

第13回 マスフェスタ

<全国数学生徒研究発表会>



日時 2021年12月25日(土)

場所 大阪府立大手前高等学校 本館

| No. | 都道府県 | 学校名 | ポスタータイトル | ページ |
|-----|------|-----------------------|--------------------------------------|--------|
| 1 | 北海道 | 北海道釧路湖陵高等学校 | 原点可視格子”円” ～席替えで好きな人が見える確率～ | 3～4 |
| 2 | | | 多角形の面積公式 | 5～6 |
| 3 | | 市立札幌開成中等教育学校 | 遠投に適した角度を求める | 7～10 |
| 4 | | | 解析力学の幾何的側面と一般相対論への応用 | 11～14 |
| 5 | 青森 | 青森県立八戸北高等学校 | 図形の最短経路問題～シュタイナー木による～ | 15 |
| 6 | 茨城 | 茨城県立並木中等教育学校 | ライフゲームにおける四則演算計算機の構築 | 16～19 |
| 7 | | 茗溪学園高等学校 | シュート時の最適角度を求める | 20 |
| 8 | 栃木 | 作新学院高等学校 | 正多角形による円の近似 | 21～22 |
| 9 | 千葉 | 市川学園市川高等学校 | 自己相似をもつ数列と拡張したコラッツ予想への応用 | 23～24 |
| 10 | 神奈川 | 横浜市立横浜サイエンスフロンティア高等学校 | 折り紙で作る面積最大の正多角形 | 25～28 |
| 11 | 富山 | 富山県立富山中部高等学校 | 囚人のジレンマを用いたいじめを減らす方法の検討 | 29～32 |
| 12 | 石川 | 石川県立金沢泉丘高等学校 | 折り紙による様々な方程式の解法について | 33～36 |
| 13 | 長野 | 長野県屋代高等学校 | 音とグラフ | 37 |
| 14 | 愛知 | 名古屋市立向陽高等学校 | 確率のパラドクス | 38～40 |
| 15 | | | フィボナッチ数列のn乗和の表現 | 41～44 |
| 16 | | | 無理数の連分数展開 | 45～50 |
| 17 | 京都 | ノートルダム女学院中学高等学校 | 曲がる国歌と曲率 | 51～52 |
| 18 | 奈良 | 奈良女子大学附属中等教育学校 | 中線定理およびスチュワートの定理の拡張 | 53～55 |
| 19 | 大阪 | 大阪府立生野高等学校 | 復元数 | 56 |
| 20 | | | 偏差値の誤差 | 57 |
| 21 | | 大阪府立大手前高等学校 | 建物補強の効率化 | 58～59 |
| 22 | | | 倍数判定法 | 60～63 |
| 23 | | | 有限集合における位相空間 | 65～68 |
| 24 | | 大阪府立岸和田高等学校 | 49と同じ性質をもつ自然数 | 69～72 |
| 25 | | 大阪府立高津高等学校 | ルービックキューブの規則性に関する数学的考察 | 74～75 |
| 26 | | 大阪府立四條畷高等学校 | AIを用いた衣服のブランド判別 | 76～79 |
| 27 | | 大阪府立千里高等学校 | 角の三等分線に関する三角形の中心の共線証明 | 80～82 |
| 28 | | 大阪府立東高等学校 | 正弦の拡張 | 83～86 |
| 29 | 島根 | 島根県立出雲高等学校 | $n \times n$ のO×ゲームが引き分けることの証明 | 87～89 |
| 30 | 広島 | 広島大学附属高等学校 | ”封筒”の一刀切り | 90～93 |
| 31 | 山口 | 山口県立徳山高等学校 | ナポレオン三角形の拡張 | 94～97 |
| 32 | 沖縄 | 沖縄県立球陽高等学校 | Substitution ruleによる大きな平面的正5角形リングの構成 | 98～100 |

原点可視格子“円”

～席替えで好きな人が見える確率～

1. 研究動機

先行研究では人を点に見立てていたが、円にすることでより実際の値に近づけられると考えたため。

2. 研究①, ②

【研究①】

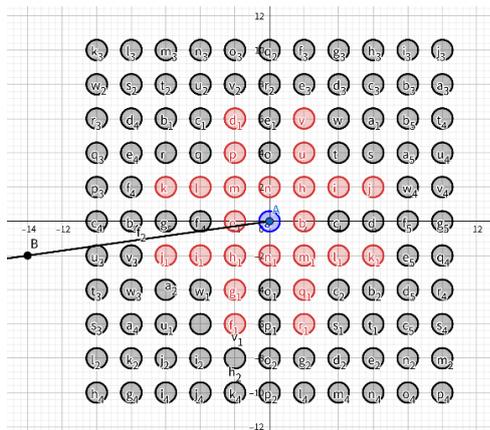


図1 原点が見える席(赤)と見えない席(黒)
(1目盛り100cm, 円の半径30cm)

【研究②】

<方法>

- ①座標平面上に黒板の中心を表す点(点A)と、格子点を中心に黒板との距離を考慮した半径の円を描く。(図2)

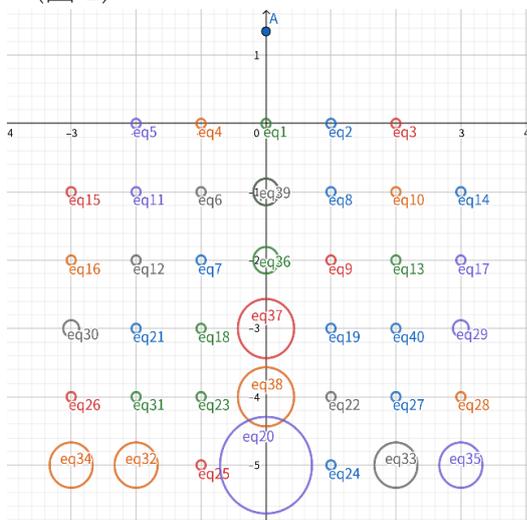


図2 黒板の中心との距離を考慮した

- ②正面から黒板の中心の点とある格子点を結んだ線分に直角な直線の黒板側を視野とする。(図3)

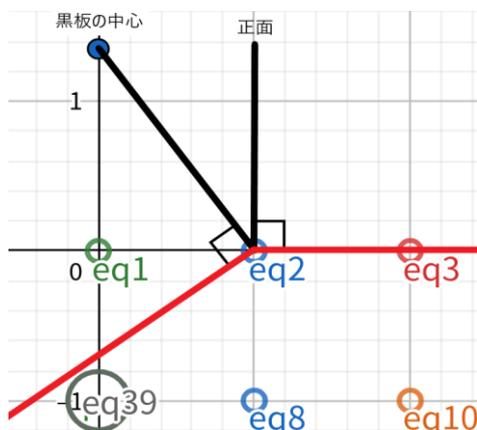


図3 eq2における視野

- ③2つの格子点を線分で結び、その線分が他の格子円と交わるかどうかを調べる。
 - ・交わる→原点可視格子“円”でない
 - ・交わらない→原点可視格子“円”
- ④確率を求める。
- ⑤実際に席に座ってみて、確認する。

<結果>

好きな人の席と自分の席の組み合わせ
 $40 \times 39 = 1560$ 通りのうち、
 原点可視格子円となるのは 507 通りであ
 った。

よって好きな人が見える席となる確率は
 $507 / (40 \times 39) \times 100 = 32.5\%$

【研究③】

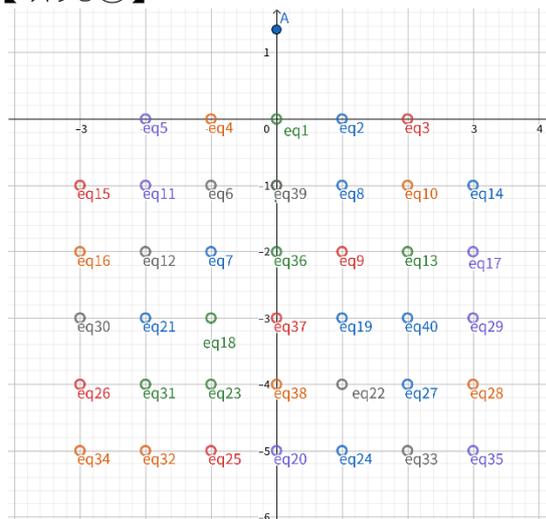


図4 頭の動く範囲を考えないモデル

<結果>

好きな人の席と自分の席の組み合わせ
 $40 \times 39 = 1560$ 通りのうち、
 原点可視格子円となるのは 473 通りで
 あった。

よって好きな人が見える席となる確率は
 $473 / (40 \times 39) \times 100 = 30.3\%$

【実験】

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | |
| 4 | 6 | 4 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| 8 | 10 | 9 | 5 | 9 | 10 | 8 |
| 7 | 11 | 10 | 9 | 10 | 11 | 7 |
| 12 | 17 | 13 | 15 | 13 | 17 | 12 |
| 13 | 20 | 19 | 17 | 19 | 20 | 13 |

図5 各席から見える席の数

<方法>

- ・机同士の間隔を揃える。
- ・座高同じと想定して実際に座る。
- ・顔を動かす範囲を正面～黒板の中心とし、目線は自由に動かせる中で焦点が合う席を調べた。

<結果>

好きな人の席と自分の席の組み合わせ
 $40 \times 39 = 1560$ 通りのうち、
 好きな人が見えるのは 381 通りであった。

よって好きな人が見える席となる確率は
 $381 / (40 \times 39) \times 100 = 24.4\%$

3. 展望

実際に座って確認できた結果から、最適なモデル設定について作ったモデルと比較しながら調べていきたい。

4. 参考文献

武田 渉 “原点可視格子点～好きなあの子が見える確率～” 数理ウェブ. 2018

日本人頭部寸法データベース 2001 -人工知能研究センター (参照 2021-11-10)

<https://www.airc.aist.go.jp/dhrt/head/index.html>

多角形の面積公式

① 研究動機

円に内接する四角形の面積は、『ブラーマグプタの公式』を用いて、四辺の長さから求めることができる。しかし、五角形以上の多角形に関する面積公式は探しても見つからず、それらが存在するかどうか疑問を持った。



ヘロンの公式やブラーマグプタの公式といった、図形の辺の長さから面積を求める公式を作りたい。まず初めに円に内接する五角形の面積公式を求めたいと考えた。

③ 結果及び考察

X と五辺の長さの関係性を表す式は作ることができたが、 X 及び Y の値を公式化しようとする、七次方程式を解かなければならないため、辺の長さのみで面積公式を求めることは難しいことが分かった。しかし、方程式の正の実数解を求めることができれば面積を求めることができるので、理論上は辺の長さのみでの五角形面積公式を求めるのは可能である。

④ 結論と展望

各辺の長さに加えて、半径や中心角の大きさを定めれば、五角形だけでなく、 n 角形の面積を求めることはできる。

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4} \sqrt{\frac{2a_1^2}{1-\cos\theta_1} - a_k^2}$$

展望として、五角形の内角の一つを定めた場合も公式化することがあげられる。

しかし、定めるべき条件が辺の長さ以外であるため、対角線から中心角などを求めたりしたい。

⑤ その他考えたこと

- ・任意の四角形についての面積公式を作ろうとした
→二種類の四角形が考えられるため、式が煩雑になってしまった
- ・トレミーの定理の五角形版を考える
→どのような形になるか見通しが立たない
- ・ n 角形についても同じような手法で考察すると、 $(n-3)$ 本の対角線を引くことができ、 $(n-3)$ 本の式が求められた
→理論上は求められるが、次数がさらに大きくなってしまふ



図 1

⑥ 参考文献「ガロアに会う」(発行：数学書房、著：のんびり数学研究会)

② 研究内容

・ 円内接五角形の一意性について

円に内接する五角形の五辺のそれぞれの長さが定まっていれば、図形はただ一つに定まる。

〈証明〉

五角形の一辺 AB を、両端が円周上にあるように置く。
その後、円周上に頂点 B と隣り合う、長さが BC となるような辺 BC ができるように頂点 C を置く。

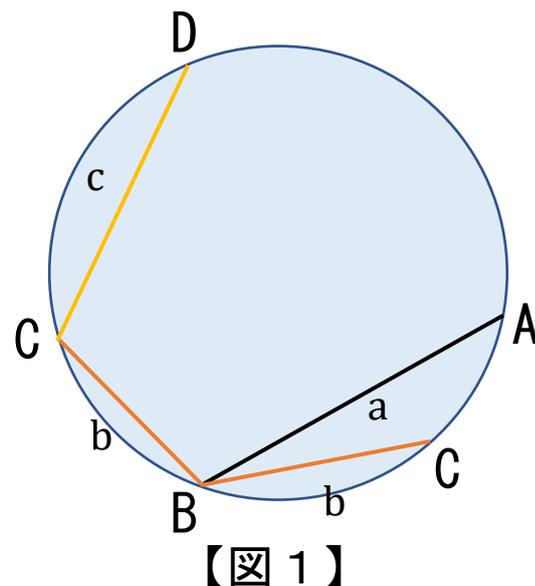
ここでその頂点の位置は二組考えられ、

そのうち残りの三辺の長さを用いて

円に内接する五角形を作図できる頂点は片方のみである。

このようにして頂点の位置を定めることを繰り返せば、

五角形は一つに定まる。【図 1】



【図 1】

・ 円内接五角形の面積の公式について

〈対角線を利用して求める〉

五辺の長さがわかっている円に内接する五角形 ABCDE について考える。

対角線 AC の長さを X 、AD の長さを Y 、 $\angle ABC = \theta_1$ 、 $\angle AED = \theta_2$ とおく。

対角線 X を五辺の長さ a, b, c, d, e で表せれば、三角形 ABC の面積はヘロンの公式、

四角形 AEDC の面積はブラーマグプタの公式で求まるので、

五角形 ABCDE の面積を辺の長さのみで表せる。

対角線の長さを X を a, b, c, d, e で表す。

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ について、余弦定理より

$$\cos \theta_1 = \frac{a^2 + b^2 - X^2}{2ab} \quad \cos(\pi - \theta_1) = \frac{c^2 + Y^2 - X^2}{2cY}$$

また、 $\triangle AED$ と $\triangle ACD$ について、

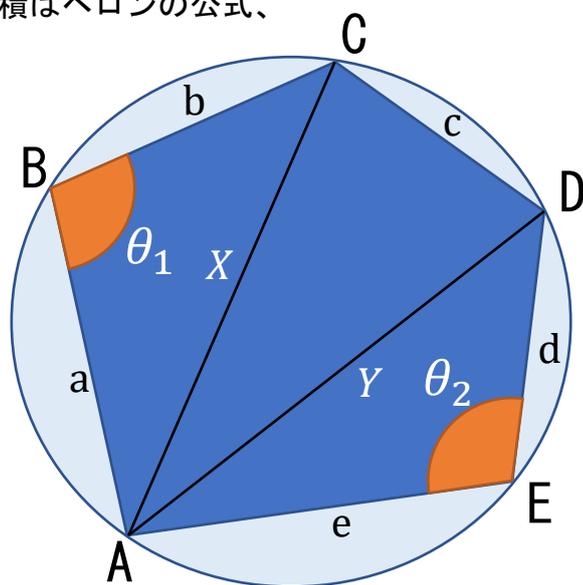
$$\cos \theta_2 = \frac{d^2 + e^2 - Y^2}{2de} \quad \cos(\pi - \theta_2) = \frac{c^2 + X^2 - Y^2}{2cX}$$

