum_{l=1}^{n_k}a_l)$という式で全ての自然数を表せる」という命題と同値であるから、2 の累乗の和を 3 で割ったあまりがコラッツ予想と関係していると言える。

５．結論

2 の累乗の和を 3 で割ったあまりがコラッツ予想と関係していることがわかった。コラッツの操作（任意の自然数に対して、奇数ならば 3 倍して 1 足し、偶数ならば 2 で割る）の結果を初期値、コラッツの操作を特定する数列を使って表した式、その式を基に記したコラッツ予想は結果のようになった。

６．参考文献

隅山孝夫.コラッツ予想に関するいくつかの関数について.愛知工業大学研究報告.第 50 号.2015

７．キーワード

コラッツ予想　コラッツ操作

東京学芸大学附属高等学校
Tokyo Gakugei University Senior High School

接待 AI のための適切な方策
An appropriate strategy for AI that gives its opponents wins

Abstract

In this study, I searched for an appropriate strategy for "Entertainment AI." For this purpose, I created some Entertainment AI with various strategies. And I determined the best strategy by examining the win rates and the numbers of moves against other programs. As a result, I showed that the best strategy is to close the predicted win rate to 50%.

１．目的

「強い」ボードゲーム AI というのはよくみられるが、人に快く勝たせる AI というのはあまり多くない。そのため、人間に「接待」する AI はどのように実現できるか探究することとした。

２．方法

まずコネクトフォーのボード、対戦相手となるプログラムを用意した。接待 AI 側はいくつかの戦略を用意し、対戦相手であるプログラムと対戦させ、勝敗、手数、棋譜の分析等から接待のために優れた方策を求めた。

３．結果

接待 AI を先手に置き、ほぼランダムに手を選択するプログラムと対戦させ、①接待 AI の方策、②リーチを作った時そこに打つ確率、③リーチを止める確率をそれぞれ変えてデータを集めた。①～③のそれぞれの項目について、勝率と終局までの手数のデータを得た。①については、勝率が 50%に最も近いと予測される手を選ぶと勝率が 43%と低く、手数は長くなった。②・③については確率を上げるほど勝率は高く、逆に手数は短くなった。ただし③は確率を高くするほど手数は延びた。

４．考察

②、③の確率を変化させると勝率や手数が変わることは明らかにわかる。

①については、予測勝率を 50%に近づけようとすると現在の評価値が良い時は力を抜いた手を打ち、悪い時には良い手を打とうとすることになるため、バランスをとりつつ評価値を上下させるので手数が延びていったのではないかと考えた。勝率が 50%を下回ったのは接待 AI の評価関数に使っているアルゴリズムが乱択アルゴリズムであることに由来していると考えられる。

５．結論

「接待 AI」において比較的優れた方策と、リーチの扱いと勝率・手数の関係性を見出すことができた。しかしこのままではただ手数を引き伸ばしているのとあまり変わらない。そのため、優れた接待 AI を実装するためには棋譜を解析し流れ等まで考慮する必要がある。

６．参考文献

杉本 直樹・鶴岡 慶雅『戦略の動的推定による 2 人対戦ゲーム接待 AI の提案』

The 23rd Game Programming Workshop 2018 p114-119

７．キーワード

接待 AI　コネクトフォー　乱択アルゴリズム

東京学芸大学附属高校
Tokyo Gakugei University Senior High School

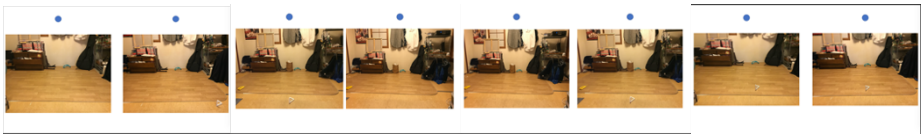
ペンローズの三角形のステレオ写真作成
Making the stereo photo of Penrose triangle

Abstract
Human eyes are Binocular stereoscopic organs. Based on this idea, I used stereo photos to check the Image informations that we can see and discovered the way how to see the Impossible solids based on Trompe l'oeil like Penrose triangle with Binocular stereoscopic. As the result I could make stereo photos (photo 1, 2).

１．目的
本研究では、両眼立体視を行っている状態で騙し絵の錯視立体を見る方法を研究しステレオ写真の技術を応用しペンローズの三角形を人間の両眼ではどう見ているのか客観的情報にする。

２．方法
GeoGebra を用いて３次元可視領域を推定し、ペンローズの三角形の錯視立体を推定した領域の置く場所を変えてステレオ写真を撮る。また、片方のカメラだけにペンローズの三角形をおいた時のステレオ写真を作る。

３．結果
下の様な写真が撮れた。



４．考察
結果から、３次元可視領域外においた時は、ペンローズの三角形の奥行きが捕らえられず、空間の中に不可能立体が見えた。３次元可視領域内においたときはペンローズの三角形の縦の支柱と奥の横の支柱が明らかに遠近がわかり、不可能立体でないことがわかってしまった。３次元領域内で片方のカメラだけにペンローズの三角形を写したら、中央に奥行きのないペンローズの三角形が現れた。この結果は、考察が難しく現在進行形で考察を進めているところである。

５．結論
ペンローズの三角形は３次元可視領域外に置くことで奥行きが消え、両眼立体視の中でも不可能立体が見える。

６．参考文献
杉原厚吉、「だまし絵と線形代数」より第１章から第４章、

GeoGebra,

35mm 換算ドットコム(https://xn--35mm-y27hg92j.com/cameras/apple/iphone7/)

杉原厚吉、「立体視」（日本ロボット学会誌 1983m 年 12 月収録）

７．キーワード
視差効果　両眼立体視　ステレオ写真　画角

東京都立小石川中等教育学校
Tokyo Metropolitan Koishikawa Secondary School

フィボナッチ数列の逆数和の研究
The research about reciprocal Fibonacci constant

Abstract

It is known that there is the reciprocal Fibonacci constant. However, most of the properties of that are still unknown. To find a new property, I did this research by changing the second term.

１．目的

フィボナッチ数列$\{F_n\}$は漸化式　$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\geq 0)$ で表される数列である。このフィボナッチ数列の逆数和は一定の値 $\varphi=3.359885\cdots$ に収束することが知られている。しかし、この数について判明していることは少ないからその数学的な意味付けを行いたい。

２．方法

F_2の値を変えると、例えば$F_2=3$ のときリュカ数列となる。リュカ数列$\{L_n\}$の一般項の式はフィボナッチ数列の一般項の式のように無理数を分母には持たず単純である。このように第二項の値を変えてより簡単な一般項の式を求める。次に、その一般項の逆数の和を求める。これによりフィボナッチ数列の逆数和の性質を求めようと考えた。

３．結果

第二項を$1,2,3,4,5,\cdots,k,\cdots$と増やしていくと一般項は$\frac{k-1}{2}L_n-\frac{k-3}{2}F_n$ …①となる。

一方で逆数和は第二項の値の k を増加させると 1 に収束する。

４．考察

第二項を変えても、リュカ数列とフィボナッチ数列の一次結合でしかないことがわかった。そのため、リュカ数列より単純な一般項を持つ数列は得られなかった。

また、逆数和は 1 に収束するという結果のみを得た。つまり逆数和は数列に並ぶ 1 の個数の和に収束することがわかった。

５．結論

フィボナッチ数列の逆数和に関して第二項を変えた逆数和との関連は見られなかった。現在のところ、第二項を小数にしても①式が成立することはわかった。

６．参考文献

小林吹代著 マルコフ方程式 方程式から読み解く美しい数学　技術評論社(2017)

７．キーワード

フィボナッチ数列　リュカ数列

石川県立金沢泉丘高等学校

折り紙による様々な方程式の解法について
On how to solve various equations with origami

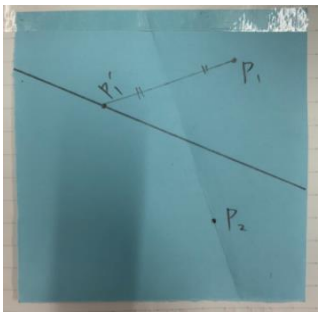
Abstract

Earlier, it was known that the solution of quadratic and cubic equations can be obtained using origami.Our first goal was to obtain solutions to various equations, including higher-order equations, using origami. Furthermore, we attempted to obtain information about physical objects, such as mechanical motion, from origami.

１．目的

折り紙を用いて二次方程式や三次方程式の解を得られることが知られている。我々はまず、変数変換によって二次方程式、三次方程式などに帰着することができる方程式の解やより高次の方程式の解を折り紙を用いて得ることを目的とした。

２．方法



４次式における複二次式の解を折り紙により求めた。

すでに示されている折り紙公理というものがあり、今回はそれを利用して複二次式を解いた。複二次式 $t^4+at^2-b=0$ において（a,b は定数、1 の基準を決めておく）、$t^2=T$ とおき、$T^2+aT-b=0$ という二次方程式を解くと考えた。

３．結果

４次式における複二次式の解を折り紙により求められることができた。

４．考察

このような方法で行けば８次式における複二次式の解も求められるのではないかと考える。

５．結論

４次式における複二次式の実数解は折り紙により求められることができた。

今後の展望としては、代数方程式の実数解だけでなく、複素数解についても、折り紙を用いて得られないか試みたい。

さらに、特定の微分方程式については、折り紙により解が得られることが知られている。これについても更に発展させ、折り紙から、力学的な運動など、物理的な対象に関する情報を得ることを試みたい。

６．参考文献

https://web.archive.org/web/20060421173006/http://www.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html　by Thomas Hull

７．キーワード

折り紙　折り紙公理　作図可能性　代数学　群論　Robert J. Lang

長野県屋代高等学校

物体の固有振動数と物体の強度との関連性

Abstract

In the process of resonance, after an object is vibrated, the object can be broken. We studied the previous researches and found that the natural frequency is deeply related to this phenomenon. So, we are examining mathematical classification of the natural frequency. We are expecting that the waveforms of the sound of various musical instruments can be measured with an oscilloscope and classified as mathematical formulas.