これらを連立して、

$$\begin{cases} \frac{a^2 + b^2 - X^2}{2ab} = -\frac{c^2 + Y^2 - X^2}{2cY} \\ \frac{d^2 + e^2 - Y^2}{2de} = -\frac{c^2 + X^2 - Y^2}{2cX} \end{cases}$$

$$\text{これより} \quad \frac{(a^2 + b^2 - X^2)^2}{4a^2b^2} = \frac{(c^2 + Y^2 - X^2)^2}{4c^2Y^2} \quad Y^2 = \frac{de(X^2 + c^2) + cX(d^2 + e^2)}{de + cX}$$

右式を左式に代入すると、 a, b, c, d, e, X のみの式にすることができる。【図 2】



【図 2】

「遠投に適した角度を求める」

市立札幌開成中等教育学校

研究目的

昨今の体力テストでは学生の記録が年々低下している。私たちは学生の記録を伸ばすためには、体力面での向上だけでなく技術面での向上も重要ではないかと考えた。そこで、私たちは体力テストの数ある項目の中でもソフトボール投げに着目し、**ソフトボール投げの記録向上を技術面で改善**する方法を考えた。具体的には、ソフトボール投げにおいてソフトボールを投射するのに最も適した角度を求めることを目指した。

仮説

射出する角度を θ 、初速度を v (定数)とし、球が地面に着地した点までの水平距離を x とする。また、重力加速度を g とし、空気抵抗や揚力の影響は考えないものとする。

この時に、球が地面に着地するまでの時間 $t=2 \cdot (v \cdot \sin\theta) / g$ で表せる。よって、 $x=v \cdot \cos\theta \cdot t=(v^2/g) \cdot 2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta$
 $x=(v^2/g) \cdot \sin(2\theta)$ となる。

したがって、 **x を最大にする θ は 45°** である。

実験方法

3つの実験を行った。1つ目の実験は**実際に外で投げる**という実験で、空気抵抗・揚力・人体の構造の影響を考慮できるが、精密な角度を測定できない。2つ目の実験は**ボールを射出する器具を用いた**実験で、空気抵抗・揚力の影響を考慮でき、角度もある程度の精度で測定できるが、人体の構造を考慮できない。3つ目の実験は**シミュレータを用いた**実験で、空気抵抗の影響を考慮でき、角度も精密に測定できるが、人体の構造と揚力の影響を考慮できない。これらの3つの実験を組み合わせることで、遠投に最適な角度を多角的に分析できると私たちは考えた。

考察

1つ目の実験から、 45° よりやや大きい角度が適していると、2つ目の実験から 45° が最も適していると、3つ目の実験から 43.2° が最も適していると分かった。これらを踏まえると **45° 付近を目指して投げる**のが遠投に最も適していると考えられた。1つ目の実験で遠投をする人の数を増やす、3つ目の実験で揚力や人体の構造を実装するなどの方法で、今後実験の精度を高めていきたいと思う。

参考文献

照屋 健(2020.10.19).子どものボール投げる力、低下傾向続く 野球離れ影響? .朝日新聞デジタル. <https://www.asahi.com/articles/ASNB32R5NBHUTQP01X.html>(参照2021年12月13日)
松本 雅生(n.d.).2次のルンゲクッタ法.情報処理演習 A2, B2.<http://www.ritsumeai.ac.jp/~mmr14135/johoWeb/>(参照2021年12月13日)
CATTech.LAB(2021.10.13).的当てゲーム(ボールの軌跡計算).Science.Tools. <https://cattch-lab.com/science-tools/ball-track/>(参照2021年12月13日)
上山 篤史(2019.04.23).解析の基礎09 第2章物質の性質:2.6 粘性係数と動粘性係数.HEXAGON. <https://www.cradle.co.jp/media/column/a169/>(参照2021年12月13日)
CATTech.LAB(2021.10.13).球の抗力係数の計算).Science.Tools. <https://cattch-lab.com/science-tools/sphere-cd/>(参照2021年12月13日)

実験1 実際に投げる

空気抵抗:○
揚力:○
人体の構造:○
角度の正確性:×

目的

人体の構造的な観点からの結果を測る。揚力を考えた時の結果から考察する。

実験方法

〈器具〉

・50mメジャー×2・軟式野球ボール×1・印となるマーク・記録用紙

〈手順〉

①ホームベース付近にラインを引き、メジャーをベースラインから引く

②投げる瞬間を写すカメラ係を設置(角度を測る)

③実際に投げ、距離を測定

④映像を確認し、0～25°で投げられているか確認

⑤④がOKであれば25～45°、45～65°、65～90°でも同様に測定する

⑥①～⑤を5人全員行う

④



実験結果

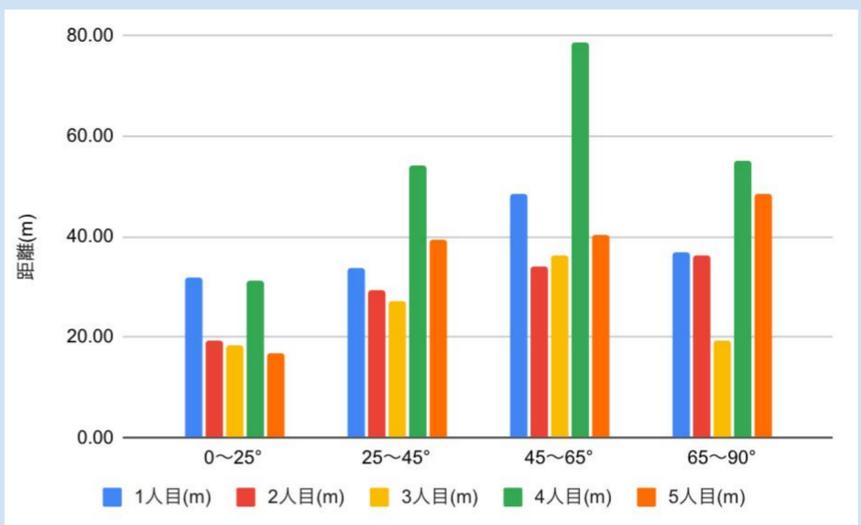
〈補足〉

・6人で行う予定だったが、実験当日に欠席者がいたため、5人のデータを取った。

・無風の日の実験を行った。

〈データ〉

| 角度 | 1人目(m) | 2人目(m) | 3人目(m) | 4人目(m) | 5人目(m) |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0～25° | 31.80 | 19.35 | 18.30 | 31.20 | 16.75 |
| 25～45° | 33.65 | 29.40 | 27.05 | 54.15 | 39.40 |
| 45～65° | 48.50 | 33.90 | 36.20 | 78.70 | 40.45 |
| 65～90° | 37.00 | 36.10 | 19.25 | 55.20 | 48.40 |



考察

人間の構造、実際の空気抵抗、実際の揚力を考慮した場合の理論値は45°以上の可能性が高いとわかった。しかしながらこの実験は20～25°刻みで測定したうえ、正しい角度で投げられているか、動画を見て目分量で判断したため、大まかなデータしか取れず、角度の正確性が低い。他の実験で角度の正確性を出した上での理論値が必要と考えた。

今後へ向けて

まず、今回の実験ではボールを投げた人が5人しかおらず、全員が男子だったので、今後の実験では女子も含めてより多くの人に投げてもらうことで、実験の精度を高めたい。また、角度の範囲を増やしたり、軟球ボールではなく実際のテストでも使用されるソフトボールを用いたりすることでも、実験の精度を高めたい。

実験2 器具を使った実験

空気抵抗:○
揚力:○
人体の構造:×
角度の正確性:△

目的

今回の実験では角度をより正確に測り実験を行い、より正確な角度を求めるとともに、実験1よりも詳しい角度の範囲を求め考察を行い、次の実験につなげる。

実験方法

【器具】

おもりの衝突実験器
分度器 ピンポン玉 力学
台車 3mメジャー iPad



図1 おもりの衝突実験器

【手順】

- ① おもりの衝突実験器を箱の上に乗せ、0度の時にも距離が出るようにする
- ② メジャーで3mを測り、ちょうど0のポイントからボールが発射されるように実験器を設置する
- ③ 力学台車を使い、ピンポン玉を0度の角度で3回発射する
- ④ iPadにボールの着地点が映っているかどうかを確認し、大丈夫だったら記録する
- ⑤ 5度刻みで、90度まで③～④の作業を繰り返す
- ⑥ 実験から得たデータを、表にまとめ、各角度の平均値と各回数ごとの距離をまとめたグラフを作成する

データ 【グラフ】

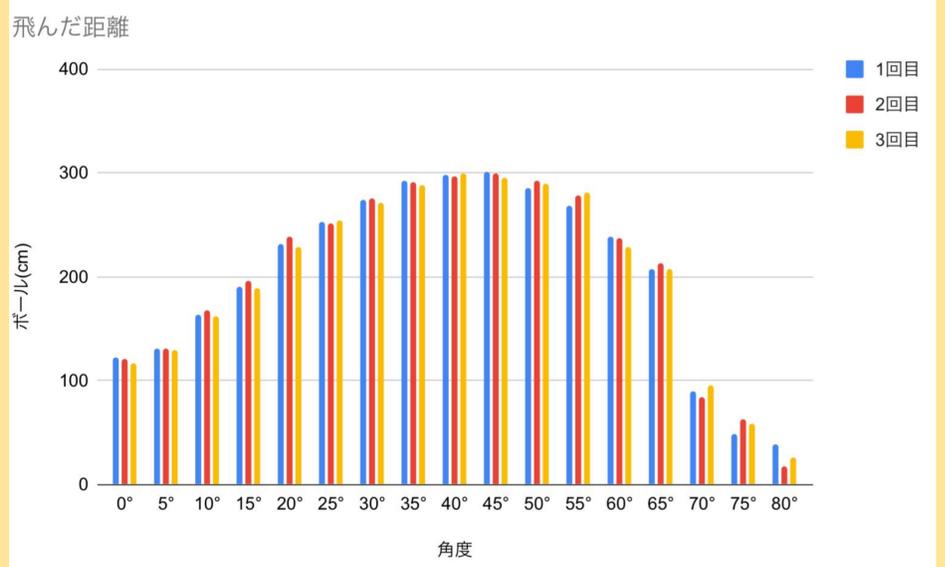


図2 各回数ごとのボールの飛んだ距離

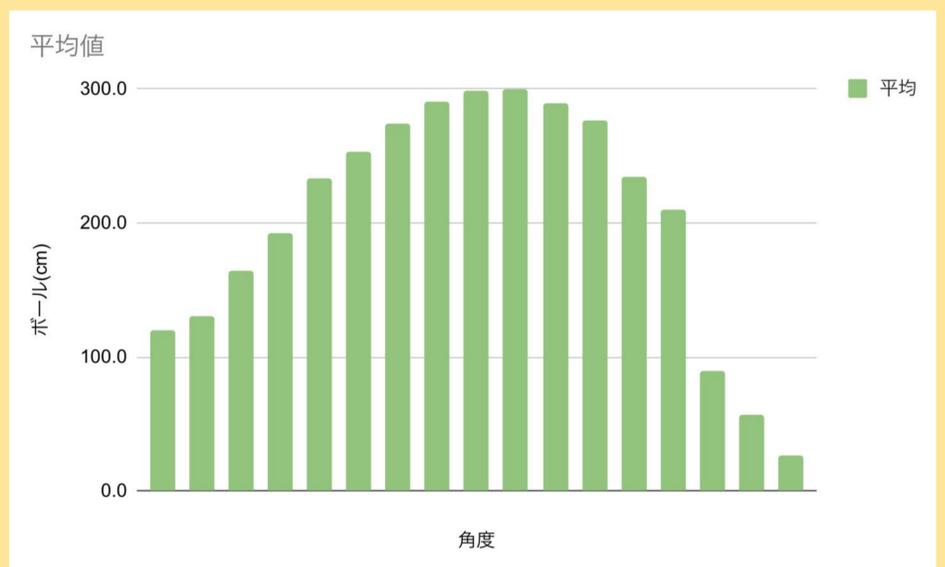


図3 各角度ごとの平均値

実験結果

実験を行いグラフにまとめた結果、各回数ごとのボールの飛んだ距離では、45度が1番ボールが飛びやすい角度という結果になり、各角度ごとの平均値では40度と45度がベストな角度であるという結果となった。この結果より、40度～45度の間で投げるのがベストであるという結論に至った。

考察

今回分度器を使用して角度を調節しながら実験を行ったが、手動なため正確性は高いとは言えない。また、今回ピンポン玉での実験となったため、次はソフトボールでこのような実験ができるようにして、より正確性を高めていきたい。

実験3 シミュレータによる実験

〈実験方法〉

シミュレータをJupyter notebookで、言語はPythonを用いて作った。シミュレータでは以下の微分方程式を解くために、オイラー法を用いた。

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g + \frac{1}{2} \cdot Cd \cdot \rho \cdot A \cdot |v| \cdot v$$

m:球の質量 Cd:空気抵抗係数 ρ:空気の密度 A:球の投影面積
v:速度ベクトル g:重力加速度ベクトル

本実験では、加速度×(時間刻み幅)を現在の速度に足すことで、速度を更新し、速度×(時間刻み幅)を現在の位置に足すことで、位置を更新した。時間刻み幅を限りなく小さくすることである程度正確にこの微分方程式を解くことができるため、今回の実験では時間刻み幅を0.01秒に設定した。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x)$$

$$f(x+h) = h f'(x) + f(x)$$

実験では、まず射出する角度を1°から89°までの1度刻みで設定して、最も水平距離(=飛んだ距離)が長かった範囲(3°分)を決定した。次に射出する角度を、その3°分の範囲のうちから0.1度刻みで設定して、最も水平距離が長かった角度を決定した。

〈ソースコード〉

```
In [1]: import numpy as np
#px: 球のx軸方向の位置, py: 球のy軸方向の位置
px = [0.0] * 10000
py = [0.0] * 10000
#vx: 球のx軸方向の速度, vy: 球のy軸方向の速度
vx = [0.0] * 10000
vy = [0.0] * 10000
v = [0.0] * 10000
#fx: 球のx軸正方向に受ける力, fy: 球のy軸正方向に受ける力
fx = [0.0] * 10000
fy = [0.0] * 10000

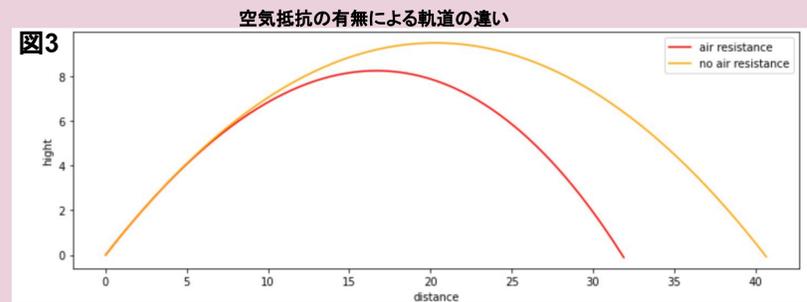
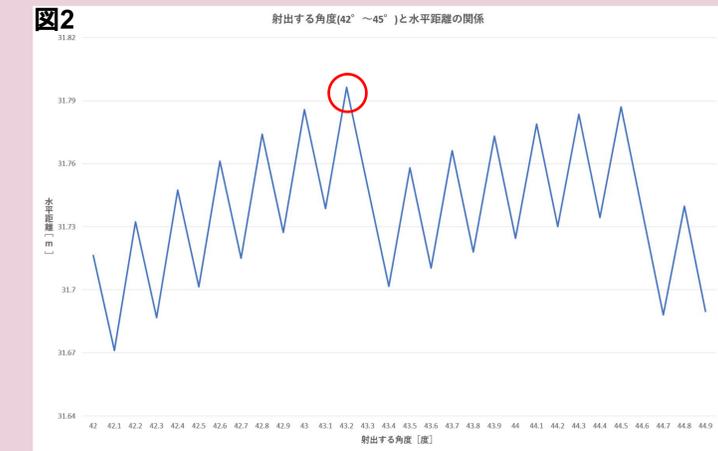
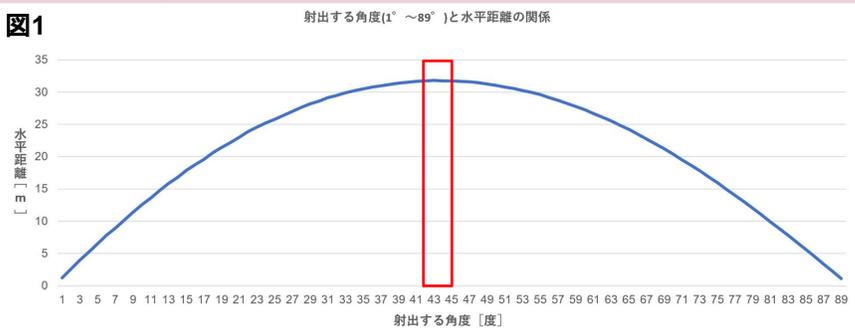
In [2]: v0 = 20 # v: 初速度の大きさ[m/s] = 70km/h
m = 0.188 # m: 球の質量[kg]
d = 1.293 # d: 空気の密度[kg/m^3]
g = 9.8 # g: 重力加速度[m/s^2]
r = 0.049 # r: 球の半径[m]
a = np.pi * r * r # a: 球の投影面積[m^2]
s = 1.848e-5 # s: 空気の粘性抵抗[Pa * s]
dt = 0.01 # dt: 時間刻み幅

In [3]: #1° ~89° の範囲で水平距離を最大にする角度にあたりをつける
import math
k = 1
for k in range(90):
    #初速度の定義
    x = k * np.pi/180 # x: 射出する角度[rad]
    vx[0] = np.cos(x) * v0
    vy[0] = np.sin(x) * v0
    v[0] = v0
    t = 0
    for t in range(999):
        re = d * 2 * r * v[t] / s #re:レイノルズ数
        cd = 24 * (1 + 0.15 * math.pow(re, 0.687)) / re + 0.42 / (1+425000 * math.pow(re, -1.16)) # cd: 球の抗力定数
        fx[t] = -0.5 * cd * d * a * v[t] * vx[t] #x軸正方向の力の計算
        fy[t] = -9.8 * m - 0.5 * cd * d * a * v[t] * vy[t] #y軸正方向の力の計算
        vx[t+1] = dt * fx[t] / m + vx[t] #x軸方向の速度の更新
        vy[t+1] = dt * fy[t] / m + vy[t] #y軸方向の速度の更新
        v[t+1] = np.sqrt(vx[t+1]**2+vy[t+1]**2) #速さの更新
        px[t+1] = px[t] + dt * vx[t+1] #x方向の位置の更新
        py[t+1] = py[t] + dt * vy[t+1] #y方向の位置の更新
        if py[t+1] <= 0 and py[t] > 0:
            #print(k)
            #print(px[t])
            break

In [4]: #42° ~45° の範囲で水平距離を最大にする角度を見つける
import math
k = 1
for k in range(30):
    #初速度の定義
    x = (42 + k / 10) * np.pi/180 # x: 射出する角度[rad]
    vx[0] = np.cos(x) * v0
    vy[0] = np.sin(x) * v0
    v[0] = v0
    t = 0
    for t in range(999):
        re = d * 2 * r * v[t] / s #re:レイノルズ数
        cd = 24 * (1 + 0.15 * math.pow(re, 0.687)) / re + 0.42 / (1+425000 * math.pow(re, -1.16)) # cd: 球の抗力定数
        fx[t] = -0.5 * cd * d * a * v[t] * vx[t] #x軸正方向の力の計算
        fy[t] = -9.8 * m - 0.5 * cd * d * a * v[t] * vy[t] #y軸正方向の力の計算
        vx[t+1] = dt * fx[t] / m + vx[t] #x軸方向の速度の更新
        vy[t+1] = dt * fy[t] / m + vy[t] #y軸方向の速度の更新
        v[t+1] = np.sqrt(vx[t+1]**2+vy[t+1]**2) #速さの更新
        px[t+1] = px[t] + dt * vx[t+1] #x方向の位置の更新
        py[t+1] = py[t] + dt * vy[t+1] #y方向の位置の更新
        if py[t+1] <= 0 and py[t] > 0:
            #print(42 + k / 10, px[t])
            break
```

空気抵抗:○
揚力:×
人体の構造:×
角度の正確性:○

〈実験結果〉



まず、射出する角度を1°から89°までの1度刻みで設定した際に最も水平距離が長かった範囲は42°から45°だった。この実験の射出角度ごとの水平距離を表した折れ線グラフが図1である。図1の赤枠の範囲が42°から45°の範囲で、この範囲に最も水平距離を長くする射出する角度があるとあたりをつけた。

次に、射出する角度を42°から45°までの0.1°刻みで設定した際に最も水平距離が長かったのは43.2°の時だった。この実験の射出角度ごとの水平距離を表した折れ線グラフが図2である。図2の赤丸の点が射出角度が43.2°の点で、図からこの点が最も水平距離が長い点であるとわかる。

最後に、シミュレータが正常に機能しているかを確認するために、射出する角度が43.2°の時の軌道を表示させた。この時に、空気抵抗ありの場合となしの場合の両方の軌道を表示させて比較することでシミュレータが正常に機能しているかを確認した。空気抵抗なしの場合でも、放物線を表示させるのではなく、あえて空気抵抗ありの場合と同様の方法で微分方程式を解いた。その結果のグラフが図3である。

(* 図3のグラフは連続のように見えるが、実際には点列である。時間刻み幅が微小であり、各時間に対して位置をプロットしているため、結果的に連続のように見えているだけである。)

〈今後の展望〉

今後は空気抵抗だけでなく、揚力も実装してより実世界に近いシミュレータを作成したい。また、微分方程式を解く際に、今回利用したオイラー法ではなく、より正確な中点法や三次以降のルンゲクッタ法などを用いることで、シミュレータの精度を高めていきたい。

〈結論〉

空気抵抗のみを考慮した理論上は、43.2°の時に最も遠くまで投げることができる。

解析力学の幾何学的側面と 一般相対論への応用

市立札幌開成中等教育学校

導入

解析力学とは？

高校で学ぶ古典力学では

- 慣性の法則
- 運動方程式 (Newton 方程式)
- 作用・反作用の法則

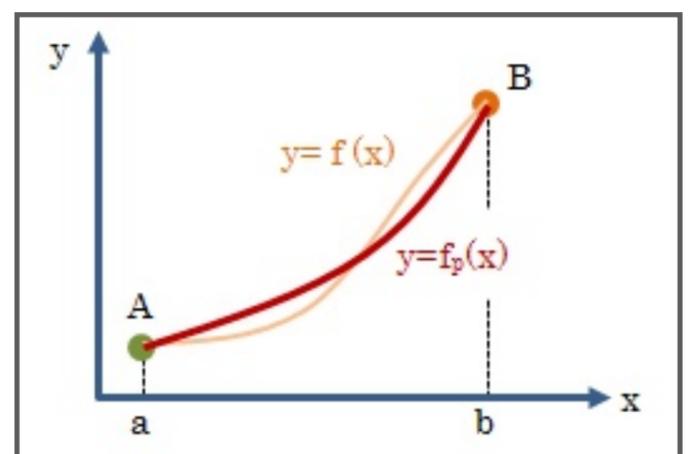
を運動の 3 法則として運動を記述していた。Newton 方程式では

座標系が変わると運動方程式の形が変わってしまう

これでは計算には不便である。そこで計算がしやすいよう、より一般の座標系について記述した Lagrange の一般化座標を用いた Euler-Lagrange 方程式や、Hamiltonian を用いた Hamilton 形式が考え出された。

変分原理とは

Hamilton 形式や Einstein 方程式を求める過程において重要なものが、変分原理である。図のように $y = f_p(x)$ に対して僅かに異なる $y = f(x)$ をとっても、それぞれを積分した値の差 (変分) δI は 0 となる。



$$\delta I = I[f(x)] - I[f_p(x)] = 0$$

一般的な解析力学の手法ではこの原理を用いて、最小作用の原理や Hamiltonian, Einstein 方程式などを導出する。

研究概要

Hamilton 形式において、幾何学的側面から考えると変分原理を用いずに正準方程式を導出できる。この手法を応用して、一般相対論における Einstein 方程式 を変分原理を用いずに導出したい。本研究では、その手掛かりとして、重力場の Hamiltonian を用いた定式化を試みる。今回は 3+1 分解 という手法を用いて、4 次元 Lorentz 多様体 (時間も軸とした空間) を空間と時間の変化に分解して考えていく。

3次元超曲面とGauss方程式

一般相対論の正準形式の議論に必要な幾何学の知識を整理する。

射影演算子 $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ を定めると、空間成分について $q_{ij} = g_{ij}$ が成り立ち、 Σ 上の誘導計量とも呼ばれる。

これにより、 Σ 上での共変微分を

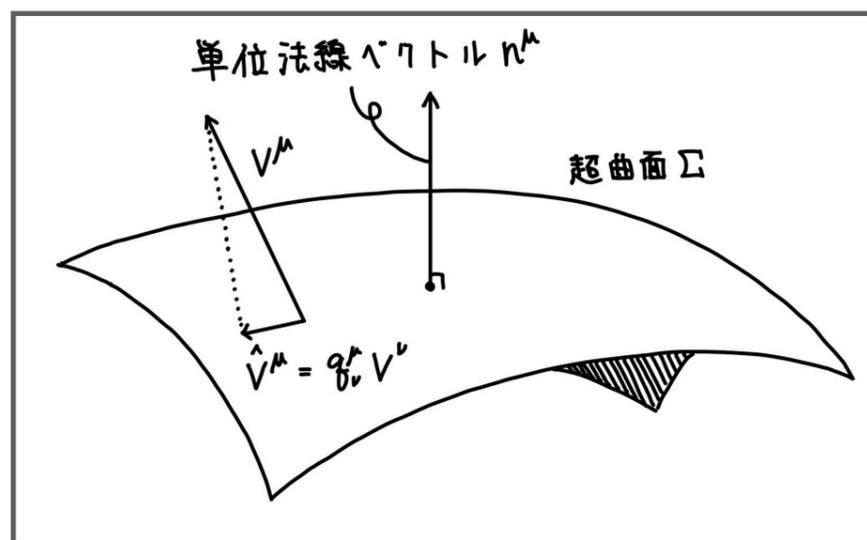
$$D_i \hat{V}^j = q_i^\mu q_\nu^j \nabla_\mu \hat{V}^\nu$$
 と定義できる。

また、 Σ が M にどのように埋め込まれているかを表す外部曲率を

$$K_{\mu\nu} = q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma$$
 で定める。外部

曲率は Lie 微分を用いて

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu}$$
 と表すこともできる。



4次元曲率を3次元の幾何学量を用いて書き表した方程式を Gauss 方程式という。Gauss 方程式は以下の通りである。

$${}^3R_{ijkl} = q_i^\mu q_j^\nu q_k^\alpha q_l^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} - K_{ik} K_{jl} + K_{jk} K_{il}$$

3次元リーマンテンソルが満たす関係式 $(D_i D_j - D_j D_i) \hat{V}_k = {}^3R_{ijkl} \hat{V}^l$ について、左辺第1項を変形すると

$$D_i D_j \hat{V}_k = q_i^\mu q_j^\nu q_k^\rho \nabla_\mu \nabla_\nu \hat{V}_\rho + K_{ij} q_k^\rho n^\sigma \nabla_\sigma \hat{V}_\rho + K_{ik} q_j^\nu n^\sigma \nabla_\nu \hat{V}_\sigma$$

第1項は4次元の曲率テンソルとなり、第3項は

$$K_{ik}q_j^\nu n^\sigma \nabla_\nu \hat{V}_\sigma = -K_{ik}q_j^\nu (\nabla_\nu n^\sigma) \hat{V}_\rho = -K_{ik}K_{jl} \hat{V}^l$$

と変形できるので、反対称化すれば

$$(D_i D_j - D_j D_i) \hat{V}_k = q_i^\mu q_j^\nu q_k^\rho R_{\mu\nu\rho l} \hat{V}^l - (K_{ik}K_{jl} - K_{jk}K_{il}) \hat{V}^l$$

任意の \hat{V}^l に対して上が成り立つことから、Gauss 方程式が示される。

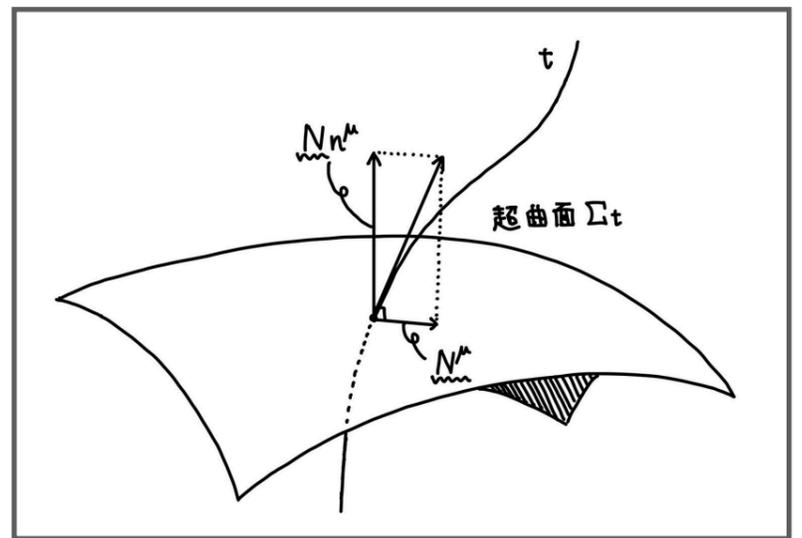
Gauss 方程式から、

$${}^3R = R + K^2 - K^{ij}K_{ij} + 2\nabla_\mu (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu)$$

となる。

3+1分解と重力場のHamiltonian

Hamilton 形式で重力場を議論するためには、空間的な変化と時間的な変化を区別して考える必要がある。そのため、3+1分解という方法を用いて、4次元 Lorentz 時空多様体 M を空間的な3次元超曲面 Σ と時間軸 t に分解する。図のように、時空多様体 M を時間軸 t と3次元超曲面 Σ_t に分ける。計量を



$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$$

と書いたとき、 N をラプス関数、 N^i をシフトベクトルという。

これより、 $\sqrt{-g} = N\sqrt{q}$ が成り立つことが示せる。

次に、Einstein-Hilbert 作用 S_g を変形して重力場の Hamiltonian を導出する。4次元リッチスカラー R に前項で得た表記を代入すると、

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_V N\sqrt{h} ({}^3R + K^{ij}K_{ij} - K^2 - 2\Lambda) d^4x - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial V} (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) d\Sigma_\mu$$

ここで、第2項は変分に関係しないので、最終的な作用 S は

$$S = \int L dt = \frac{1}{16\pi G} \int_V N\sqrt{h} ({}^3R + K^{ij}K_{ij} - K^2 - 2\Lambda) d^4x$$

ここで、Lagrangian L の変数は (q_{ij}, N^i, N) であるから、これらの正準運動量を (π^{ij}, π^i, π) とすると、以下のように計算できる。
ただし、 $\dot{q}_{ij} = \mathcal{L}_t q_{ij}$, $(16\pi G)\mathcal{L} = {}^3R + K^{ij}K_{ij} - K^2 - 2\Lambda$ とした。

$$\pi = \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\dot{N}} = 0, \quad \pi^i = \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\dot{N}_i} = 0,$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\dot{q}_{ij}} = \frac{\sqrt{q}}{16\pi G}(K^{ij} - q^{ij}K)$$