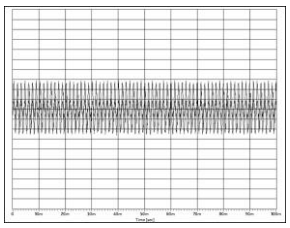
１．目的

様々なものの振動数を知り、地震などによる建物の倒壊の対策につながるものを振動の観点からおの考えられるようにする。

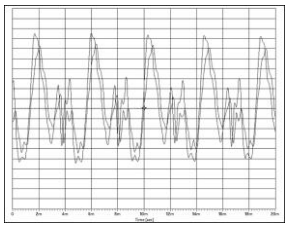
２．方法

様々なものの波形をオシロスコープで測定し、それを数式化し波形と音の関係性を数理的観点での分類を試みる。音による振動数とそれが及ぼす個体への影響を調べ、どの音やどの波形が物体に影響を及ぼすのかを調査し、考察する。

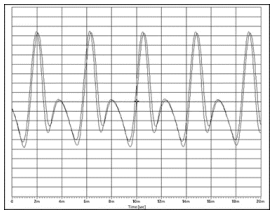
３．結果



Y=3.5sinx



Y=sin(2(x-3.3))-1/2sin(x-3.3)-1/3sin(x-3.3/3)



Y=-4sin(2x-4)+4sinx

４．考察

それぞれの波の波形はグラフで数式化が可能であるが、複雑な形の波形はほぼ不可能であった。機械によって自動で作り出しているため、さらに近づける可能性がある。

５．結論

音の波形を数式としてあらわすことが可能だということが分かった。今後は今回扱ったものとは違った種類の音の波形を数式として表して、固有振動との関係性を調べ、小さな物体の破壊から入り、徐々に建造物の耐震まで広げていきたい。

６．参考文献

物理基礎　grapes

７．キーワード

固有振動　フーリエ変換　耐震性

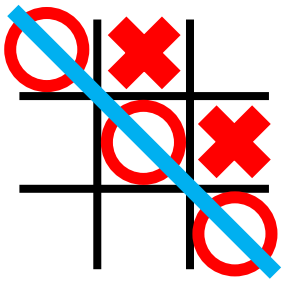
愛知県立明和高等学校
Aichi Prefectural Meiwa High School

d 次元〇×ゲームについて
n^d game(d-dimension Tic-Tac-Toe)

Abstract

In a tic-tac-toe game with different number of squares per side n and dimension d, we defined a “line” as a row of n 〇 or ×'s and an “element” as the number of "lines" passing through each square, and investigated the relation between the “element” E, the number of "lines" L, n, and d.

１．目的



これまでに研究してきた 1 辺のマスの数 n と次元 d を変えた〇×ゲームでの引き分けの有無を調べることに使うため、〇か×が 1 列に n 個並んだものを「ライン」、あるマスを通る「ライン」の数を「要素数」E、盤面上にある「ライン」の数の合計を「ライン数」L と定義し、これらと n,d の関係について調べた。

２．方法

n^d 個のマスの位置を座標で表したときの座標と E、n,d と L の関係を調べた。

３．結果

盤面の中心を原点としたとき、斜めの「ライン」上ではいくつかの座標の絶対値が等しくなっていることに着目することで、E,L を求めることができた。

４．考察

今回求めた E, L とその最小値などを使うことで、引き分けの存在する n, d の範囲を絞り込めるのではないかと考えた。

５．結論

座標が $(p_1, p_2, \cdots, p_d)$ のマスであるとき p_1〜p_d のなかに絶対値が k であるものが x_k 個あるとしたときの E の値、n, d に対する L の値は以下のようになる。

・n が偶数の時

$$E = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2^{x_k} - 1)$$

・n が奇数の時

$$E = \frac{3^{x_0} - 1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2^{x_k} - 1)$$

・L

$$L = \frac{1}{2}\{(n+2)^d - n^d\}$$

６．参考文献

なし

７．キーワード

〇×ゲーム　ライン　要素数　座標　次元

愛知県立明和高等学校

Aichi Prefecture Meiwa High School

星型多角形の内角・外角の和

The Sum of Internal angle and External angle about Star Polygons

Abstract

In figures written with a single stroke of the brush, we proved formula to find the sum of internal angle and external angle about star polygons by using the method collecting exterior. As a result of viewing figures which couldn't written with a single stroke of the brush, we derived that the sum of interior is 360°p and the sum of exterior is 180°(n-2p) in all star polygons.

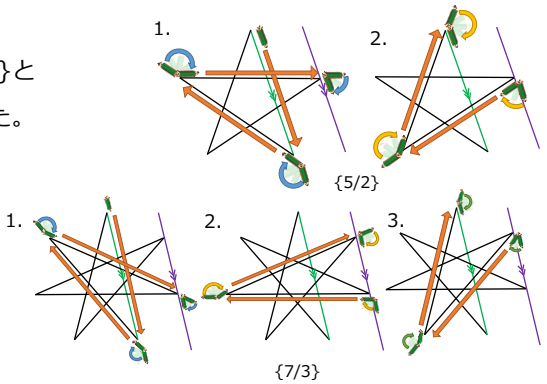
1. 目的

星型多角形の内角・外角の和を求める公式を作り、その証明をする。

2. 方法

n 角形の頂点を p 個ずつずらしながらすべて結んだものを星型多角形{n/p}と定義する。n と p が互いに素であるとき、{n/p}は一筆書きできるとわかった。

一筆書きできる星型多角形について、外角を集めるという方法で外角の和を考える。図のように鉛筆を辺に沿って動かし外角の分だけ回転させていくと、もとの位置に戻ってくるときまでに鉛筆が回転した角度が外角の和である。



3. 結果

一筆書きできる星型多角形において、外角の和は 360°p、内角の和は 180°n -360°p =180°(n-2p)である。

したがって、n の値にかかわらず鉛筆は最初の位置に戻ってくるまでにちょうど p 回回転することがわかった。

4. 考察

p 回回転するので、一筆書きできる星型多角形の外角の和は 360°p、内角の和は 180°n -360°p = 180°(n-2p)である。また、n と p の最大公約数を g、n=n'g , p=p'g とおくと星型多角形{n/p}は g 個の一筆書きできる星形多角形{n'/p'}となることがわかった。したがって、一筆書きできない星型多角形{n/p}についても、外角の和は 360°p'×g=360°p、内角の和は 180°(n'-2p')×g=180°(n-2p)である。

5. 結論

すべての星型多角形{n/p}について、外角の和：{n/p}　内角の和：180°(n-2p)　が成り立つ。

6. 参考文献

ユークリッドの世界 https://hamaguri.sakura.ne.jp/euclid1.html

7. キーワード

星型多角形　幾何学　一筆書き　内角の和　外角の和　最大公約数

静岡市立高等学校
Shizuoka Municipal High School

ダンゴムシの交替性転向を数学的に解明する
Prove the turn alternation of pill bugs by using the Markov chain.

Abstract

We proved the turn alternation of pill bugs by using the Markov chain in the experiment. First, we put in and run pill bugs in the maze. As a result, we got the 1015 date and we made the alternation of pill bugs into a mathematical model and prove whether it is mathematically correct. From the result, we reached that turn alternation is the Markov chain. And the state of the pill bugs in the nth step is stochastically obtained.

１．目的

ダンゴムシの交替性転向を数学的に解明する。

２．方法

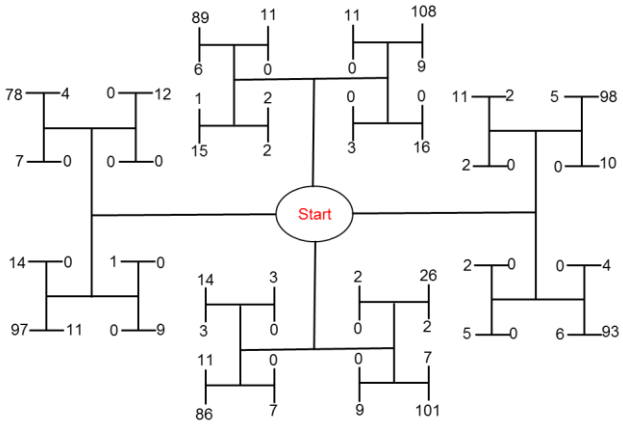
作成した迷路にダンゴムシを 1015 回走らせ、その結果を数理モデル化し、ダンゴムシの交替性転向がマルコフ連鎖であると仮定して、n ステップ後の確率と実測が無矛盾か調べる。さらに、実測との距離が最小になる理論値を求めることで、ダンゴムシの交替性転向はマルコフ連鎖であることを確かめる。

３．結果

マルコフ連鎖…　$P\,(Xn{+}1 = \mathrm{k} \,|\, \mathrm{X}n = j, \mathrm{X}n{-}1 = i, \ldots, \mathrm{X0} = \mathrm{h})$
$= P(Xn{+}1 = \mathrm{k} \,|\, \mathrm{X}n = j)$

チャプマンコルモゴロフの等式…

$$P\,(Xn{+}\mathrm{m} = \mathrm{k} \,|\, X_0 = i\,)$$
$$= \sum P(Xn{+}\mathrm{m} = \mathrm{k} \,|\, Xn{=}\mathrm{j})\mathrm{P}(Xn{=}\mathrm{j} \,|\, X_0{=}\mathrm{i})$$



①ダンゴムシの交替性転向をマルコフ連鎖と仮定し、チャプマンコルモゴロフの等式に状態推移確率行列を代入した。
実　測→0.738
３ステップ後の交替性転向確率→0.756

②ネイマンの Chi-squared divergence を利用。
実　測 → 0.919
理想値 → 0.916

４．考察

ダンゴムシの交替性転向はマルコフ連鎖であるといえる。

５．結論

特定の迷路におけるダンゴムシの状態は確率的に求めることができる。

６．参考文献

https://www.jstage.jst.go.jp/article/jcss/12/3/12_3_188/_article/-char/ja/
http://jlc.jst.go.jp/DN/JALC/00289519989?from=Google
https://www.bananarian.net/entry/2018/08/26/194715

７．キーワード

チャプマンコルモゴロフの等式　マルコフ連鎖　交替性転向　状態推移確率

名古屋市立向陽高等学校
Koyo High School

確率のパラドクス
Paradox of Probability

Abstract

Expressing the paradox that satisfies a proposition in a general expression.

１．目的

次の命題において、玉の種類を変数として、確率のパラドクスを満たす一般式を作ること

＜命題＞2 個の各箱(箱 A，箱 B)に n 種類(n は 2 以上の自然数)の色(C1，C2...Cn)の、当たり・外れのある玉が色ごとに分けられて入っている。C1 の玉を 1 個取って当たる確率を P1、C2 の玉を 1 個取って当たる確率を P2...Cn の玉を 1 個取って当たる確率を Pn とする。このとき、どちらの箱でも P1<P2<…<Pn とする。2 個の箱を合わせたとき、P1>P2>…>Pn となるような例(パラドクス)を作ることができる。

２．方法

上記の命題が成り立つと予想し、プログラミング言語 VBA を用いて Excel 上で表現し、検証を行った

３．結果

命題は真であると分かり、多数のパラドクスを作ることができた。また、パラドクスを満たす一般式を作り出すことに成功した。さらに、一般式は等差数列の形で表され、その公差の決まり方に規則性があった。

４．考察

パラドクスを満たす場合に導かれる一般式には規則性があったが、その式に任意の 0 以上の整数を入れたとしてもそれがパラドクスを満たすとは限らなかった。

５．結論

一般式に十分性がなく、汎用性を高めるにはその条件を求める必要がある。

６．参考文献

数学の課題研究テーマ選びのヒント第 1 集

７．キーワード

パラドクス　等差数列　確率　プログラミング

名古屋市立向陽高等学校
Koyo high school

フィボナッチ数列
Studies of Fibonacci sequences

Abstract

Since the sum of squares of Fibonacci numbers can be expressed in a beautiful form (①)we seek what the sum of n squares will be.

$$① \quad a_{k+1} \cdot a_k = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_k^2$$

１．目的

フィボナッチ数の二乗和が美しい形（①）で表すことができるので、n 乗和はどうなるのかを求める。

$$① \quad a_{k+1} \cdot a_k = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_k^2$$

２．方法

フィボナッチ数を縦に並べることによって計算した。

３．結果

$$1^n + 1^n + 2^n + 3^n + 5^n + 8^n \cdots\cdots a_k^n$$

$$= a_k^{n-1} * a_{k+1} - \sum_{l=3}^{k} a_l * a_{l-1}(a_l^{n-2} - a_{l-1}^{n-2})$$

上の式のように表現できた。

4. 考察

トリボナッチ数列、テトラナッチ数列とよばれるｍ項間漸化式で表される疑似数列のｎ乗和も同様に求められると考えられる。

5. 結論

$A_m = \left(\frac{1}{m-2}\right)\{a_{k+m-1} - \sum_{l=1}^{m-3}(l a_{k+m-l-2}) - 1\}$ とおくと、

$A_m \cdot a_k^{n-1} - \sum_{l=m+1}^{k} A_{m-1}(a_l^{n-1} - a_{l-1}^{n-1})$ と表現できる

6. 参考文献

https://ja.wikipedia.org/wiki/フィボナッチ数

7. キーワード

フィボナッチ数列　ｎ乗　総和

名古屋市立向陽高校
Koyo High School

無理数の連分数展開
Continued Fraction Expansion of an Irrational Number

Abstract
Fractions that are included are called “continued fractions”.
A continued fraction is also known as a regular continued fraction.
In this experiment, we unified all the numerators to 1.

１．目的

無理数を正則連分数展開しようとすると値が循環しながら無限に続いていくことを知り、任意の$\sqrt{x}$について循環する値や循環する値の個数等について展開する前に判断できるよう法則性を見つけることを目的とした。

２．方法

$\sqrt{99}$までの無理数を実際に連分数展開した結果を表に書き出し、共通点を探した。

整数部分を a と置き、$\sqrt{x}=\sqrt{a^2+n}$（$1 \leq \mathrm{a} \leq 2\mathrm{n}$） とすると、

① 循環する値が最後の 2a を除くと左右対称になっている。

② $\frac{2a}{n}$が整数値をとるとき、循環する値の個数が総じて少なくなった。

③ $\sqrt{x}$の循環の最後の値は 2a となる。

３．結果

$\frac{2\mathrm{a}}{n}$が整数の値をとる時、$[\mathrm{a}, \overline{\frac{2a}{n}, 2\mathrm{a}}]$の値で循環することが証明できた。

最後の値が２a であることが証明できた。

４．考察

$\frac{2a}{n}$=2a の時、つまり n=1 の時、2a の値一つだけで循環する。

５．展望

これまでの研究の中で、$\sqrt{99}$までの数を連分数展開した結果を書き出した表から得られた仮説②と③が正しいということが証明できたので、これからの研究では仮説①が正しい事の証明方法を探していきたい。

６．謝辞

名城大学　理工学部数学科　前野俊昭准教授

７．キーワード

無理数　連分数展開

愛知県立旭丘高等学校
Aichi Prefectural Asahigaoka High School

初等的に見た数の分解
Number decomposition from an elementary point of view

Abstract

I tried to decompose the prime numbers in the other fields. I succeeded in proving that the fact that a prime number p is the type 4n+1 is equivalent to the fact that it decomposes into a product of two complex numbers. I made a prediction about prime numbers.

１．目的

目的は、素数やその他の数を初等的にほかの体で分解することである。また、その分解をできるだけ多くの体で検証する。

２．研究方法とその結果

以下の５つの点について、研究を行った。

(1) 素数 p がガウス整数環で分解されることと p が 4n+1 型素数であることが同値であることを証明した。

(2) 素数について「任意の奇数 n に対して、a+b=n かつ $a^2+b^2=p$(p：素数)となるような正の整数の組(a,b)が存在する」という予想をたてた（証明は今後）。

(3) 一般的なガウス整数がガウス整数環上で分解されるための必要条件を求めた。

(4) √2 の二次体上で(1+√2)を用いて繰り返し分解されることを示し、分解後の形を求めた。

(5) p が√p の二次体上で分解されることを予想し、証明した。

３．考察

p=aˆ2-kbˆ2 の整数解 a,b についての考察が p の分解につながると考え、ペル方程式に近いと考えた。四元数や a+b√p＋c√q＋d√pq の形への分解を考えるなどして、よりいろいろな種類の数の分解に努めたい。

４．結論

素数は様々な体で分解することができると考え、今後も研究を続ける。

５．参考文献

https://manabitimes.jp

６．キーワード

分解　素数　体　Fermat の二平方和定理

奈良女子大学附属中等教育学校
Nara Women's University Secondary School

中線定理およびスチュワートの定理の拡張
Expansions of the Apollonius theorem and the Stewart's theorem

Abstract

We know that the Apollonius theorem is valid for the midpoint of the side BC in a triangle ABC. In this study, by applying the Stewart theorem for the point P, which freely divides the side BC, a new equation was elicited to yield the length of the segment AP if the side BC is equally divided by an arbitrary number of points.

１．目的

中線定理の拡張である「スチュワートの定理」を使って、三角形の底辺を n 等分する場合について、中線定理の拡張となる関係式について考察した。また、既知の結果との比較を行い、証明方法の違いや双方のメリットを検討した。

２．方法

三角形に対して、以下の 2 つの定理が知られている。

中線定理

△ABC と辺 BC の中点 P について、$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ が成り立つ。

スチュワートの定理

△ABC の辺 BC を点 P で内分すると、$AC^2\cdot BP+AB^2\cdot CP=BC(BP\cdot CP+AP^2)$ が成り立つ。

3 等分したとき

△ABC の辺 BC を点 P_1,P_2 で三等分したとき、次のような式が成り立つことがわかっている（図 1）。

$$AC^2+AB^2=4BP_1^2+AP_1^2+AP_2^2$$

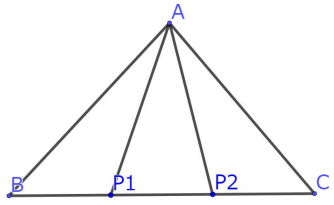


図 1

この命題には主に 2 つの証明方法がある。

(1) 中線定理を用いる方法
△ABP_2 の辺 BP_2 の中点 P_1 と△AP_1C の辺 P_1C の中点 P_2 について、それぞれ中線定理を使う。

(2) スチュワートの定理を用いる方法
点 P_1，P_2 について、それぞれスチュワートの定理を使う。

３．結果

本研究では「(2) スチュワートの定理を用いる方法」により、中線定理の拡張を試みた。結果として、以下の定理を得た。

定理 1

△ABC の辺 BC を点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ で n 等分したとき、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}AP_i^2$$ が成り立つ。

また、インターネット([2])に次のような定理が掲載されていた。

定理 2（[2]）

△ABC において，辺 BC を $n+1$ 等分する点を $D_1, D_2, \cdots, D_n$ とするとき、

$$AB^2+AC^2=AD_1^2+AD_n^2+2nBD_1^2$$ が成り立つ。

４．考察

既知の定理 2 のメリットは、1 つ内側の線分が式に含まれているので帰納的に考えるのに適している。これに対して今回導出した定理 1 のメリットは、すべての線分が式に含まれているので全体を同時に考えることができる。

５．結論

三角形の 1 つの辺を n 等分したときに成り立つ式を導出して中線定理を拡張することができた。これからは、中線定理を多角形や多次元の立体に拡張する研究をしたいと思う。また、中線定理には幾つか証明方法があるので今回証明した定理の別証明を考えたい。

６．参考文献

[1]高校数学の美しい物語，「スチュワートの定理の証明とその仲間」，
https://manabitimes.jp/math/688
[2]Accademia Nuts，「中線定理の拡張?」，
https://ameblo.jp/accade/entry-12250886087.html

７．キーワード

中線定理　スチュワートの定理

コンピュータと数学による物理現象の解明

大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎

１．abstract

In this study, a program of the generation and disappearance process of the milk crown was created based on the video. As a result, we succeeded in simulating that a milk crown was visualized by a cubic curve and a matrix.