Hamiltonian 密度は $\mathcal{H} = \pi^i\dot{q}_{ij} - \mathcal{L}\sqrt{-g}$ で与えられるから、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{16\pi G}N\sqrt{q}(-{}^3R + K^{ij}K_{ij} - K^2 + 2\Lambda) \\ & - \frac{1}{8\pi G}\sqrt{q}N_j D_i(K^{ij} - q^{ij}K) + \frac{1}{8\pi G}D_i(\sqrt{q}(K^{ij} - q^{ij}K)N_j) \end{aligned}$$

第3項は積分すると0になるので、Hamiltonian H は

$$H = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma_t} \sqrt{q} \left(N ({}^3R - K^{ij}K_{ij} + K^2 - 2\Lambda) + 2N_i D_j (K_{ij} - q_{ij}K) \right) d^3x$$

考察

重力場の Hamiltonian を求めることはできたが、通常の力学系のように エネルギーとしての物理的解釈 は式の形からは出来なかった。また、系の時間変化を記述する力学的変数が Hamiltonian に含まれておらず、重力場が他の力学系に比べ特異なものであること が示唆される。

参考文献

- [1] Eric Poisson(2008) "A Relativist's Toolkit" Cambridge University Press
- [2] 田中貴浩(2021) 『基幹講座 物理学 相対論』 東京図書株式会社
- [3] 田中貴浩(2014) 『基幹講座 物理学 解析力学』 東京図書株式会社
- [4] 白水徹也(2012) 『アインシュタイン方程式 一般相対性理論のよりよい理解のために』 サイエンス社
- [5] 佐古彰史(2021) 『ゲージ理論・一般相対性理論のための微分幾何入門』 森北出版

図形の最短経路問題 ～シュタイナー木による～

1. 研究の動機

数学の先生から、四角形の各頂点を結ぶ最短経路について、対角線が最小でないことを聞き、実際に目で見てみたいと思ったため。

2. 証明

1. 正三角形のフェルマー点の証明

三角形ABCの内部に点Pをとり、点Bを中心として、点Cを60度回転させた点をDとする。このとき三角形BCDは正三角形となり、この三角形の内部に、三角形BPQが正三角形となるように点Qをとる。このとき、 $AP+BP+CP=AP+PQ+QD\geq AD$ となる。

等号が成り立つとき、Pはフェルマー点となる。このとき、 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$ となる。

2. 正方形のシュタイナー点の証明

正方形ABCDの内部に異なる2点P,Qをそれぞれ辺AB,CDの近くにとり、三角形ABE,CDFがそれぞれ正三角形となるように、点E,Fを正方形の外側にとる。次に、三角形APR,CQSが正三角形となるように点R,Sをとる。このとき $AP+BP+PQ+CQ+DQ=ER+RP+PQ+QS+SF\geq EF$

となる。等号が成り立つとき、点R,P,Q,Sは直線EF上にある。このとき、点P,Qの周りの角度は120度。

マスフェスタ当日はここに手書きの図がありました。

3. 実験方法

プラスチック板2枚と釘を用いて平行板を作成し、石けん水に浸し、できた膜を観察した。釘を頂点として、正三角形、正方形、正五角形、正六角形を作成した。

4. 実験結果

以下のような膜が観察できた。

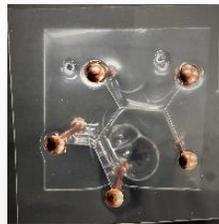
正三角形



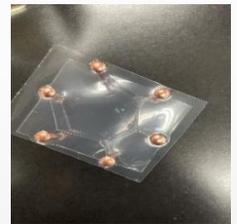
正四角形



正五角形



正六角形



5. 実験結果

発生した膜の形は、三角形におけるフェルマー点と各頂点を結んだ形、四角形におけるシュタイナー点と各頂点を結んだ形とよく似ていた。

このような膜が発生した原因について表面張力によって、膜は自身の表面積が最小となるように発生する。よって、膜として現れる線分は、図形の各頂点を結ぶ最短の線分だと考えられる。

6. 結論

四角形、五角形、六角形において、各頂点をつなぐ最短経路を発見し、可視化することができた。

社会生活の応用については、例えば発電所と送電についてが考えられる。主要都市へ送電する電線の長さが最小になるように発電所を建設することで、電力の損失を最も少なくすることができると考えられる。

ライフゲームにおける四則演算計算機の構築

所属：茨城県立並木中等教育学校 / Email : ft8128@gmail.com

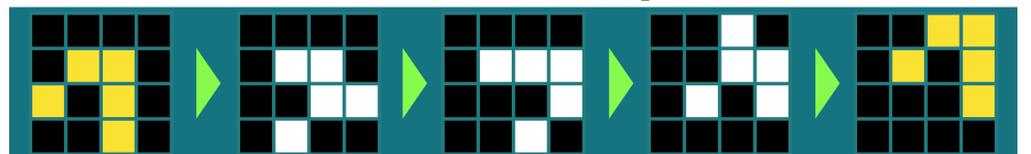
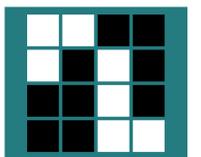
1. ライフゲームとは

- 四角形のセルによって仕切られた平面が無限に広がっている。
- 一つ一つのセルは「0」「1」のどちらかの状態をもつ。「1」は「生存」、「0」は「死滅」にそれぞれ喩えられる。
- 一つ一つのセルは、その周囲の8つのセルのある時間における状態によって、次の時間には下のように状態が変化する。
 - ・ 生きたセルの周囲に生きたセルが2つか3つあれば、次の世代でも生存する。
 - ・ 死んだセルの周囲に生きたセルが3つあれば、次の世代が誕生する。
 - ・ 周囲の生きたセルが1つ以下（過疎）または4つ以上（過密）のとき、死滅する。
- John Horton Conway氏が考案した「セル・オートマトン」の一種。

A (生) : 周囲に4つのセル -> 死滅
B (死) : 周囲に3つのセル -> 誕生
C (生) : 周囲に2つのセル -> 生存

周期的な動きをする「パターン」が多く見つかっている。

- 「飛行物体」 : 同じ動きを繰り返しながら一定方向へ移動し続けるパターン
「Glider」… 最も簡単な飛行物体の一種。4周期で斜めに1進む。
- 「振動子」 : ある場所に留まって同じ動きを繰り返すパターン
- 「固定物体」 : ある場所に留まって、全く動きを見せないパターン
「Eater」… 固定物体の一種。特定の方向から飛来したGliderを消滅させられる。
- 「繁殖型」 : 生きたセルを無限に増やし続けるパターン
「Glider Gun」… グライダーを連続して射出する。
Gosper氏が発見した30周期のものが有名。



2. 研究・開発の動機

- 以前から存在は知っていたものの、セル・オートマトンの一つとして基本的なことを押さえているに留まっていた。
- ニコニコ動画にて、ライフゲームの発展的な内容を紹介する動画（参考文献に記載）を発見した。

→ ライフゲーム上で「パターン」を組み合わせることで「論理演算」や「自己複製」などを実現できると知り、ライフゲームで機構を構築することに対して強く興味を持った。

- ライフゲームは「チューリング完全」という性質を持ち、理論上はどんな計算問題も解くことができる。
- 「二次元」セル・オートマトンに分類され、一次元や三次元のものに比べて、パターンの並び方から処理を推測しやすい。

→ ライフゲームは一定の計算をこなす「プログラミング言語」として有用なのではないか。

8. 参考文献

- 動画シリーズ「ライフゲームの世界」せがわ氏 : <https://www.nicovideo.jp/series/10101>
- 「LifeWiki」 (ライフゲームに関する情報サイト・コミュニティ) : <https://www.conwaylife.com/wiki>
- 「Building a computer in Conway's game of life」 : <https://www.nicolasloizeau.com/gol-computer>

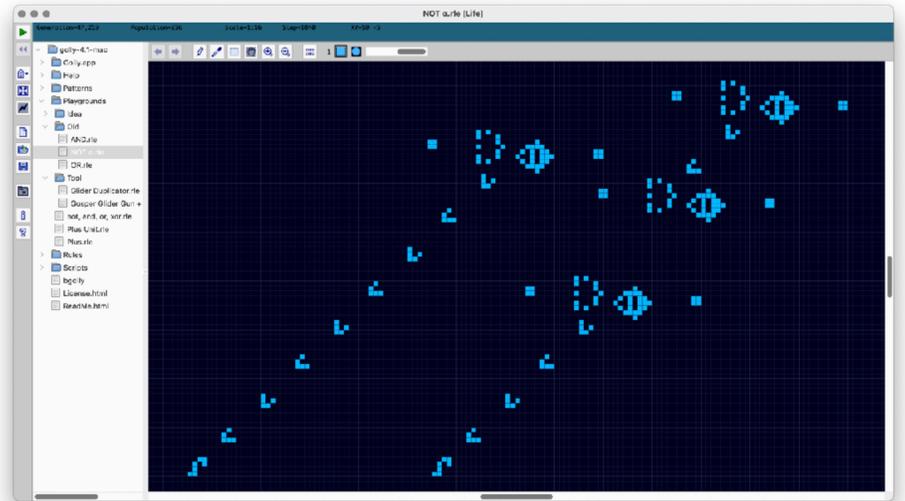
3. 開発の目的と方法

目的：

ライフゲームで**四則演算**ができる機構を作ること。

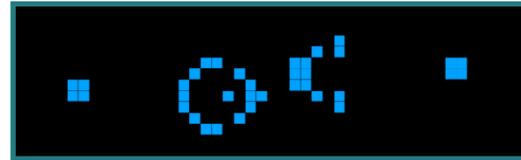
方法：

- 開発ツールには「**Golly**」を使用（右図）。
… ライフゲームをはじめ、多くの二次元セル・オートマトンの高速なシミュレーションに対応したアプリケーション。
- 2進数での計算のため、まず**論理ゲート**の作成を試みる。

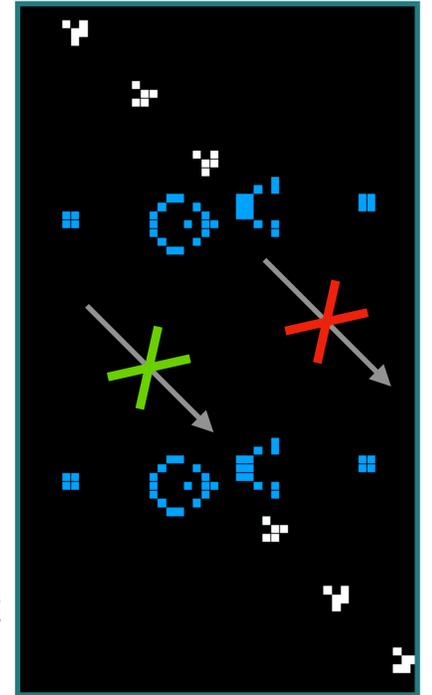


4. 具体的な方針・論理ゲートの作成

Gosper Glider Gun（右図）から連射される／されない Gliderの列を「**1**」と「**0**」の信号に見立て、
入力に応じて各論理ゲートの通りにより出力する機構を考える。



「Gosper Glider Gun」



I. NOTゲート

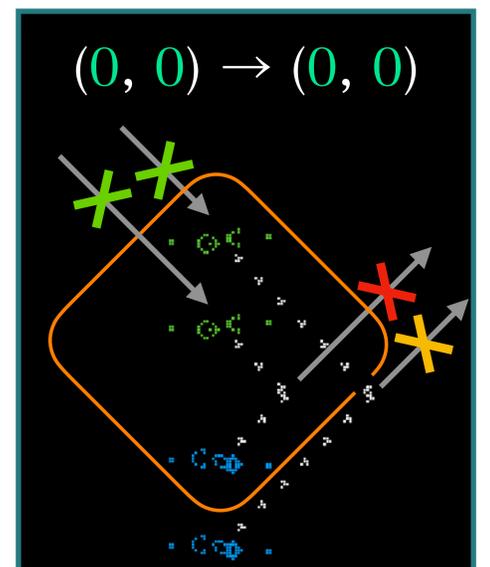
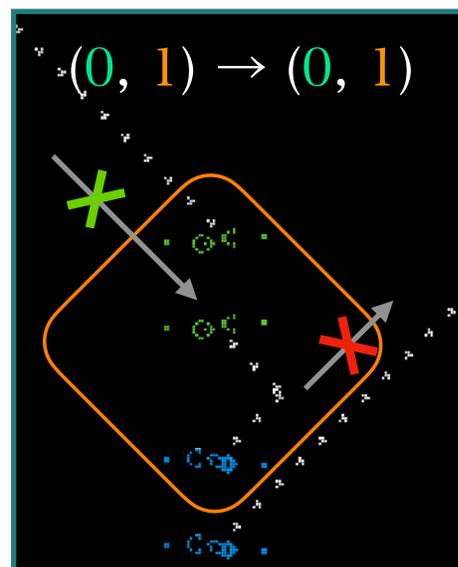
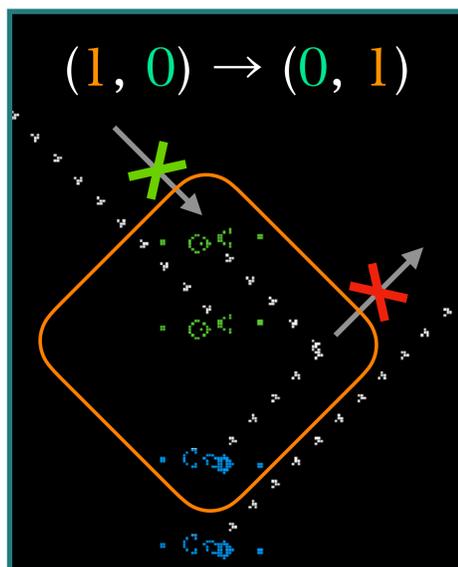
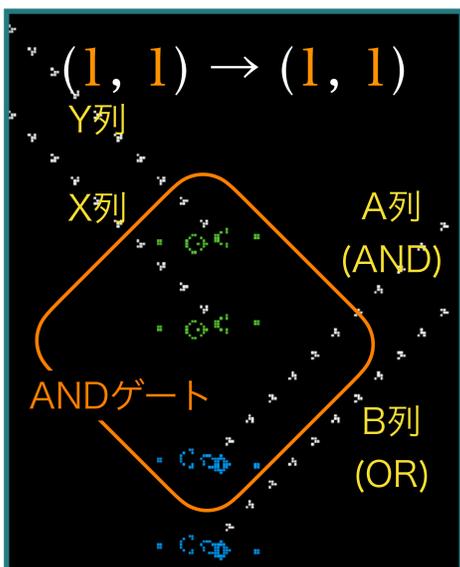
Gosper Glider Gunは、**反対側から入力**を受けるとGliderの**射出を中止する**という機能をもつ。
つまり、Gosper Glider Gunは**単体でNOTゲートとして活用**することができる。
このNOTゲートを用いて、その他の論理ゲートを構築したい。

II. AND・ORゲート

Gosper Glider Gunを二つ用意し、それぞれから射出されるGliderの列が垂直に交わるような配置にして動かしてみると、一定の位置関係のもとで、Gliderが**互いに衝突して消滅する**。

例えば、あるGliderの列「**A列**」に対し、2つの列「**X列**」「**Y列**」が垂直に交わるような配置になっている場合には、
両方の列が「**0**」、つまりGliderが流れていない状態でなければ、A列はXまたはY列に遮られ、先へ届かない。
X・Y列にNOTゲートを用意すれば、X・Y列ともに「**1**」のときのみA列も「**1**」となるように、**ANDゲート**が作られる。