２．はじめに

この研究は、「物理実験により得られた数々の動画を基に ミルククラウンの生成･消滅過程を出力するプログラムを作成する」というものである。

３．研究方法

①用いる液体の粘度以外の全ての条件を統一し、自作の実験道具を用いて 各液体について 10 回ずつの実験を行い、ミルククラウンの生成･消滅過程を撮影する。
②得られた動画を 200 分の 1 秒毎に写真化し、跳ね上がった高さを測定。それと経過時間の関係をグラフ化する。
③この実験結果を、Mathematical Modeling の手法で作成したプログラムに反映させる。

４．実験結果

(3 次曲線を対象とした)曲線論、(線形代数の一部である)行列による 1 次変換及びプログラミングを用いて、ミルククラウンの生成･消滅過程の出力に成功した。

５．今後の展望

今回は、経過時間とミルククラウンの高さの関係のみに注目し研究を行ったが、他の様々な関数(変量関係)にも目を向け それ等を数式化しプログラムに反映させれば、よりリアリティーを有する出力結果が得られると考えられる。

６．キーワード

物理現象 ミルククラウン プログラミング 曲線論 行列による１次変換

大阪市立東高等学校
Osaka City Higashi High School

正弦の拡張
Extension of Sine

Abstract

The sine function is only defined for absolute values less than or equal to one when the variable is a real number. Here we have considered a case where the absolute value of the sine function is not less than one.

1. 研究の目的

sinz = 2 を満たす z が存在することを知り、sinz がどのような値でもそれを満たす z が存在すると考え、そのような z について調べた。

2. 方法

①複素数 z において sinz を定義する。
②sinz の値が実数かつ絶対値が 1 より大きい時、また純虚数の時の z を求める。

3. 結果

sinz の値が

① 1 より大きい実数 a の時　$\sin z = a \Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi - i\log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$

② −1 より小さい実数 a の時　$\sin z = a \Leftrightarrow z = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi - i\log(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$

③ 純虚数 ai の時　$\sin z = ai \Leftrightarrow z = n\pi - i\log\left\{(-1)^{n+1}a + \sqrt{1 + a^2}\right\}$

4. 考察

$\sin z$の値の絶対値が 1 より大きい実数、または純虚数の場合これらが得られた。e^{ix} を実部と虚部に分けると、実数の場合、実部が 0　純虚数の場合、虚部が 0 になるので$z = x + yi$ としたとき、x もしくは y の値は簡単に求まるが、一般的な複素数は実部と虚部どちらも複雑な値になるので、計算が複雑になると考えられる。

5. 結論

sinz の値に応じて式を作ることができた。
今後は sinz を cosz に置き換えたり、一般的な複素数の場合について考えたい。

6. 参考文献

字野信一、複素数とは何か、講談社、2012-10-20

7. キーワード

オイラーの公式、三角関数、複素数

大阪府立生野高等学校
Osaka Prefectural Ikuno Senior High School

復元数
Restorable Numbers

Abstract

Let S(n) be the sum of positive divisors of a positive integer n. A positive integer n is said to be Restorable Number if there exists an α and β such that they are positive divisors of n, aren't equal to n, S(n)-2α-2β=2n. We consider some property of Restorable Numbers.

１．目的

完全数の定義に近い復元数を調べることで、完全数と復元数の関係性を導くことができると考えた。

２．方法

次の①，②を満たす自然数 N を探す。

① N が過剰数であり、２N ＜（N の正の約数の総和）≦（１１/３）N

② （N の正の約数の総和）-２N =（ある２つの N の正の約数（因数と呼ぶ）の和の２倍）

また、コンピュータを使用して復元数を探し、現れた数で性質を予想し、証明を行う。

３．結果

約 1400 個の復元数を発見し、以下の性質を発見した。

①（完全数）×（素数）^２　は復元数である。ただし、完全数と素数は互いに素。

②（偶数の完全数）×４　は復元数である。

③　ｋを自然数として、2^（２ｋ）×（2^k-１）は復元数であり、因数の組が２つ存在する。

④　ｍをｍ＜ｋを満たす自然数として、２^（ｋ-1）×（２^ｋ-１）×（２^m-１）は復元数である。

⑤　復元数は無限個存在する。

⑥　10 個の奇数の復元数を発見した。

４．考察・結論

復元数の中に完全数やメルセンヌ素数が約数に含まれているものが多くあったので、復元数とそれらの数の間にはいくつかの関係があるのではないかと思った。

５．参考文献

HP「過剰数一覧」https://number-pedia.com/abundant/

６．キーワード

完全数　メルセンヌ素数

大阪府立生野高等学校
Osaka Prefectural Ikuno Senior High School

偏差値の誤差
Deviation value error

Abstract

A formula ①, which is the definition of deviation value, is difficult to calculate deviation value. A formula ② is known as a formula to calculate an approximate deviation value easily. This paper is to investigate the error between ① and ②.

１．目的

受験者一人の点数を変化させたときに、その偏差値を求める方法を考える。

２．方法

偏差値を正確に求める式①と簡易的に求める式②を用意し、誤差を求める。

もとの自分の点数をx_1，もとの平均点を$\bar{x}$，もとの偏差値をT，受験者数をn，変化させる点数をy，変化した正確な偏差値をq，変化した簡易的な偏差値をq' とすると、

①－② は $$\mathrm{q}-\mathrm{q}'=10\left\{\frac{(x_1-\bar{x})+y\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}}\right)}{\sqrt{\overline{x^2}-(\bar{x})^2+\frac{2y}{\mathrm{n}}(x_1-\bar{x})+\frac{y^2}{\mathrm{n}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}}\right)}}-\frac{(x_1-\bar{x})+y}{\sqrt{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}}\right\}$$ となる。

この差が－0．１から 0．１の範囲に収まるとき、誤差がないと考える。
実際に模試の結果を代入して、①－②の値を調べる。

３．結果

代入した結果、①－②は－0．１から 0．１の範囲に収まらなかった。

４．考察・結論

$\mathrm{q}-\mathrm{q}'$ の式から、式②で偏差値を求めてよい各変数の条件が求まる。

５．参考文献

チャート式基礎からの数学Ⅱ＋B　P632 偏差値について

６．キーワード

偏差値　標準偏差

大阪府立岸和田高等学校
Osaka Prefectural Kishiwada High School

49と同じ性質をもつ自然数
Natural number with a property same as 49

Abstract

When the two perfect squares,2^2 and 3^2 are put in this order,they makes 49,which is also a perfect square. Similarly,is there any natural number,n that makes such a square which is composed of two sequential perfect square,n^2 and $(n+1)^2$ except $n=2$,which equals 49? At the moment,this question is yet to be completely solved. However,in some cases,this is proved algebraically.

1. 目的

隣り合う平方数2^2と3^2をこの順に並べた数49は，7^2と平方数である．同様に，隣り合う平方数n^2と$(n+1)^2$をこの順に並べることで構成される自然数が平方数となる例が他にあるかどうかを考察する．

2. 方法

題意のような数が存在しないと予想し，その予想を証明する．隣り合う平方数n^2と$(n+1)^2$をこの順に並べた自然数$n^2 10^k+(n+1)^2$が平方数m^2になるとして，$m^2=n^2 10^k+(n+1)^2$の自然数解を考察する．ただし，kは$(n+1)^2$の桁数である．これを初等整数論による3通りの方法で考察を行った．

（1）平方数が隣り合う自然数の間に存在しないことを利用して示す．

（2）nの素因数の個数を固定し，$(m+n+1)(m-n-1)=n^2 10^k$と変形できることから$m+n+1, m-n-1$の候補を絞り，その候補を否定する．

（3）合同方程式$m^2 \equiv (n+1)^2 \quad mod 10^k$の解を求めて，その解が定義を満たさないことを示す．

3. 結果・考察

kが偶数の場合，$n=p, 2p, 3p, 4p$（pは素数）の場合，合同方程式$m^2 \equiv (n+1)^2 \quad mod 10^k$の8つの解のうち4つの場合については予想が正しいことが証明できた．

次に，nの素因数が2個の場合である$n=pq$, nの素因数が3つの場合である$n=pqr$のとき（q, rは素数）の考察を行ったが，未知数が複数あることから，$n=p, 2p, 3p, 4p$の場合の証明と同様の方法では解決はできていない．合同方程式の残り4つの解は，その解の記述に用いた定数u_kの扱いが難しく証明できていない．

q, rの条件をうまく用いること，p進数などによるu_kの扱いを学ぶこと，代数的整数論による考察によって研究が進むだろうと考えている．

4. 参考文献

[1]高木貞治　『初等整数論講義』共立出版

[2]雪江明彦　『整数論1　初等整数論からp進数へ』日本評論社

5. キーワード

整数論　平方数 合同方程式　p進数

大阪府立高津高等高校
Osaka Prefecture Kozu Senior High School

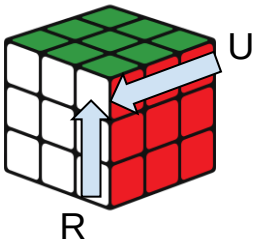
ルービックキューブの規則性に関する数学的考察
Mathematical consideration of the regularity of the Rubik's cube

Abstract

This study will find a mathematical method for elucidating how many repetitions are necessary for Rubik's cube to return to its original position. We numbered all 48 sides, and examined the movement of each side. We found out that the number of repetition corresponds to the LCM of the number of times of repetition where dihedron and trihedron respectively return to their original position.

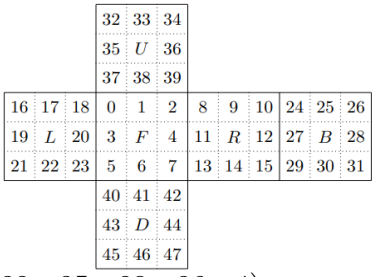
１．目的

右図の様に右側面と上面を時計回りに 90°ずつ回す操作を RU とする。操作 RU を何回繰り返せば、元の状態に戻るのかについて、数学的に求められる方法を考察した。



２．方法

48 個の面に番号をつけ、操作Ｒ・操作Ｕに対応する置換を書き出した。操作Ｒ・操作Ｕに関係する二面体と三面体に着目して、操作ＲＵをした時に面がどの様に移動したのかを書き出し考察した。



３．結果

(１)二面体（ルービックキューブの辺上に位置するピース）について

R(9 11 14 12)(4 44 27 36)　U(33 35 38 36)(1 9 25 17)

9	11	14	12	4	44	27	36	33	35	38	1	25	17	
11	14	12	9	44	27	36	4	33	35	38	1	25	17	
11	14	12	25	44	27	22	4	35	38	36	9	17	1	

以上より操作 RU を繰り返すと、9→11→14→12→25→17→1→9…(4→44→27→33→35→38→36→4)となっているため、７回繰り返せば二面体はもとに戻ることが分かった。

(２)三面体（ルービックキューブの頂点に位置するピース）について

R(8 13 15 10)(7 47 24 39)(2 42 29 34)　U(32 37 39 34)(0 8 24 26)(2 10 26 18)

8	13	15	10	7	47	24	39	2	42	29	34	32	37	0	16	26	18
13	15	10	8	47	24	39	7	42	29	34	2	32	37	0	16	26	18
13	15	26	24	47	16	34	7	42	29	32	10	37	39	8	0	18	2

以上より操作 RU を繰り返すと、8→13→15→26→18→2→42→29→32→37→39→7→47→16→0→8…となっているため、１５回繰り返せばもとに戻ることが分かった。

４．考察

７×１５＝１０５より１０５回繰り返せばもとに戻ることが予想されたため、実際にルービックキューブで操作 RU を行ったところ１０５回でもとに戻り、(二面体と三面体のそれぞれがもとに戻るまでの最小公倍数)=(ある操作を繰り返した時もとに戻るために必要な回数)であることが分かった。

５．結論

上記の方法はすべての操作において成り立つので、ルービックキューブにおいてある操作を繰り返した時、何回でもとに戻るかを確認したい場合、上記の方法を使えば良い。また、ルービックキューブ以外の群についても上記の様な考え方をすれば良いと考察される。

６．参考文献

S. Kusafusa, 置換群で解き明かすルービックキューブ, 閲覧日 2021-11-22,
http://imetrics.co.jp/mathematics/RubiksCube.pdf
中島秀斗, ルービックキューブと数学, 2018-06-23, 閲覧日 2021-11-22,
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~h-nakashima/others/suriwave/suriwaveHN.pdf

７．キーワード　ルービックキューブ　群

大阪府立四條畷高等学校
Osaka Prefectural Shijonawate High School

AI を用いた衣服のブランド判別
Discriminating the clothing brands by using AI

Abstract

There are many kinds of clothes which are cheap and of great quality in the market. However, even the same clothes are sold at different prices on the Internet. Therefore, we decided to solve this problem and we hope people can buy clothes at the proper price in the future. We decided to make computer programs showing us the proper price. At first, we produce the programs of discriminating clothing brands.

１．目的

データサイエンスを用いたインターネットショッピング上でサイトごとの販売価格のばらつきが大きい衣服の適正値段決定

２．方法

目的達成のための第一研究となる衣服のブランド判別を本研究では行った。
解析のための対象ブランドとして、計５ブランド（GU,H&M、ZARA、PRADA、GUCCI）の画像を計１５０００枚解析した。

３．結果

各ブランド 50 枚ずつ画像を用意し分類を行った。
GU 92%、H&M 76%, ZARA 82%, PRADA 86%, GUCCI 86%
の正答率を得ることができた。

４．考察

高い正答率を得たことから、ブランドの判別には成功したと考えられる。
だが、根拠を確認するプログラムを制作したが、正常に作動しなかったため、根拠は確認できなかった。今後、改善したいと思う。

５．結論

根拠は確認できないが、判別には成功した。根拠の確認や、より高い正答率を得た後、価格を決定するプログラムを作成したいと考えている。

６．参考文献

Fashion-MNIST
https://github.com/zalandoresearch/fashion-mnist/blob/master/README.ja.md
(2021/4/23)

７．キーワード

機械学習　AI　コンピューターサイエンス　python　ニューラルネットワーク

大阪府立千里高等学校
Osaka Prefectural Senri High School

モーリーの定理に関する三角形の中心の共線証明
Collinearity Proof of Triangle Centers regarding Morley's Theorem

Abstract
In 1899, F. Morley proved Morley's trisector theorem, which states that the intersections of a triangle's trisectors form an equilateral triangle. Then, in 1913, F. Glanville Taylor and W. L. Marr defined some centers of triangles concerning Morley's theorem. We proved that these centers are collinear by means of elementary geometry.

１．目的
Morley の定理と呼ばれる，任意の三角形で角の三等分線の交点がなす三角形が正三角形であるという定理に関して，F. G. Taylor と W. L. Marr により図 2 のように 3 つの三角形の中心が定義された．この 3 つの中心が共線であることを示す．

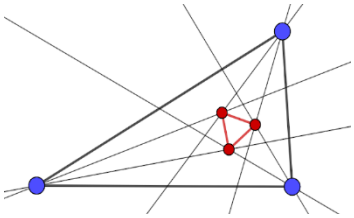


図 1．Morley の定理

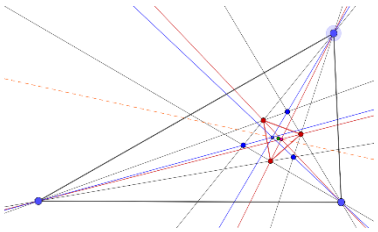


図 2．3 つの中心

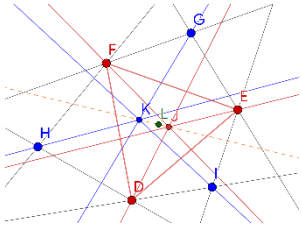


図 3．中心部の拡大図
L は正三角形の重心

２．方法
初等幾何やベクトルなどの幾何的手法を用いて証明を試みた．

３．結果
3 つの中心が共線となることを証明できた．当初はベクトルを用いて証明したが，後に得られたデザルグの定理を用いた初等幾何的証明の方がより簡潔となった．

４．考察
今回は内角の三等分線について考えたが，外角の三等分線についても同様に中心が定義できてそれらが共線で，さらに内角での中心のうちの一つもその直線上に位置することが作図により予想できたので，それを今後証明したいと考えている．

５．参考文献
F. G. Taylor, W. L. Marr, the six trisectors of each of the angles of a triangle, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society, 1913
Encyclopedia of Triangle Centers, Clark Kimberling,
https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html，最終閲覧日 2021-11-24

６．キーワード
Morley の定理 デザルグの定理

大阪府立天王寺高校
Tennoji high school

単位円に内接する正多角形と外接する正多角形の面積について

The area of a regular polygon inscribing the unit circle and that of a regular polygon circumscribing the circle

Abstract
It is known that a regular polygon whose sides are larger in number approaches a circle.Therefore,we discovered a relationship between the area of a regular polygon inscribing the unit circle and that of a regular polygon circumscribing the circle by using the Geometric mean and the Harmonic mean.

1.目的

円に内接する正n角形の自然数nを大きくしていくと円に近似することが広く知られている。我々はそこに目をつけ、単位円に内接する正多角形同士の面積や、内接するものと外接するものの面積の関係がどのようになっているかを調べた。今回は特に正n角形と正2n角形の面積の関係を中心に研究を行った。

2.方法

xy 平面上の単位円を考える。はじめに内接多角形の面積の公式と外接多角形の面積の公式を求めた。次にこの二つの公式を組み合わせて多角形の関係性を調べた。

3.結果①

(1)単位円に内接する正多角形の面積の公式を求める。

図1において、内接正 n 角形のそれぞれの頂点から円の中心に線を引き、単位円の半径を二等辺とする三角形をn個つくる。この時一つの中心角の角度∠BAB’=$\frac{2\pi}{n}$となる。AB を底辺としてこの三角形の面積を求めると、半径の長さは単位円に内接しているから1より

$\triangle ABB' = 1 \times 1 \times sin\frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} sin\frac{2\pi}{n}$

円の中にはこの三角形がn個ある。
よって内接するn角形の面積　Snは
$Sn = \frac{n}{2} sin\frac{2\pi}{n}$…①

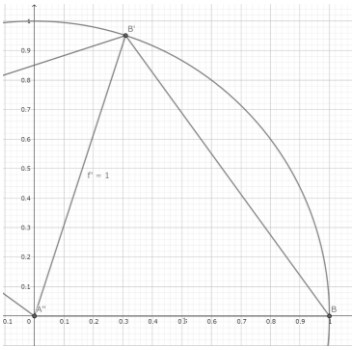


図1

(2)単位円に外接する正多角形の面積の公式を求める。

図2において、単位円の中心から正n角形と円の接する点に垂線ADを引く。また、正n角形の頂点から円の中心に線AEを引く。ADとAEがなす角は$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$である。このとき、AD=1,DE=$tan\frac{\pi}{n}$ であるから、
△ADE=$1 \times tan\frac{\pi}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} tan\frac{\pi}{n}$
外接多角形はこの三角形を2n個組み合わせた図形である。
よって外接多角形の面積Gnは
$Gn = 2n \times \frac{1}{2} tan\frac{\pi}{n} = n \times tan\frac{\pi}{n}$…②