さらに、X・Y列から見て、A列の向こうにもう一つ「**B列**」が流れているとする（下図）。
B列を遮るためには、X列が先にA列を遮って、残ったY列がB列と衝突する必要がある。
X・Y列のNOTゲートを考慮すると、この時X・Y列は両方「**0**」であり、それ以外では**B列**が先へ届くことになる。
この時、X・Y列の少なくとも一方が「**1**」ならば「**1**」を出力することから、B列は**ORゲート**を再現していると言える。
これは、X・Y列の信号の合計値を、**A列→B列の順に整列**させている、と捉えることもできる。詳しくは次に説明する。



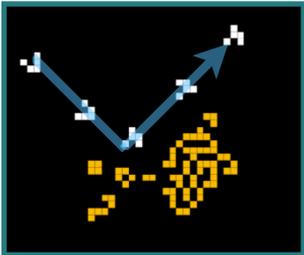
5. アルゴリズムの研究・制作した足し算機

- 四則演算の基本となる「**足し算**」を計算できる機構を、2進法で、前述の論理ゲートを活用して作成したい。
- 各桁について足し算を行う「**足し算ユニット**」をいくつも組み合わせて、大きな数を計算できる機構にすることを考える。

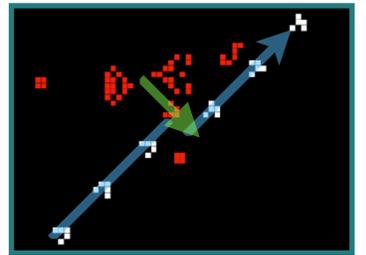
「足し算ユニット」に求められる計算

足し算ユニットは各桁について足し算をする。繰り上がりを考慮して、N番目の足し算ユニットの計算は次のようになる。

「**1つ目の数の後ろからN桁目**」「**2つ目の数の後ろからN桁目**」「**前の桁の繰り上がり**」の3つの「0」か「1」の値を足した答えを「**00**」～「**11**（10進法：3）」の2桁の数で表し、1桁目を**N桁目の繰り上がり**、2桁目を**N桁目の計算結果**として出力する。



- 「**Reflector**」… 飛来したGliderの列を**反射**して方向を変える（左図）。
- 「**Glider Duplicator**」… Gliderを**増殖**させ、別方向に新たな列を作る。構造としては、Gliderの向きを変え、NOTゲートで検知している。元々のGliderの**軌道をわずかにずらす**効果もある。



制作した足し算ユニット

| A / B / C | 繰上 / 出力 |
|-----------|---------|
| (0, 0, 0) | (0, 0) |
| (0, 0, 1) | (0, 1) |
| (0, 1, 1) | (1, 0) |
| (1, 1, 1) | (1, 1) |

出力

- X列（繰上）、Y列（数2）、Z列（数1）からの3つの出力を C列→B列→A列の順に**整列**させ、計算しやすくする。
- Glider Duplicatorを用いて、B列を左上に抽出し、そのまま**繰り上がりの桁として出力**する。
- AとBの値が一致しているか否かを調べる。
……整列させたものなので、A=1かつB=0は考えなくてよい。
「**A or not(B)**」が真ならば、A=Bである。
- Cと●の出力結果をANDゲートに通し、N桁目の計算結果として出力する。

6. 結果・考察

前述の足し算ユニットを5つ縦に繋げて、右のような「5bit足し算機」を作成した。実際に行なっている計算は、

$$\begin{aligned} & \text{「10001 (17) 」} + \text{「01011 (11) 」} \\ & = \text{「11100 (28) 」} \end{aligned}$$

である。

16、8、4の桁に「ON」の信号が流れており、**正しく計算されている**ことが分かる。

足し算ユニット一つの大きさは、**縦500セル**、**横600セル**に及び、およそ2430個ものセルが一つの足し算ユニットを構成している。

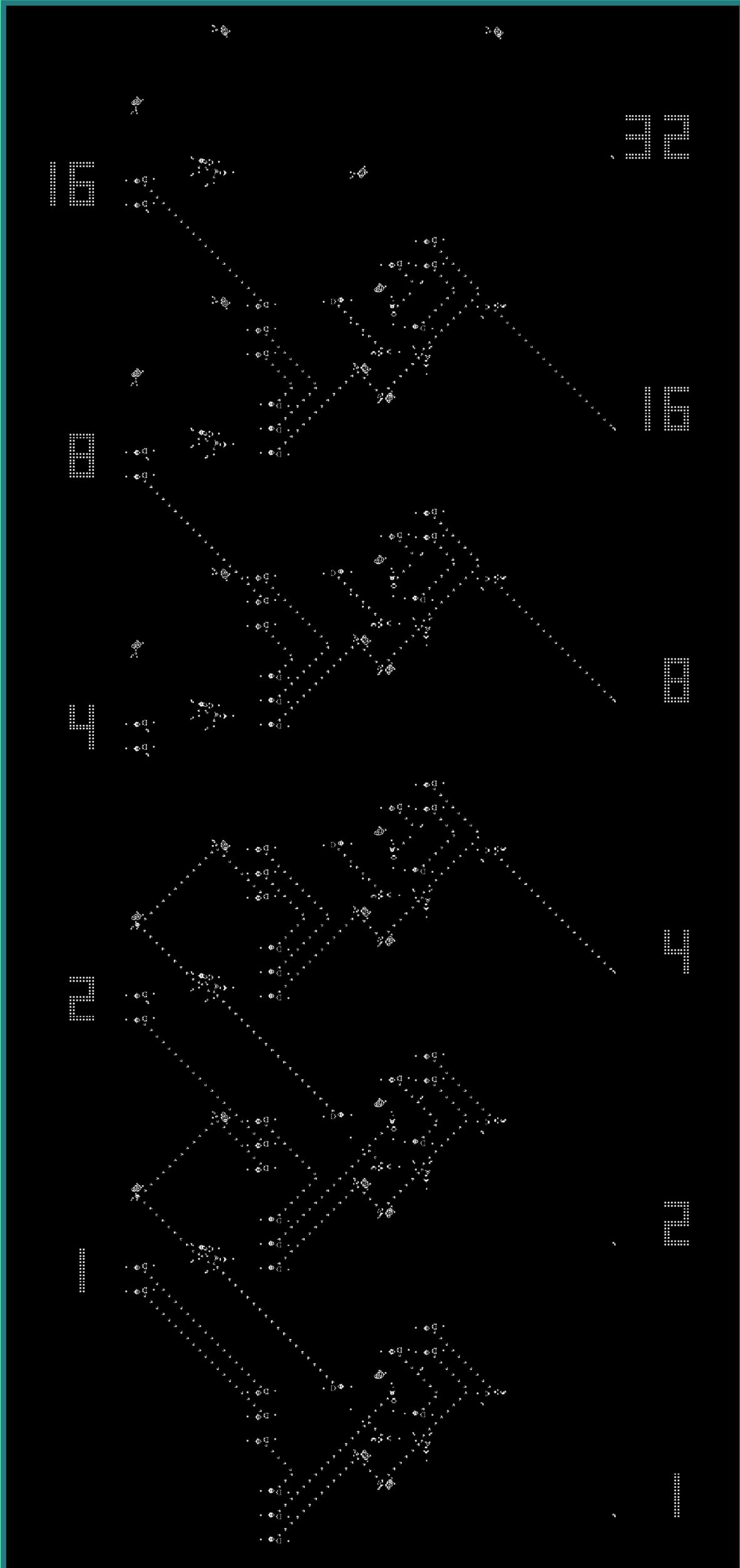
他の二次元セル・オートマトンには論理回路をより簡潔に表現しているものもあるが、ライフゲームでは一つのセルが取りうる状態が「生」「死」の**二つに限られ**、セルの持ちうる情報量が最も少ない。それゆえに、単純な演算のためにもこのように**巨大な装置**を制作する必要が発生するのだと考えられる。

7. 結論・今後の課題

Glider Gunから連射されるGliderの列を**信号**に見立て、向きを変えたり、遮らせたりするなどの基本的な仕組みから構想した**論理ゲート**を用いることで、ライフゲーム上に**足し算**を計算できる機構を構築することに成功した。

足し算機制作に時間がかかってしまい、現在までに**引き算**、**掛け算**、**割り算**にまで研究を敷衍させることは叶っていない。しかしながら、この研究に用いた技術を応用することで、これらの演算を含む四則演算をライフゲーム上に再現することが可能だと考えている。

研究・開発の動機で述べたように、ライフゲームはチューリング完全であり、入出力を適切に「**解釈**」することで理論上はどのような計算も可能とされる。ライフゲームの奥深い世界を知り、その中で既に自己複製をはじめとする様々な複雑な機構が考案されているので、それらの中から参考になるものを探しつつ、納得のいく四則演算機をライフゲームで作れるよう試行錯誤を重ねたい。



シュート時の最適角度を求める

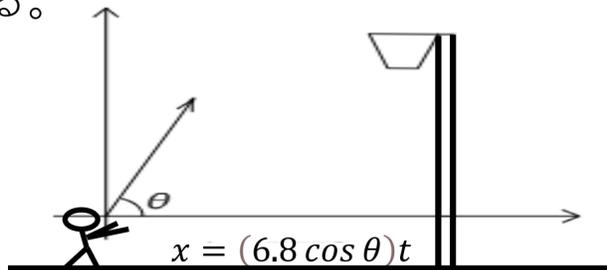
茗溪学園高等学校1年

動機

学校の体育の授業でうまくバスケットのシュートが入らなかったので計算で、シュートが入る最適な角度を求めたいと思った。

目的

ゴールポストまでの距離と最適角度のの関係を求める。



方法

シュートが入るのに必要な高さは3.15m(ゴールポストの高さ3.05m+ボールの半径10cm)とする。地面から150cmの高さからシュートを打つとし、シュートを打つ位置を変えていき、ゴールまでの距離ごとに打ち出しの角度を求めた。

結果

自分の初速度を求めるために、150cmの高さから真上にボールを投げ到達した高さを求めた。結果は、3.85mであった。よって、到達距離は $h=3.85-1.5=2.35\text{m}$ 。

ボールが頂点に来たときは速度 0 なので、初速度を $a \text{ m/s}$ とすると

$$a - gt = 0 \quad (g \text{ は重力加速度 } 9.8 \text{ とする})$$

$$\text{この時 } t = \frac{a}{g}$$

$$\text{到達距離 } h = at - \frac{1}{2}gt^2$$

これに代入すると

$$h = \frac{a^2}{2g} \quad a = \sqrt{46.06} \approx 6.8$$

この式から初速度を求め斜方投射の公式を使い $\tan \theta$ の二次関数にし値を求めた。

x 方向と y 方向にわけそれぞれの座標を求めた。

$$x = (6.8 \cos \theta)t \dots \textcircled{1}$$

$$y = (6.8 \sin \theta)t - 4.9t^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta + 1, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

をもちいて、 t を消去して、 $\tan \theta$ について式を整理する。

y は頭からゴールポストまでの距離1.55m (ゴールポストの高さ3.15m-身長1.50m)で計算

x の距離を0.5mずつ増加させた。①を②に代入すると、

$$1.55 = 6.8 \sin \theta \frac{x}{6.8 \cos \theta} - \frac{4.9x^2}{6.8^2 \cos^2 \theta}$$

$$1.55 = x \tan \theta - \frac{4.9x^2}{6.8^2} (1 + \tan^2 \theta)$$

ここで $\frac{4.9}{6.8^2} = a$ 、 $1.55 = b$ とおく

$\tan \theta$ について整理すると

$$(ax^2) \tan^2 \theta - x \tan \theta + (b + ax^2) = 0$$

解の公式を用いて

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4ax^2(b + ax^2)}}{2ax^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a(b + ax^2)}}{2ax} \end{aligned}$$

角度が大きい方をとるので

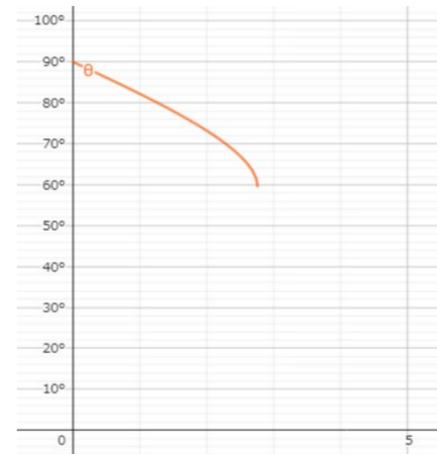
$$\tan \theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a(b + ax^2)}}{2ax}$$

計算した結果は下表のとおりで、右図はそれをグラフにしたものである。

表

| x(m) | θ (角度) |
|------|---------------|
| 0.5 | 86.15 |
| 1.0 | 82.19 |
| 1.5 | 77.97 |
| 2.0 | 73.20 |
| 2.5 | 67.02 |
| 2.76 | 60.38 |

グラフ(Geogebra で作成)



私の初速度でゴールポストに届く限界は $1 - 4a(b + ax^2) > 0$ より、

$x < \sqrt{\frac{1-4ab}{2a}} = 2.76334\text{m}$ 、以上が私の初速度での限界距離であった。

ゴールの端(28m)からでもシュートが入るようにするためには、

$$\frac{\sqrt{1-4 \times 1.55a}}{2a} = 28 \text{ より、 } a=0.016896$$

この時の初速度は、 $\sqrt{\frac{4.9}{0.016896}} = 17.0297\text{m/s}$

コートからゴールポストまで1.644秒で届く速さでシュートする必要があることが分かった。

真上に投げた場合は、14.7 m に達することもわかった。

参考文献

KIT物理ナビゲーション「鉛直投げ上げ」

https://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/high-school_index/mechanics/motion/henkan-text.cgi?target=/math/physics/high-school_index/mechanics/motion/vertical_throwup.html

分かりやすい高校物理の部屋「等加速度直線運動」

<http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/p/mech/henni/toukasokudo.html>