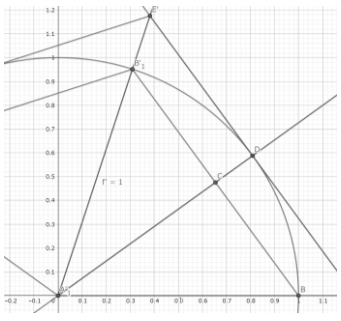
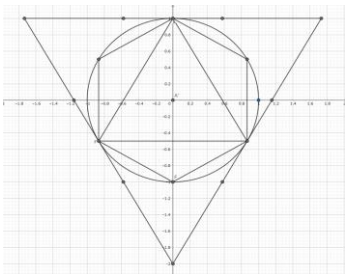


図2

(3)内接正多角形と外接正多角形の面積の関係について



これは n=3 の時の図である

（1）（2）より、

$S_n = \frac{n}{2} sin\frac{2\pi}{n} = nsin\frac{\pi}{n}cos\frac{\pi}{n}$ ①

$S_{2n} = nsin\frac{\pi}{n}$ ②

$G_n = ntan\frac{\pi}{n} = \frac{nsin\frac{\pi}{n}}{cos\frac{\pi}{n}}$ ③

$G_{2n} = 2ntan\frac{\pi}{2n}$ ④

ここで、①、②、③より、

$S_n \times G_n = S_{2n}^2$が成り立っているので、次の関係が成り立っている。

$S_{2n} = \sqrt{S_n G_n}$ （S_nとG_nの幾何平均）

4. 考察

上の結果を踏まえ、幾何平均について調べたところ、正多角形と円の周の長さには次のような関係があることがわかった。

「内接正ｎ角形の周の長さの半分を p_n，外接する正ｎ角形の周の長さの半分を q_n とすると、次の命題を得る。

$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$ （p_nとq_nの調和平均），$p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}$ （p_nとq_{2n}の幾何平均）」

周の長さについての関係に、幾何平均と調和平均が出てきたことと、（3）を踏まえ、面積にも調和平均を用いて表せるものがあると考え、①～④を変形して考えた。

①より、$nsin\frac{\pi}{n}cos\frac{\pi}{n} = 2nsin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{n}$ （ⅰ）

②より、

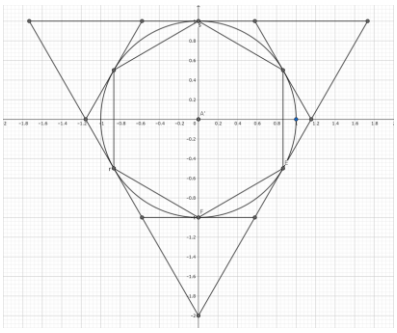
$nsin\frac{\pi}{n} = 2nsin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}$ （ⅱ）

③より、

$ntan\frac{\pi}{n} = \frac{nsin\frac{\pi}{n}}{cos\frac{\pi}{n}} = \frac{2nsin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}}{cos\frac{\pi}{n}}$ （ⅲ）

④より、

$2ntan\frac{\pi}{2n} = \frac{2nsin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}}{cos\frac{\pi}{2n}^2}$ （ⅳ）



これは n=3 の時の図である

このように変形すると（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）について、

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(ii)} + \frac{1}{(iv)}\right) = \frac{1+cos\frac{\pi}{n}}{4sin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}} = \frac{cos\frac{\pi}{2n}^2}{2sin\frac{\pi}{2n}cos\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{(iii)}$ が成り立つ。

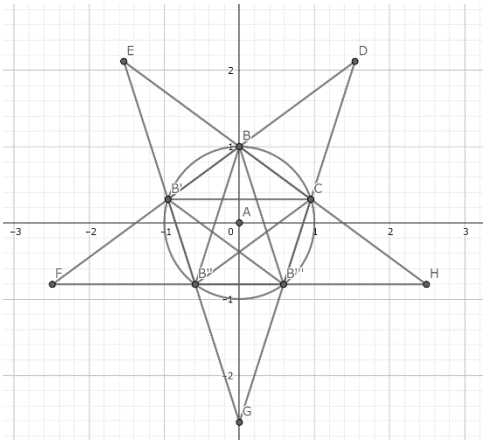
以上より、正多角形の面積について次のような関係が成り立つことが示された。

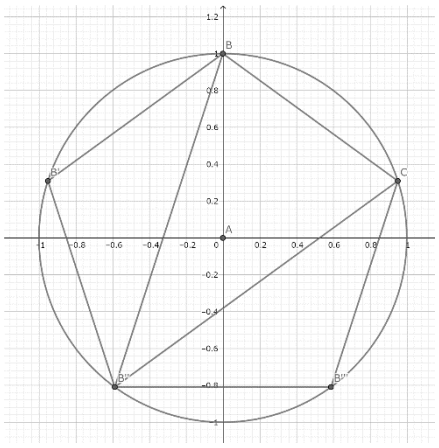
$S_{2n} = \sqrt{S_n G_n}$ （S_nとG_nの幾何平均）

$G_{2n} = \frac{2G_n S_{2n}}{G_n + S_{2n}}$ （G_nとS_{2n}の調和平均）

5. 結論

今回導出した正多角形の面積に関する二つの関係式について、今回は公式を変形して確かめただけに過ぎず、証明としては不十分である。そこで今後の方針として、内接正多角形の周の関係式や、三角形の相似の関係などを用いて、ほかの方法でこの証明を行う。また、これまでは正 n 角形について研究を進めてきたが、新たに５以上の自然数 n について内接正$\frac{n}{2}$角形というものを定義し、その面積と内接正 n 角形の面積にはどのような関係があるのかについても研究を進めたい。





↑ 正$\frac{n}{2}$角形についての図

6. 参考文献

円周率 π を計算する -アルキメデス，和算，ガウスの方法- 上越教育大学 中川仁
（openh20pi.pdf (juen.ac.jp)）

7. キーワード

単位円　正多角形　内接　外接　正$\frac{n}{2}$角形　相乗平均　調和平均

天王寺高等学校
Tennoji High School

フィボナッチ数列を素数で割ったときの余りについて
About the Remainder When Fibonacci Sequence Is Devided By Prime Number

Abstract

The Fibonacci number appears in natural world, and has interesting nature. Also, it is known that when the Fibonacci number is divided by natural numbers, its reminders form cyclic progression.

1. 目的

フィボナッチ数列とは

$$\begin{cases} a_1=0 \ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\geqq 1) \end{cases}$$

で表される数列$\{a_n\}$の事である。具体的に書き下すと次のようになる。

$\{a_n\}=\{0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\}$

フィボナッチ数列自体は単調に増加しており周期的な性質を見ることができないが、この数列の項をある任意の自然数で割ったときの余りが周期的な数列をなすという事が分かっている。

このようにフィボナッチ数列の余りの数列には周期がある。また、天王寺高校７１期の先行研究である「フィボナッチ数列の余りの世界について」より、フィボナッチ数列$\{a_n\}$をk(自然数)で割ったときの周期の長さをf(k)と表すと、

図：フィボナッチ数列を素数で割った余りの表

	フィボナッチ数列	2	3	5	7	11	19
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	2	0	2	2	2	2	2
5	3	1	0	3	3	3	3
6	5	1	2	0	5	5	5
7	8	0	2	3	1	8	8
8	13	1	1	3	6	2	13
9	21	1	0	1	0	10	2
10	34	0	1	4	6	1	15
11	55	1	1	0	6	0	17
12	89	1	2	4	5	1	13
13	144	0	0	4	4	1	11
14	233	1	2	3	2	2	5
15	377	1	2	2	6	3	16
16	610	0	1	0	1	5	2
17	987	1	0	2	0	8	18
18	1597	1	1	2	1	2	1
19	2584	0	1	4	1	10	0
20	4181	1	2	1	2	1	1
21	6765	1	0	0	3	0	1
22	10946	0	2	1	5	1	2
23	17711	1	2	1	1	1	3
24	28657	1	1	2	6	2	5
25	46368	0	0	3	0	3	8
26	75025	1	1	0	6	5	13
27	121393	1	1	3	6	8	2

① 合成数の場合

k＝$p^l q^m$(p,q:互いに素の素数である、l,m:自然数)と表されるとするとf(pq)はf(p)とf(q)の最小公倍数であることがわかっている。

② 素数の累乗の場合

自然数 k=r^n(r:素数、n:自然数)と表すことができる周期は以下の式で求められることがわかっている。

$$f(k)=f(r)\times r^{n-1}$$

私たちはこの周期に一般的な性質はあるのではないかという疑問を抱き余りの世界について研究することにした。その際主に周期の長さに注目し、長さを求めるための一般式を明らかにすることを本研究の目的とした。

２．方法

フィボナッチ数列$\{a_n\}$をある素数ｋで割った余りを表にまとめ、周期の出方や共通点、長さなどの特徴を探す。表から周期の長さについて分かった事などをまとめ、長さの一般式について仮説を立てる。その後、式の妥協性を検証し、証明する。

３．結果

周期の長さをｋ(ｋ：素数)を用いてｆ(ｋ) とする。

(ｉ)①ｋ＝2 のとき、上の表よりｆ(2)＝3

②k＝5 のとき、上の表よりｆ(5)＝20]

③k の１の位が 3 のとき、上の表よりｋ＝3 のときｆ(3)＝8、k＝13 のときｆ(13)＝28、
ｋ＝23 のときｆ(23)＝48 よりｆ(k)＝2k＋2 と予想される

＊ただし例外あり

④k の１の位が 7 のとき、上の表よりｋ＝7 のときｆ(7)＝16、k＝17 のときｆ(17)＝36、
ｋ＝37 のときｆ(37)＝76 よりｆ(k)＝2k＋2 と予想される

＊ただし例外あり

⑤k の１の位が 1 のとき、上の表よりｋ＝11 のときｆ(11)＝10、k＝31 のときｆ(31)＝30、
ｋ＝41 のときｆ(41)＝40 よりｆ(k)＝k－1 と予想される

＊ただし例外あり

⑥k の１の位が 9 のとき、上の表よりｋ＝19 のときｆ(19)＝18、k＝29 のときｆ(29)＝28、
ｋ＝59 のときｆ(59)＝58 よりｆ(k)＝k－1 と予想される

＊ただし例外あり

(ⅱ)ただし上記の予想の数式では次のｋの値で例外が発見された。(k≦800)

③k の１の位が 3 のとき、k＝113, 233, 263, 353, 563, 743

④k の１の位が 7 のとき、k＝47, 107, 307, 557, 797

⑤k の１の位が 1 のとき、k＝101, 181, 211, 281, 331, 401, 421, 461, 521, 541, 661, 691

⑥k の１の位が 9 のとき、k＝89, 199, 229, 349, 509, 619, 709

これらの例外の数はｆ(k)に代入して予想される数の$\frac{1}{n}$倍(n:自然数)となる。

③k=113 のときｆ(k)=228 と予想されるが、実際の周期は 76 で、予想された数の$\frac{1}{3}$倍である。

④k=47 のときｆ(k)=96 と予想されるが、実際の周期は 32 で、予想された数の$\frac{1}{3}$倍である。

⑤k=101 のときｆ(k)=100 と予想されるが、実際の周期は 50 で、予想された数の$\frac{1}{2}$倍である。

⑥k=89 のときｆ(k)=88 と予想されるが、実際の周期は 44 で、予想された数の$\frac{1}{2}$倍である

このことからｆ(k)に代入して予想される数で周期は終わる。

４．考察

k を素数としたときの余りの数列の周期について、k の下一桁の数字によって規則があることが得られた。そのすべての規則を一般化するため、素数ｋを用いて証明しようとした。しかし、例外などが見つかり、厳密な証明をするには至っていない。今後、研究を進める上での課題として、以下のような内容が挙げられる。

・ｋの下一桁が１と９、３と７で一般項が区別されることを証明する。
・ｋの下一桁が１，３，７，９の時の一般項を証明する。
・ｋが素数のときに周期から外れるｆ(k)つまり例外の規則性を見つけ、例外を一般化するために証明する。

５．結論

k＝2 のとき、f(2)＝3
k＝5 のとき、f(5)＝20
k の１の位が 3 のとき、f(k)＝2k＋2
k の１の位が 7 のとき、f(k)＝2k＋2
k の１の位が 1 のとき、f(k)＝k－1
※ただし例外あり

６．参考資料

先行研究、平成２９年度天王寺高校７１期「フィボナッチ数列の余りの世界について」

７．キーワード

フィボナッチ数列、素数、周期、余り

島根県立出雲高等学校
Izumo High School

n × n の○×ゲームが引き分けることの証明

Proof of a “○× game” in n×n squares ending in a draw

Abstract

A “○×game” is a simple game that is known among Japanese children. It’s made of 3×3 squares, and the player’s goal is lining ○ or × up lengthways, sideways or diagonally.

The fact that this game always ends in a draw is famous. We thought this game made of n×n squares also end in a draw, and tried to prove it mathematically.

1. 目的

幅広い世代に知られている３×３の○×ゲームを、n×n に拡張しても、勝敗はつかないことを数学的に証明すること。

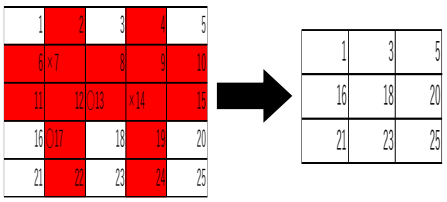
２．方法

縦横の一列のマスの数を n と置き、勝つために必要な手数を n で表し、n×n の○×ゲームを 3×3 の○×ゲームの証明を使って証明する。（n ≧ 4）

３．結果

n×n の○×ゲームも n で表すことで 3× 3 の○×ゲームの証明によって証明が可能である

例）n=5 のとき、右の 3× 3 のマスを一列揃えなければ勝てない。



○；相手

×；自分

赤；相手はこの縦横で勝てない

４．考察

この証明からおけるマスを増やしても勝ちやすくなるわけではないとわかる。このゲームに似たゲームに五目並べがあるが、○×ゲームとの違いはおける場所自由度が高いが並べなければならない碁石は 5 個である。○×ゲームではマスを多くすればするほど並べるマークも増えることが、引き分けになってしまう一つの要因ではないかと考える。この結果を踏まえ、改良したゲームを考えていきたい。

５．結論

○×ゲームを拡張しても必ず引き分けになる。ひとつの原因として、拡張に比例して一列揃えるための手数も増えることが考えられ、それを改良すれば新しい○×ゲームを作ることが出来る可能性がある。

６．キーワード

○×ゲーム　３×３のマスに一列自分のマークを並べると勝てる対人ゲーム。

広島大学附属高等学校
Hiroshima University High School

“封筒”の一刀切り
Cut an ‘envelope’ in one stroke

Abstract

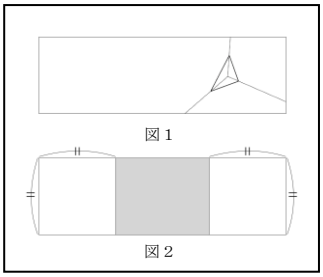
Define the shape ‘envelope’ and cut out any triangle drawn on it. However, the envelope can only be cut once, and it must be cut in a straight line. Therefore, it is assumed that the envelope can be folded many times. We are studying the laws of this method and the conditions under which this method exists.

１．目的

私たちが主として扱っている「立体の平坦化と一刀切り」という研究を進めていくなかで提起された新たな研究内容．「封筒」と定義する図形を折り，ひとつの任意の三角形を一刀切りによって切り取り出す．

２．方法

２枚の合同な長方形の紙を，対応する３組の辺どうしで接着する．このときにできる図形を本研究では「封筒」と定義し，接着されていない１組の辺に対応する封筒上の辺の方向を「横」とする．封筒の辺をまたがないように描かれたひとつの任意の三角形を一刀切りによって切り取り出すための，封筒の折り方について具体物の操作を通して考えている．



３．結果

今回の研究では，封筒の（横の辺）：（縦の辺）の比の値が２より大きいとする．

現時点では，図１で示すような，３本の内角二等分線がそれぞれ上底，下底，縦の辺と交わる三角形を一刀切りによって切り取れることが証明できた．また，封筒上の右の図２の斜線で示した範囲内に存在するすべての多角形を一刀切りによって切り取れることも証明できた．

４．参考文献

http://www.ic.daito.ac.jp/~mizutani/machine/origami/fold_and_cut.html （最終閲覧日 2021 年 10 月 10 日）

Erik Demaine, Martin Demaine, Anna Lubiw, “Folding and Cutting Paper”, Lecture Notes in Computer Science, volume 1763, 1998, 104-117.

５．キーワード

一刀切り　封筒　内角二等分線　折り紙幾何学

山口県立徳山高等学校
Yamaguchi prefecture Tokuyama high school

ナポレオン三角形の拡張
Expanding Napoleon's triangle

Abstract
Prior research was Napoleon's triangle and its extensions. I thought that these could be further expanded.

.

１．目的

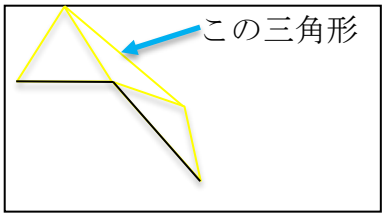
先行研究として、ナポレオンの三角形とその拡張についての研究があった。これらについて、更なる拡張が行えるのではないかと考えた。

２．方法

ｎ角形において、その一片の長さを辺とするｎ角形を描き、その重心をとる。この作業を全ての辺において行う。全ての重心を結んだ図形について考える。（以下、この図形を「ナポレオン図形」と呼称する）

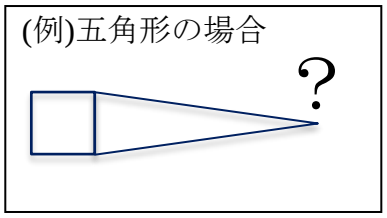
３．結果

ナポレオン図形の一辺と、重心をとった三角形二つで囲まれる三角形（右図で、黄色の三角形）の形状によって、ナポレオン図形の形状が決定していることが分かった。また、ナポレオン図形を先に考えると、元の図形が存在できないナポレオン図形があることが分かった。



４．考察

３．より、右図の黄色の三角形が全て、二等辺三角形になるときナポレオン図形は正ｎ角形になるといえるのではないか、またナポレオン図形において、右の図のように正方形の一辺を極限まで引き延ばしたナポレオン図形は成立しないのではないか。



５．結論

ｎ角形（ただしｎ≧5 とする）において、そのナポレオン図形は、元の図形が正ｎ角形でない限り、正ｎ角形にならないことが分かった。加えて、ｎ角形において元の図形が存在できないナポレオン図形を発見することができた。

６．参考文献

・Posters of Mathematics 数学科課題研究ポスター集　Since 2015 筑波大学付属駒場中・高等学校数学科　2021　より「ナポレオン三角形の拡張」（筑波大学付属駒場高等学校２年　田中 泉生氏）

沖縄県立球陽高等学校
Okinawa Prefectural Kyuyo Senior High School

Substitution rule による大きな平面的正 5 角形リングの構成
Substitution rule for large planar pentagonal rings

ABSTRACT

A planar pentagonal ring of length n is a ring of n congruent pentagons in the plane connected by edges. We are checking a nature of planar pentagonal rings.

1. 研究の目的

テキスト[2]と書籍[3]の第 2 編第 3 章第 1 節 1 を用いてペンローズタイリングについて学び, 論文[1]を研究することです。

2. 研究の結果

ペンローズタイリングに含まれる平面的正 5 角形リングを用いて，次の結果を得ました。

定理 (1) いくらでも長い平面的正 5 角形リングが存在する。
(2) 任意の半径の円に対して，それを内側の領域に含む平面的正 5 角形リングが存在する。
(3) (1), (2)を満たす 5 回回転対称性をもつ平面的正 5 角形リングで，ペンローズタイリングに含まれるものが存在する。

3. 研究の成果

任意の半径の円に対して，それを内側の領域に含む 5 回回転対称性をもつ平面的正 5 角形リングで，ペンローズタイリングに含まれるものが存在することを示しました(高知大学理工学部紀要に投稿中)。

4. 参考文献

[1] H. Ei, H.Hayashi, and K. Komatsu, 正 5 角形リングパズル(Regular pentagon ring puzzle), Scientific and Educational Reports of the Faculty of Science and Technology, Kochi University Vol. 1(2018), No.6.
[2] 小松和志「つくる幾何学」高知大学 体験する数学，数学課題探究講義テキスト.
[3] 手塚育志，小島定吉 他,「トポロジーデザイニング－新しい幾何学からはじめる物質・材料設計」，エヌ・ティー・エス出版(2009).