高校物理をあきらめる前に「斜方投射」

<https://www.yukimura-physics.com/entry/dyn03>

正多角形による円の近似

作新学院高等学校

1. 概要

方程式

$$|x + |x|| + |x - |x|| + |y + |y|| + |y - |y|| = r \quad (r \text{は正の実数})$$

座標平面上の原点に重心を置き、 $(\frac{r}{2}, 0)$ を通る正方形を表す式。

この方程式に関心を持ち、他の正多角形を表す式について考察した。

方針①では極方程式を用いて正多角形を表す方程式を導いた。

方針②では絶対値を用いて座標平面上に正多角形を表す方程式を導いた。

さらに、双方の方針において円の近似を行った。

さらに、双方の方針において円の近似を行った。

2. 方針① 極方程式による導出

正三角形の表示

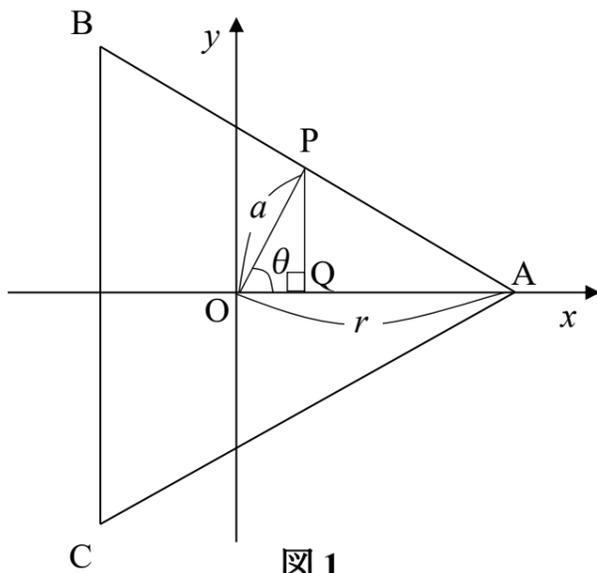


図1

正三角形の重心を原点 O におき、 $OA=r$ とおく。

正三角形において辺 AB 上のある1点を P とおき、 $OP=a$ とおく。

また、 $\angle POA = \theta$ とする。

このとき、 r を θ で表す。

P から x 軸へ垂線の足 Q をおろす。

$$OQ = a \cos \theta, \quad PQ = a \sin \theta, \quad \angle PAQ = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \angle PAQ = \frac{PQ}{QA}$$

$$QA = \frac{PQ}{\tan \angle PAQ}$$

$$= \sqrt{3} a \sin \theta$$

$$\therefore r = a \cos \theta + \sqrt{3} a \sin \theta = 2a \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$$

a について解くと、

$$a = \frac{r}{2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})}$$

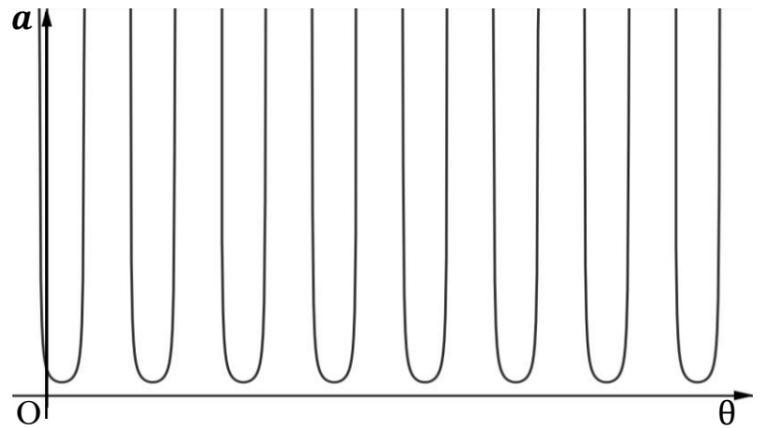


図2

図2は、この等式を座標平面上に表したものである。

このグラフを $\frac{2}{3}\pi$ 周期になるように、ガウス記号を用いて表す。

正三角形を表す式

$$a = \frac{r}{2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi \left[\frac{3\theta}{2\pi} \right])}$$

一般化

正三角形と同様に考える。

$$\alpha = \theta - \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right], \quad \beta = \frac{n-2}{2n}\pi$$

とすると、

$$r = \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta} + a \cos \alpha$$

$$a = \frac{r}{\frac{\sin \alpha}{\tan \beta} + \cos \alpha} = \frac{r \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$ より、

$$a = \frac{r \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

正 n 角形を表す一般式

$$a = \frac{r \sin(\frac{n-2}{2n}\pi)}{\sin(\theta + \frac{n-2}{2n}\pi - \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right])}$$

円への近似

$$\frac{n\theta}{2\pi} - 1 < \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right] \leq \frac{n\theta}{2\pi}$$

$$\theta - \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} \left(\frac{n\theta}{2\pi} - 1 \right) < \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right] \leq \frac{2\pi}{n} \left(\frac{n\theta}{2\pi} \right) = \theta$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\theta - \frac{2\pi}{n} \right) = \theta$ より、はさみうちの原理を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \left[\frac{n\theta}{2\pi} \right] = \theta$$

以上から、 a についての n を無限に近づけると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r \sin\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)} = r$$

n を無限大に近づけたとき、 $a=r$ となるので、

正 n 角形は円に近似できる。

3. 方針② 絶対値による導出

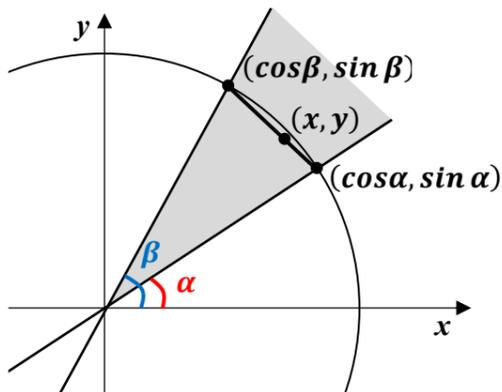


図 3

座標平面上において半径が 1 の単位円に内接する正 n 角形について考える。

座標 $(1,0)$ を正 n 角形の 1 番目の頂点とし、 k 番目と $k+1$ 番目の頂点を考える。 (n, k) は自然数

$$\alpha = \frac{2(k-1)}{n}\pi, \quad \beta = \frac{2k}{n}\pi$$

とする。

k 番目の頂点と、 $k+1$ 番目の頂点はそれぞれ、

$$(\cos\alpha, \sin\alpha), (\cos\beta, \sin\beta)$$

と表せる。

原点と k 番目の頂点、原点と $k+1$ 番目の頂点を通る直線の方程式はそれぞれ、

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x, \quad y = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}x$$

と表せる。

さらに k 番目の頂点と $k+1$ 番目の頂点を通る直線 l は、

$$l: y - \sin\beta = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}(x - \cos\beta)$$

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}(x - \cos\beta) - y + \sin\beta = 0$$

ここで直線 l 上の任意の点を (x, y) として、

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x \leq y \leq \frac{\sin\beta}{\cos\beta}x$$

の範囲を考える。

不等式を変形して、

$$x \sin\alpha \leq y \cos\alpha$$

$$y \cos\beta \leq x \sin\beta$$

$$f(x, y) = y \cos\alpha - x \sin\alpha$$

$$g(x, y) = y \cos\beta - x \sin\beta$$

図 1 の領域内では、

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geq 0, \quad g(x, y) \leq 0 \\ |f(x, y)| + f(x, y) &= 2f(x, y) \\ |g(x, y)| - g(x, y) &= -2g(x, y) \end{aligned}$$

領域外では、

$$f(x, y) \leq 0, \quad g(x, y) \geq 0$$

$$|f(x, y)| + f(x, y) = 0$$

$$|g(x, y)| - g(x, y) = 0$$

となる、

l と $|f(x, y)| + f(x, y)$, $|g(x, y)| - g(x, y)$ を考える。

正 n 角形を表す一般式 (第 1 象限)

$$\sum_{k=1}^n \{|f(x, y)| + f(x, y)\} \{|g(x, y)| - g(x, y)\} \left\{ \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} (x - \cos\beta) - y + \sin\beta \right\} = 0$$

円への近似

単位円上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を考える。

領域外の場合、

$$|f(x, y)| + f(x, y) = 0$$

$$|g(x, y)| - g(x, y) = 0$$

また、領域内の場合、

$$|f(x, y)| + f(x, y) \neq 0$$

$$|g(x, y)| - g(x, y) \neq 0$$

が成立。

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} (x - \cos\beta) - y + \sin\beta$$

について考える。

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

を代入。

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} (\cos\theta - \cos\beta) - \sin\theta + \sin\beta$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow \alpha, \beta$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\theta = \cos\alpha = \cos\beta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\theta = \sin\alpha = \sin\beta$$

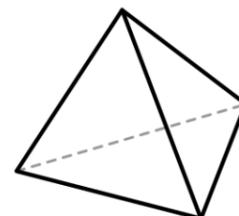
したがって、

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} (\cos\theta - \cos\beta) - \sin\theta + \sin\beta = 0$$

$\therefore (\cos\theta, \sin\theta)$ は、 l 上の点である。

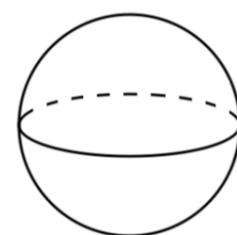
4. 今後の展望

・方針①では座標平面上に正 n 角形を表すことができ、さらに円への近似にも成功したため、今後は空間座標において正多面体を表し、球への近似を試みたい。



正多面体の例

・方針②では領域を区切る直線が消去できず、また、 y 軸にその直線が重なる時領域が定まらなくなるので解決方法を模索したい。



球

自己相似をもつ数列と拡張したコラッツ予想への応用

市川高等学校 2年

1. m - La suite du lézard (自己相似をもつ数列)

Definition

以下の性質を満たす数列 $\{a_n\}$ を m - La suite du lézard という。

- ・数列 $\{a_n\}$ から m の倍数番目の項を取り出してできる数列 $\{b_n\}$ が $\{a_n\}$ と一致する。
- ・残った項でできる数列 $\{c_n\}$ が $\{a_n\}$ と一致する。

生成式

$$\begin{cases} a_n = a_{\frac{n}{m}} & (n \equiv 0 \pmod{m}) \\ a_n = a_{n - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor} & (n \equiv k \pmod{m}) \end{cases}$$

ただし, $1 \leq k \leq m - 1$

→ 初項から第 $(m - 1)$ 項までを決めると m - La suite du lézard は 1 つに定まる。

例) 3 - La suite du lézard

初項が 1, 第 2 項が 2 のとき

$$\begin{aligned} \{a_n\} &: 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots \\ \text{取り出すと} & \begin{cases} 1, & 2, & 1, & 1, \dots \\ 1, 2, & 1, 1, & 1, 2, & 1, 2, \dots \end{cases} \\ \text{圧縮して} & \begin{cases} \{b_n\} : 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots \\ \{c_n\} : 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

4 - La suite du lézard

初項が 2, 第 2 項が 7, 第 3 項が 5 のとき

$$\begin{aligned} \{a_n\} &: 2, 7, 5, 2, 2, 2, 2, 7, 2, 7, 2, 5, 7, 2, 5, 2, \dots \\ \text{取り出すと} & \begin{cases} 2, & 7, & 5, & 2, \dots \\ 2, 7, 5, & 2, 2, 2, & 2, 7, 2, & 7, 2, 5, \dots \end{cases} \\ \text{圧縮して} & \begin{cases} \{b_n\} : 2, 7, 5, 2, 2, 2, 2, 7, 2, 7, 2, 5, 7, 2, 5, 2, \dots \\ \{c_n\} : 2, 7, 5, 2, 2, 2, 2, 7, 2, 7, 2, 5, 7, 2, 5, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

2. コラッツ予想と類似問題

Definition

自然数 n に対して, ある操作を繰り返したときに数の循環が起こるとする。この循環を, 循環の中に現れる最小の数 p_n を用いて, n に対する p_n の循環と呼ぶ。

コラッツ予想

自然数 n に対して, 以下の操作を繰り返すと必ず 1 の循環 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) が起こる。

$$\begin{cases} \frac{n}{2} & (n \equiv 0 \pmod{2}) \\ 3n + 1 & (n \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

拡張したコラッツ予想

$$\begin{cases} \frac{n}{m} & (n \equiv 0 \pmod{m}) \\ (m + 1)n + m - k & (n \equiv k \pmod{m}) \end{cases}$$

ただし, $1 \leq k \leq m - 1$

例) $m = 3$ のとき

$$\begin{cases} \frac{n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ 4n + 2 & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ 4n + 1 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

コラッツ予想の類似問題

$$\begin{cases} \frac{n}{m} & (n \equiv 0 \pmod{m}) \\ (m - 1)n + k & (n \equiv k \pmod{m}) \end{cases}$$

ただし, $1 \leq k \leq m - 1$

例) $m = 3$ のとき

$$\begin{cases} \frac{n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ 2n + 1 & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ 2n + 2 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

3. 結果

コラッツ予想の類似問題 ($m = 3$ のとき)

$$\begin{cases} \frac{n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ 2n + 1 & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ 2n + 2 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots & \quad 1 \text{ の循環} & (p_1 \text{ の循環}) \\ 2 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow \dots & \quad 2 \text{ の循環} & (p_2 \text{ の循環}) \\ 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots & \quad 1 \text{ の循環} & (p_3 \text{ の循環}) \\ 4 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots & \quad 1 \text{ の循環} & (p_4 \text{ の循環}) \\ & \vdots & \end{aligned}$$

$$\{p_n\} : 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots \quad \dots (*)$$

これが 3 - La suite de lézard と対応する。

< (*) の証明 >

$$\begin{cases} n \rightarrow \frac{n}{3} \rightarrow \dots & (n \equiv 0 \pmod{3}) & \Rightarrow p_n = p_{\frac{n}{3}} \\ n \rightarrow 2n + k \rightarrow \frac{2n + k}{3} \rightarrow \dots & (n \equiv k \pmod{3}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{2n + k}{3} &= n - \frac{n - k}{3} \quad (k = 1, 2) \\ &= n - \left\lfloor \frac{n - k + k}{3} \right\rfloor \\ &= n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & \Rightarrow p_n = p_{n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \end{aligned}$$

より 3 - La suite du lézard の生成式と一致する。また, 循環が 1 の循環と 2 の循環の二種類しか出てこないこともわかる。同様に, 一般的にコラッツ予想の類似問題における数列 $\{p_n\}$ は m - La suite du lézard と一致することが示せる。

拡張したコラッツ予想 ($m = 3$ のとき)

$$\begin{cases} \frac{n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ 4n + 2 & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ 4n + 1 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

1000以下の n を調べたところ2つの循環しか見つかっていない。

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \quad 7 \rightarrow 30 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow 21 \rightarrow 7$$

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 起こる循環 (p_n) | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 7 | 7 | 1 | 7 | 7 |

$$\{p_n\} : 1, 1, 1, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, 7, 1, 1, \dots$$

< $p_i = p_j$ となる i と j の関係性を調べる>

自然数の数列に対して、3 で割る操作が一回行われるまで拡張したコラッツ予想の操作をする

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots \textcircled{1}$$

$$2, 3, 1, 6, 7, 2, 10, 11, 3, 14, 15, 4, 18, 19, 5, 22, 23, \dots \textcircled{2}$$

p_4 と p_6 は同じ。

②を3の倍数番目とそれ以外に分けると

$$\begin{cases} 2, 3, & 6, 7, & 10, 11, & 14, 15, & 18, 19, & 22, 23, \dots \\ & \underline{1}, & \underline{2}, & \underline{3}, & \underline{4}, & \underline{5}, & \dots \end{cases}$$

下線部の数字は上の段に出てくるので考えない。

<② → ①を考えると>

1. $j \equiv 2, 3 \pmod{4}$ のとき (上の段)

$$\frac{4i + k}{3} = j \Leftrightarrow i = \frac{3j - k}{4} \quad (k = 1, 2)$$

2. $j \equiv 1 \pmod{4}$ のとき (赤文字)

3倍すると $3j \equiv 3 \pmod{4}$ となるので

$$\frac{4i + 1}{3} = 3j \Leftrightarrow i = \frac{9j - 1}{4}$$

3. $j \equiv 0 \pmod{4}$ のとき (緑文字)

3倍しても $3j \equiv 0 \pmod{4}$ となるので考えられない。

よって $p_i = p_j$ となる i と j の関係式は次のようになる。

$$i = \begin{cases} \frac{9j - 1}{4} & (j \equiv 1 \pmod{4}) \\ \frac{3j - 2}{4} & (j \equiv 2 \pmod{4}) \\ \frac{3j - 1}{4} & (j \equiv 3 \pmod{4}) \\ ??? & (j \equiv 0 \pmod{4}) \end{cases}$$

定理 . 1

数列 $\{p_n\}$ から3の倍数番目の項を取り出してできる数列 $\{q_n\}$ が $\{p_n\}$ と一致する。

$$\{p_n\} : 1, 1, 1, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, 7, 1, 1, 7, 7, \dots$$

$$\{q_n\} : 1, 1, 1, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, 7, 1, 1, 7, 7, \dots$$