5. キーワード

回転対称性　平面的正 5 角形リング　ペンローズタイリング　Substitution rule

大阪府立大手前高校
Oosaka Prefectural Otemae High School

建物補強の効率化
Efficiency of building reinforcement

Abstract
The purpose of this study is to discover a way to reinforce building with as few diagonal braces as possible. We found out a method of calculating the number of minimum diagonal braces. We found out the characteristics of figures to which this method cannot be applied.

●目的

補強に必要な筋交いという補強部材の必要最低限の本数を求めることで、不必要な筋交いを減らし、材料費を削減する。

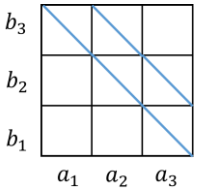
●方法

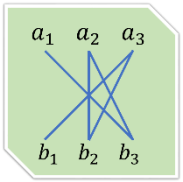
二部グラフを用いて筋交いの必要最低限の本数を考える。

＊二部グラフ：頂点集合を二つに分解して各部分の頂点は互いに隣接しないグラフ

例えば右図の場合、a_1とb_3によって囲まれたブロックに筋交いを入れたのと対応するように、二部グラフでは２点a_1,b_3を結ぶ。

このような作業を続けていき、二部グラフ３点a_1,a_2,a_3がそれぞれ３点b_1,b_2,b_3のすべての点と結ばれているとき、図形の補強は完了である。





（右図の場合、a_1とb_2によって囲まれたブロックは補強できていないように見えるが、
二部グラフ上でa_1とb_2はb_3,a_2を経由することで結ばれているため補強ができている。）

●結果

一般的に、ある図形を補強する必要最低限の筋交いの本数は、

（縦の最大ブロック＋横の最大ブロック）－１(本)であった。

例えば右上図では、縦の最大ブロックが３、横の最大ブロックが３であるので、

３＋３－１＝５(本)の筋交いが必要である。

●考察

二部グラフを用いて、図形を補強するための必要最低限の筋交いの本数が求められた。

また上記の式が使えない、例外となる図形の判定方法も編み出した。

今回は二部グラフを用いて平面図形における補強を考えたが、文字を１文字加えた三部グラフを用いることで立体図形についても同様に考えられるのではないかと考えている。

●キーワード：二部グラフ

大阪府立大手前高校
Osaka Prefectural Otemae High School

倍数判定法

Multiple Determination Method

Abstract

We studied judgement method of multiple that we can apply to all integers. Besides, we also studied how to get quotients and remainders. By using congruent expression, we finally derive a simple formula we can apply to all integers.

●目的

整数の選び方にかかわらず、すべての整数に適用できる倍数の判定法を作る。また、合同式や関数を用いて考えることで、独自の視点から研究を深める。

●方法

すべての整数 N は整数 a,b を用いて $10a+b$ という簡単な形にあらわすことができる。この特徴を活かして、倍数判定をするための公式を作る。また、合同式や関数を用いてより理解を深める。

●結果

特に言及のない限り扱う文字はすべて整数とする。割られる数を N とする。

$N = 10a + b$…①と表す。①を満たす a,b をとる。

割る数を k とし、求める商を x、求める余りを y $(0 \leqq y < k$の整数$)$とする。

①より$N = 10a + b = ka + \{(10 - k)a + b\}$と表すことができる。

$(10 - k)a + b$をk で割ったときの商を m、余りを n $(O \leqq n < k$の整数$)$とすると、x,y は

$x = a + m,\ y = m$と表すことができる。

特に$y = n = 0$のとき N は k の倍数である。

10^0の位の数字をa_1、10^1の位の数字を$a_2, \cdots\cdots, 10^{i-1}$の位の数字を$a_i$とする。

N を m 桁とし、$0 \leqq \alpha < k$を満たす整数 α をとると、

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(10 - k)^{i-1} \equiv \alpha (mod\ \ k)$$

と表すことができる。

このとき α は N を k で割ったときの余りである。特に$\alpha = 0$のとき、N は k の倍数である。

●考察

今回導出した公式を用いてすべての整数に適用できる倍数の判定法を作ることができた。そこから、合同式や関数を用いて考えることで、より学びを深めることができた。今後、この判定法を用いてアルゴリズムなどの分野で発展させていきたいと思う。

●キーワード

倍数判定、合同式(数学 A　整数の性質)、アルゴリズム

大阪府立大手前高等学校
Otemae Senior High School

有限集合における位相空間
Topological space in a finite set

Abstract

We found a method of making topological space in a finite set.

１．目的

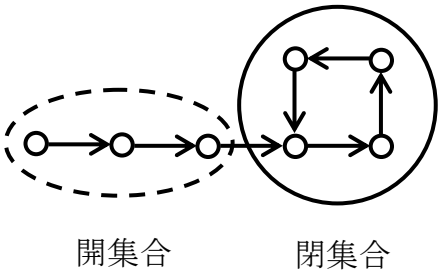
開集合や閉集合は、数直線や平面などの連続した空間において定義できるものと考えていたが、著書「無限と連続」（遠山啓 著）において、血縁関係を表す系図など、離散的な要素における関係から開集合・閉集合を定義できることを知り、これを一般化して、有限集合から位相空間を構成する方法について研究した。

２．方法

①有限個の点からなる集合について、点と点を矢印で結んだ「矢印図」をつくる。

②上記①の部分集合について、その集合に属する点に到達する矢印の全てが、その集合に属する点を起点としているとき、その集合を「開集合」と定義する。

③上記①の部分集合について、その集合に属する点を起点とする矢印の全てが、その集合に属する点に到達しているとき、その集合を「閉集合」と定義する。



開集合　　閉集合

３．結果

【結果１】

「矢印図」で定義した開集合、閉集合は、次の性質を満たすことを証明できた。

・開集合の補集合は閉集合であり、閉集合の補集合は開集合である。
・開集合の和集合は開集合であり、閉集合の和集合は閉集合である。
・開集合の共通部分は開集合であり、閉集合の共通部分は閉集合である。

これより「矢印図」から有限集合における位相空間を構成できることがわかった。

【結果２】

有限集合においては、任意の位相空間（開集合系・閉集合系）に対応する「矢印図」が存在することを証明できた。すなわち、有限集合においては、全ての「矢印図」を描けば、その集合における可能な位相空間を、全て尽くしたことになる。

【結果３】

無限集合においては、対応する「矢印図」が存在しない位相空間が無数にあることがわかった。その一例が、内点からなる開集合、内点と境界点からなる閉集合により定義される位相空間（解析学の舞台である最も馴染みの位相空間）である。

ノートルダム女学院中学高等学校
Notre Dame Jogakuin Junior and Senior High School

曲がる国歌と曲率
National anthem and curvature

Abstract

We tried to visualize melodies of some national anthems as graphics by using “curvature” and tried to find resemblances between the graphics. We drew dots on the rectangular coordinate system based on the musical scores of the 9 countries. Then, we graphed two each of them by using parabola, and calculated the curvature at each note. After we considered the tempo of music, we defined a new indicator to make the best graph. As a result, we found that the graphs can show how energetic the music is.

１．目的

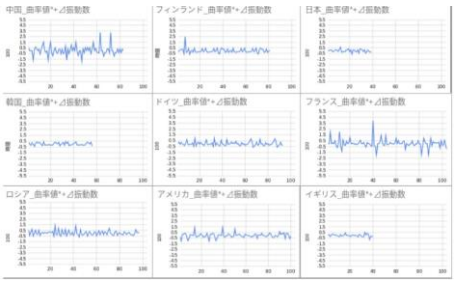
2006 年，近江和生，全昇姫は音楽の構造に着目して静止画の形で音楽を可視化した．また，2019 年，河瀬彰宏は日本各地の民謡の旋律に対して，その跳躍具合を数値化した．本研究では，「曲率」を用いて，日本・韓国・中国・露西亜・米国・英国・仏国・独国・芬蘭土の国歌について分析した。

２．方法

楽譜をもとにして，各国歌のメロディを構成する音を *x=時間，y=振動数/440* として，*xy* 座標上にのせる．すべての音を極点として各々を滑らかに繋いだグラフを想定し隣り合う 2 点について放物線で近似する．各頂点における曲率を計算し，「曲率値*+Delta 振動数」という新たな量を縦軸，音符間番号を横軸としてグラフを作成する．構成音，リズム，音楽理論の 3 観点から評価要項を作成し分類する．

３．結果

中国やフランスのグラフに関して，値の変化が大きく，大きな値の変化が多いことが分かった．さらに，グラフと評価基準の完全的な数値的類似性は見受けられないが，同じように類似性を見せるものもあった．



４．考察

上記結果においてグラフの値の変化は「曲の激しさ」を表していると考えた．「曲率値*＋Delta 振動数」のグラフは、音の長さが短く、Delta 振動数が大きいほど、大きく変化するため、曲の激しさ（＝曲の雰囲気）を表せた．

５．結論

「曲の激しさ」をグラフで表現することに成功した．また，理論的に導き出した各国歌についての類似性とグラフから読み取れる類似性を比較したところ，完全な一致ではないものの，両者に繋がりがあることが分かった．

６．参考文献

『世界の国歌総覧』マイケル・ジェミーソン・ブリストウ（編）別宮貞徳（監訳）
『理工系の微分積分学』吹田信之・新保経彦

７．キーワード

音楽、曲率