定理 . 2

(I) 数列 $\{p_n\}$ から $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ を満たす第 n 項を取り出してできる数列 $\{r_n\}$ が, $\{p_n\}$ から3の倍数番目以外を取り出した数列 $\{s_n\}$ と一致する。

$$\{p_n\} : 1, \underline{1}, \underline{1}, 1, 7, \underline{1}, \underline{7}, 7, 1, \underline{7}, \underline{7}, 1, 1, \underline{7}, \underline{7}, \dots \text{ (赤い部分が } \{r_n\} \text{)}$$

$$\{p_n\} : \underline{1}, \underline{1}, 1, \underline{1}, \underline{7}, 1, \underline{7}, \underline{7}, 1, \underline{7}, \underline{7}, 1, \underline{1}, \underline{7}, 7, \dots \text{ (赤い部分が } \{s_n\} \text{)}$$

(II) 数列 $\{p_n\}$ から $n \equiv 1 \pmod{4}$ を満たす第 n 項を取り出してできる数列は, $\{p_n\}$ から $m \equiv 2 \pmod{9}$ を満たす第 m 項を取り出した数列と一致する。

$$\{p_n\} : 1, 1, 1, 1, \underline{7}, 1, 7, 7, \underline{1}, 7, 7, 1, \underline{1}, 7, 7, \dots$$

$$\{p_n\} : 1, 1, \underline{1}, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, 7, 1, \underline{1}, 7, 7, \dots$$

$$\{p_n\} : 1, \underline{1}, 1, 1, 7, 1, 7, 7, 1, 7, \underline{7}, 1, 1, 7, 7, \dots$$

一般的に $(\text{mod } m + 1)$ で考えると数列 $\{p_n\}$ は $n \equiv 0 \pmod{m + 1}$ を満たす第 n 項を除いて部分的に自己相似をもつと予想できる。

例) $m = 6$ のとき

n が1000以下のとき循環の種類は 1, 23, 88

$$\begin{aligned} & \underline{1} \rightarrow \underline{12} \rightarrow 2 \rightarrow \underline{18} \rightarrow 3 \rightarrow \underline{24} \rightarrow 4 \rightarrow \underline{30} \rightarrow 5 \rightarrow \underline{36} \rightarrow \underline{6} \rightarrow \underline{1} \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow 7 \rightarrow \underline{54} \rightarrow 9 \rightarrow \underline{66} \rightarrow \dots \rightarrow 19 \rightarrow \underline{138} \rightarrow \underline{23} \rightarrow \underline{162} \rightarrow \underline{27} \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow \dots \rightarrow \underline{828} \rightarrow \underline{138} \rightarrow \underline{23} \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow 49 \rightarrow \underline{348} \rightarrow 58 \rightarrow \underline{408} \rightarrow \dots \rightarrow 3168 \rightarrow 528 \rightarrow \underline{88} \rightarrow \underline{618} \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow \dots \rightarrow \underline{103} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{3168} \rightarrow \underline{528} \rightarrow \underline{88} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

自然数 n に対して、6 で割る操作が一回行われるまで拡張したコラッツ予想の操作すると

$$1, 2, 3, 4, 5, \underline{6}, 7, 8, 9, 10, 11, \underline{12}, 13, 14, 15, 16, 17, \underline{18}, 19, 20, \dots$$

$$2, 3, 4, 5, 6, \underline{1}, 9, 10, 11, 12, 13, \underline{2}, 16, 17, 18, 19, 20, \underline{3}, 23, 24, \dots$$

実際に数列 $\{p_n\}$ をかきならべると

$$\begin{aligned} & \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \dots \\ & \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{23}, \underline{1}, \dots \end{aligned}$$

循環の種類 ($n \leq 1000$)

- $m = 2, 5, 7, 8$ のとき 1の循環のみ
 - $m = 3$ のとき 1の循環、7の循環
 - $m = 4$ のとき 1の循環、23の循環
 - $m = 6$ のとき 1の循環、23の循環、88の循環
- 規則性は見つからない

4. まとめ

• コラッツ予想の類似問題における数列 $\{p_n\}$ は m - La suite du lézard の性質をもち、それに現れる循環は $1 \sim (m - 1)$ の $(m - 1)$ 個だとわかった。

• 拡張したコラッツ予想に見られる自己相似は $(\text{mod } m + 1)$ で考えると $n \equiv 0 \pmod{m + 1}$ を満たす第 n 項を除いて自己相似をもつと予想できる。

• 循環の種類に関しては、何の循環が出てくるのか、また循環が何個出てくるのかも不規則だった。

5. 参考文献

オンライン整数列大辞典 <https://oeis.org/A117943>
<https://oeis.org/A178931>

La suite du lézard et autres inventions - cinquante signes

<http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/LezardPLS.pdf>

折り紙で作る面積最大の正多角形

横浜サイエンスフロンティア高等学校

はじめに

コンパスと定規での作図と折り紙での作図

折り紙ではより多くの種類の正多角形が作図できる

なるべく大きい正多角形の紙を使って作品を折りたい



目的

正方形の折り紙の内部で折り目が図形の辺になり面積が最大になる正多角形の折り方を研究する。

結論



面積が最大となるように正三角形、正五角形、正六角形、正七角形、正八角形を折ることができた。

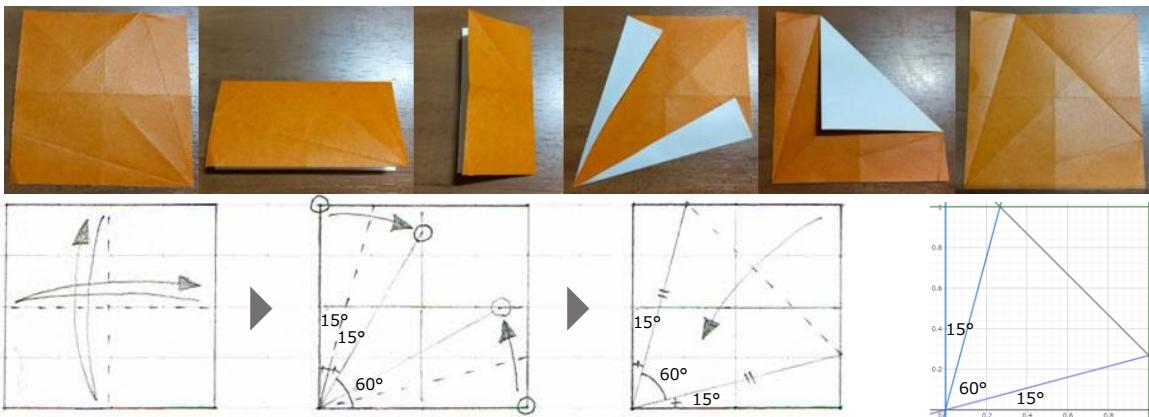
研究方法

正方形の内部に収まる正多角形の面積の最大条件を調べる。
正方形の折り紙から作るときの折り方を考え、折った回数を記録する。
折る回数をなるべく少なくし、折り目がずれにくく正確になる方法を考察する。

結果

正方形の各辺上に正多角形の頂点がある

正三角形 折る回数:5回 補助線2回+辺3回



正方形の一辺の長さを1
正三角形の一辺の長さを a とする
水平方向との傾きの角度を θ_1 と置く
 $0^\circ \leq \theta_1 \leq 30^\circ$ の範囲で

$$a \cos \theta_1 = a \sin(\theta_1 + 60^\circ)$$

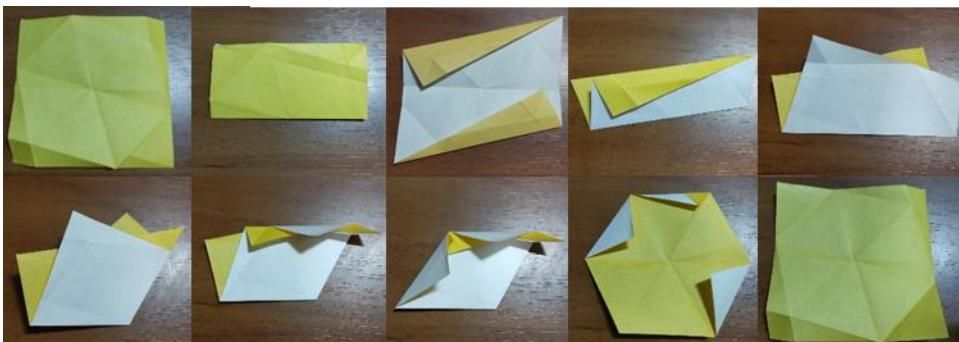
$$\theta_1 = 15^\circ$$

$$a = \frac{1}{\cos \theta_1} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

a は正三角形の一辺:正方形の一辺の比の値

正三角形が正方形に内接

正六角形 折る回数:7回 補助線5回+辺2回



正方形の一辺の長さを1
正六角形の一辺の長さを b とする
水平方向との傾きの角度を θ_2 と置く
 $0^\circ \leq \theta_2 \leq 30^\circ$ の範囲で

$$2b \cos \theta_2 = 2b \sin(\theta_2 + 60^\circ)$$

$$\theta_2 = 15^\circ$$

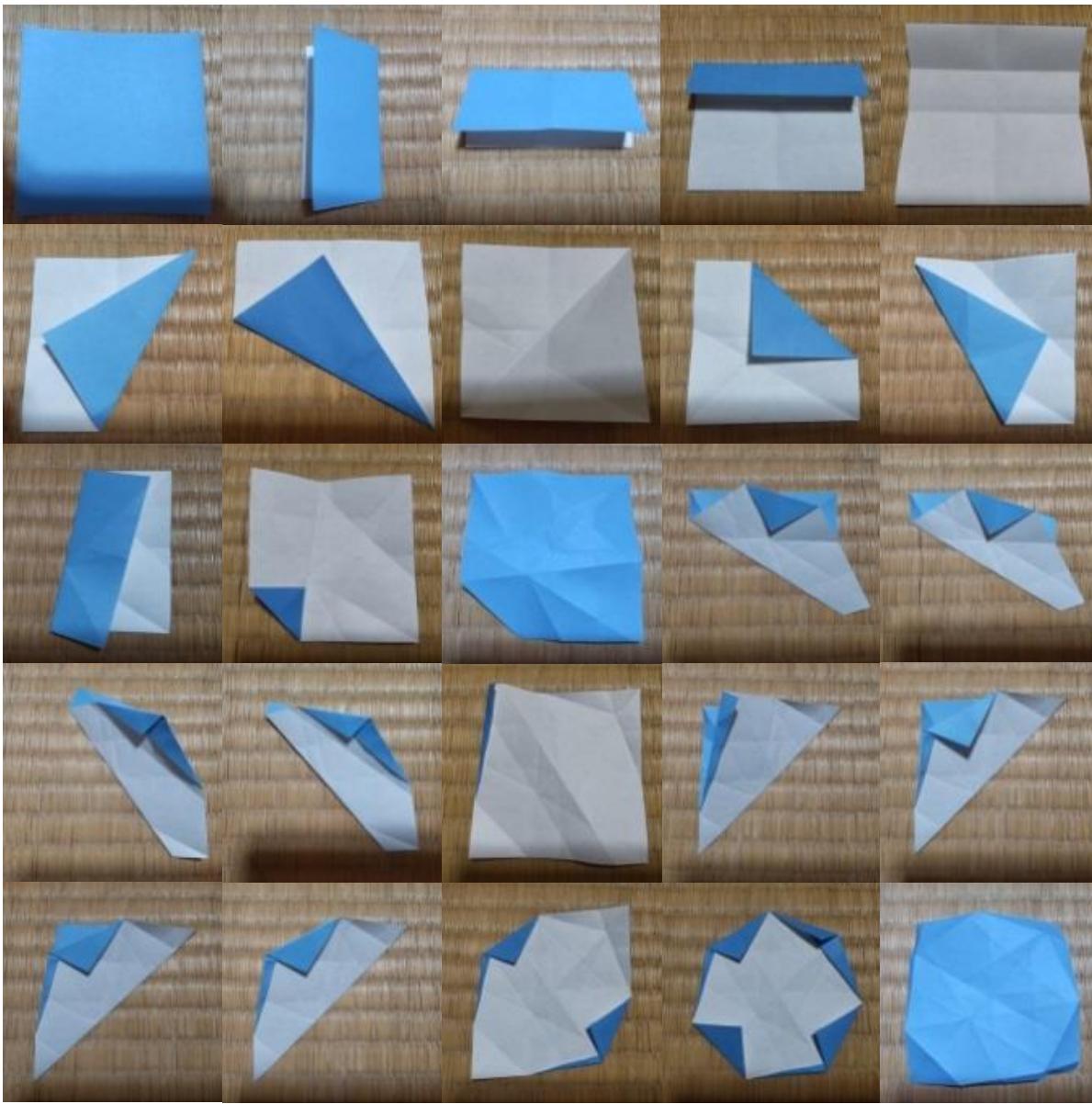
$$b = \frac{1}{2 \cos \theta_2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

b は正六角形の一辺:正方形の一辺の比の値

正方形の対角線上に最長対角線がある正六角形

結果

正七角形 折る回数:19回 補助線12回+辺7回



正方形の一边の長さを1
 正七角形の一辺の長さを d とする
 $2L \cos \frac{3}{7}\pi = 1$ と定義すると
 L は一辺が1の正七角形の長い方の対角線の長さ
 水平方向との傾きの角度を θ_4 と置く
 $0 \leq \theta_4 \leq \frac{\pi}{14}$ の範囲で

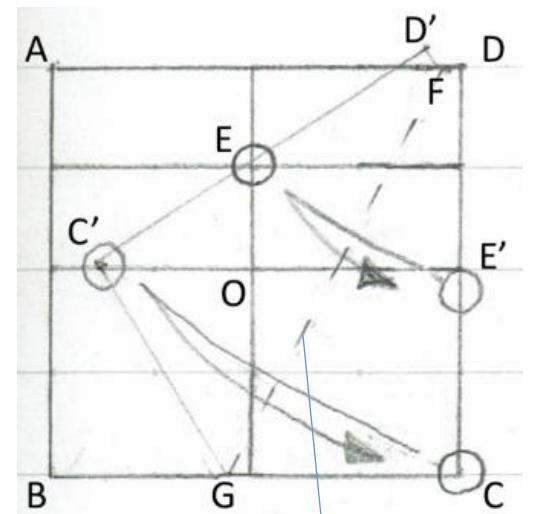
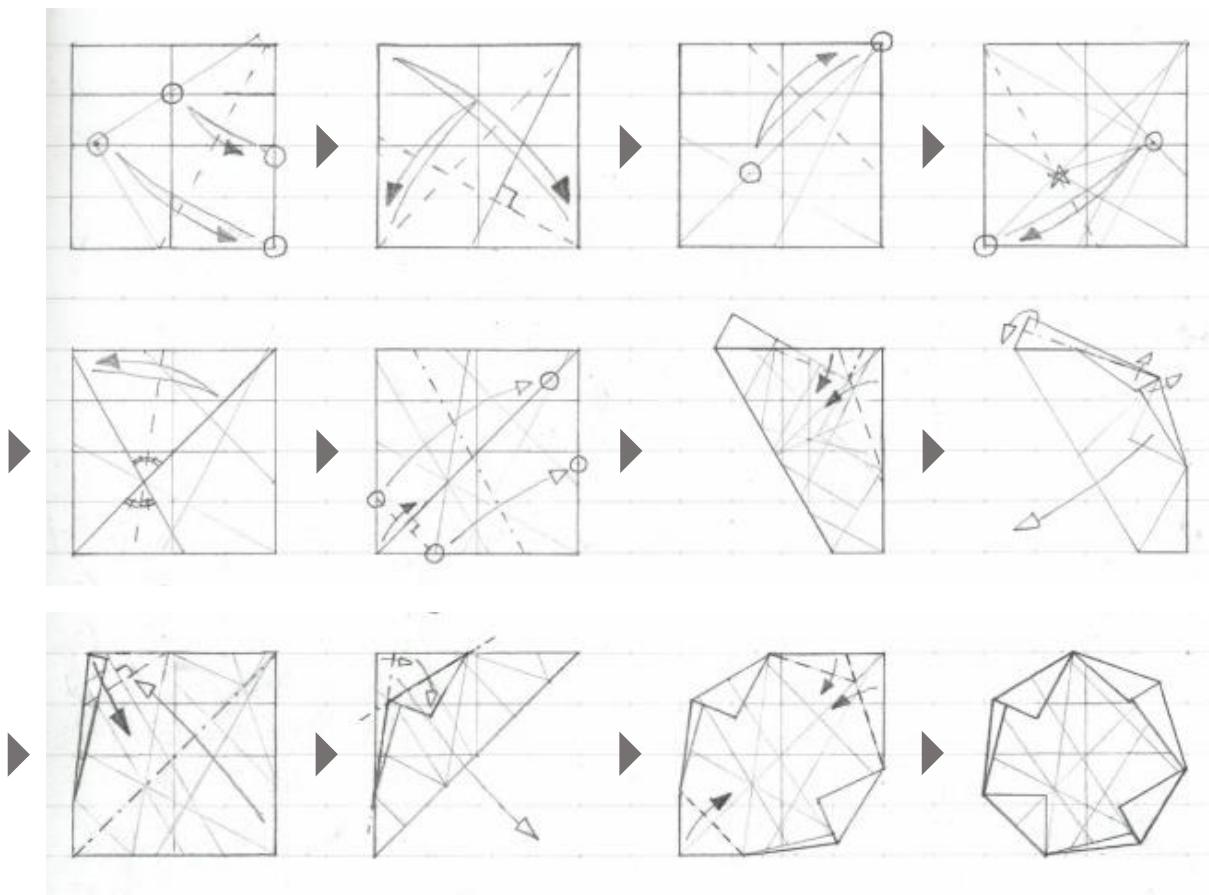
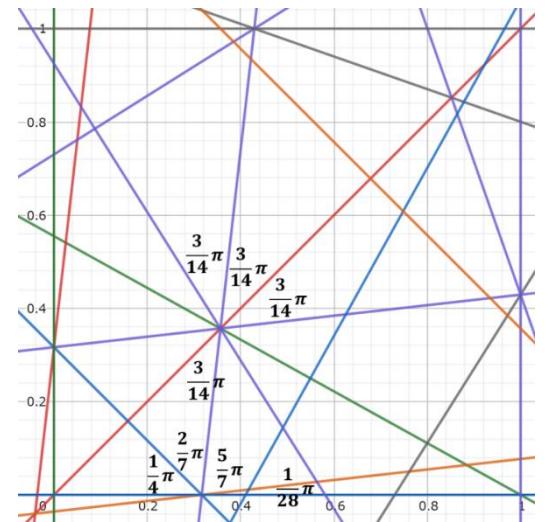
$$dL \cos \theta_4 = dL \sin \left(\theta_4 + \frac{3}{7}\pi \right)$$

$$\theta_4 = \frac{\pi}{28}$$

$$d = \frac{1}{L \cos \theta_4} \approx 0.448$$

d は正七角形の一辺:正方形の一辺の比の値

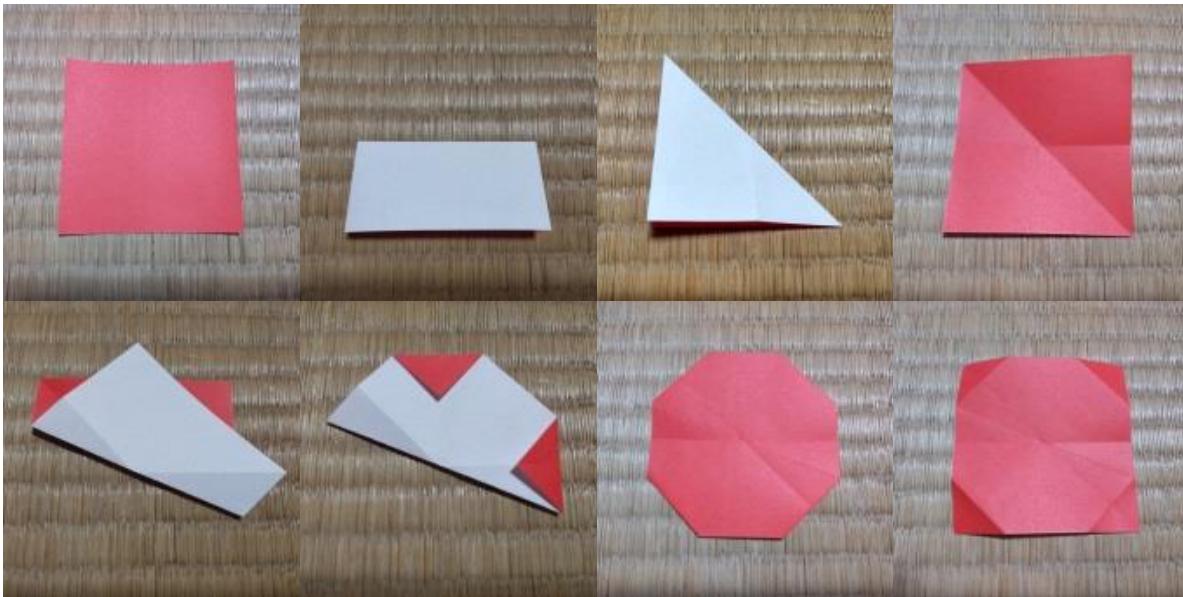
正七角形のある一辺の垂直二等分線が正方形の対角線に一致



傾き $2 \cos \frac{1}{7}\pi$

結果

正八角形 折る回数:7回 補助線3回+辺4回

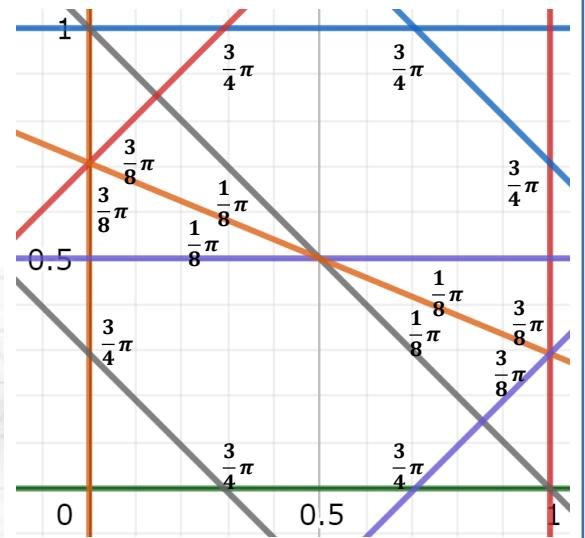
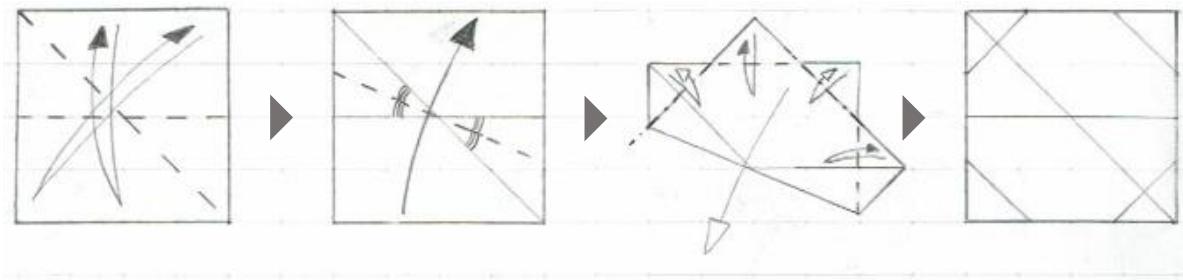


正方形の一边の長さを1
正八角形の一辺の長さを e とする

$$e = \tan \frac{\pi}{8} \approx 0.414$$

e は正八角形の一辺:正方形の一辺の比
の値

正八角形の四辺が正方形の四辺と一致



参考文献

- 1)
豊穰折紙 / Hojo Origami - YouTube
https://www.youtube.com/channel/UCewC__Q7dVzBfs7bBihwOBA
- 2)
折り紙の幾何学 -面積最大- | 円周率近似値の日に生まれて理系じゃないわけないだろ! - knifeのblog (ameblo.jp)
<https://ameblo.jp/knife1968/entry-12323746010.html>
- 3)
Focus Gold 数学 II + B 4th Edition P289 啓林館
- 4)
折り紙で3次方程式が折れるわけ (前編) - tsujimotterのノートブック
折り紙で3次方程式が折れるわけ (前編) - tsujimotterのノートブック
<https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-1>
<https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-2>

連絡質問用アドレス y11274235@edu.city.yokohama.jp

囚人のジレンマを用いたいじめを減らす方法の検討

富山県立富山中部高等学校

1.はじめに

私は、ゲーム理論のモデルの1つである「囚人のジレンマ」を用いて「いじめ」について考えることができることを知り、今回「囚人のジレンマ」に関する研究をすることにした。

2.原理

「ゲーム理論」

ゲーム理論とは、経済社会における数理的で厳密な方法論を用いて分析する理論である。ゲーム理論の分析対象は、あらゆるゲーム的状况である。ゲーム的状况の問題構造は、経済学ばかりでなく政治学、経営学、哲学、心理学、生物学、工学などの学問分野に共通に見出されるものであり、ゲーム理論はこれらの学問分野を横断する学際的で総合的理論の一つである。

「囚人のジレンマ」

検事は2人の犯罪について十分な証拠をつかんでいないが、拳銃の不法所持などの余罪で2人の容疑者を起訴できる。いま、検事は2人の容疑者を別々の取り調べ室に隔離し、それぞれ次のように言った。

「お前たちの選択は罪を自白するか黙秘するかだ。もし2人が自白すれば犯罪が確定し2人はともに8年の懲役刑を受ける。もし2人とも自白しなければ犯罪は立証されず、2人の刑は拳銃の不法所持で1年であろう。もし一方だけが罪を自白すれば、共犯証言の制度により自白した者は3か月の軽い刑となる。その自白しなかった者は最も重い10年の刑を受けることになる。」

2人の容疑者は隔離されているために相談することはできない。

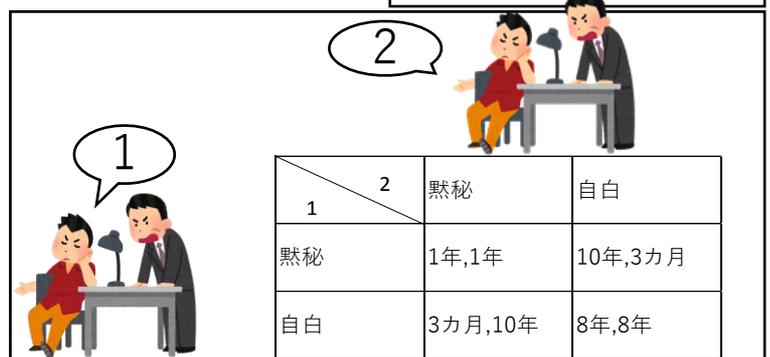
「いじめの四層構造」※1

(文部科学省より)

いじめは

- 被害者（いじめられる側）
 - 加害者（いじめる側）
 - 観衆（はやし立てて見ている）
 - 傍観者（見て見ないふりをする）
- で構成されている、とした。

この状況を表にすると…



| | | | |
|---|----|---------|---------|
| | 2 | 黙秘 | 自白 |
| 1 | 黙秘 | 1年,1年 | 10年,3カ月 |
| | 自白 | 3カ月,10年 | 8年,8年 |

「観衆」はいじめを積極的に是認、
「傍観者」はいじめを暗黙的に支持
しいじめを促進する役割を担う

今回「観衆」と「傍観者」を
一つの「傍観者」としてとらえる
⇒「傍観者」の中から「加害者」になる人、
「傍観者」になる人が現れることにする

3.実験方法

今回、先行研究^{※2}をもとにしていじめの起きる様子をモデル化するため、以下のようにルール、戦略を設定し、コンピュータ（ExcelのVBA）を用いて試行した。

ゲームのルール

- ・ 被害者1人、加害者1人、傍観者38人（傍観者と観衆を足して考えるため、ここの傍観者から「加担」に回る人も出る→その場合最終的にマイナス値が出るとその人は加害者となる）
- ・ 性格（戦略）はランダムに割り振られるが、一度決まった性格（戦略）は試行が終わるまで変わらない。
- ・ 5日（回）ごとに対応（対戦）する人は変わる。（5日としたのは一週間の登校回数からである）
- ・ 5日（回）×40週（セット）試行を行う

戦略は以下のものを用いる

| | |
|------------------|---|
| 1 All S | 全て制止を選択 |
| 2 All L | 全て傍観を選択 |
| 3 All C | 全て加担を選択 |
| 4 Per SL | 制止と傍観を交互に選択 (SLSLS) |
| 5 Per LS | 傍観と制止を交互に選択 (LSLSL) |
| 6 Per LC | 傍観と加担を交互に選択 (LCLCL) |
| 7 Per CL | 加担と傍観を交互に選択 (CLCLC) |
| 8 Trigger (SL) | 初回は制止を選択、初回で相手が制止していれば制止を、相手が傍観/加担していれば傍観を2回目から選択し続ける |
| 9 TTT (SL) | 基本は制止を選択し続けるが、相手が二回連続で傍観を選択していた場合のみ次回傍観を選択する |
| 10 RTrigger (SL) | 初回は傍観を選択、初回で相手が制止していれば制止を、相手が傍観/加担していれば傍観を2回目から選択し続ける |
| 11 Trigger (LC) | 初回は傍観を選択、初回で相手が制止/傍観していれば傍観を、相手が加担していれば加担を2回目から選択し続ける |
| 12 TTT (LC) | 基本は傍観を選択し続けるが、相手が二回連続で加担を選択していた場合のみ次回加担を選択する |
| 13 RTrigger (LC) | 初回は加担を選択、初回で相手が制止/傍観していれば傍観を、相手が加担していれば加担を2回目から選択し続ける |
| 14 RDM (SL) | 制止するか、傍観するかを毎回無作為に選択 |
| 15 RDM (LC) | 傍観するか、加担するかを毎回無作為に選択 |
| 16 Freidman | 初回は制止、相手が一度でも加担すると制止せずに傍観し続ける |
| 17 Soft Freidman | 初回は制止、相手が2回連続で加担すると傍観し続ける |
| 18 Odd | 初回は傍観、相手が1度でも制止すると制止し続ける |

〈VBAについて〉

ソフトの操作手順を自動で実行するための機能である「マクロ」機能を実現するために、プログラミング言語の「Visual Basic」をアレンジした「Visual Basic for Applications」(VBA)というマクロ言語がExcelには搭載されている。

```

Microsoft Visual Basic for Applications - [Sheet1 コード]
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) 挿入(I) 書式(O) デバッグ(D) 実行(R) ツール(T) ヘルプ(H)
1行, 1桁
(General)
Dim sn1 As String: sn1 = "Sheet1"
Dim sn2 As String: sn2 = "Sheet2"
Dim sn3 As String: sn3 = "Sheet3"
Dim sn4 As String: sn4 = "Sheet4"
Dim sn5 As String: sn5 = "Sheet5"
Dim i As Integer: i = 9
Dim rnn As Integer: rnn = 1
Dim sss As Integer: sss = 1

For sss = 1 To 10
For rnn = 1 To 40

'戦略sheetにはりつ
Dim hv As Integer: hv = 1

For hv = 1 To 38
Sheets(sn1).Cells(5, 8 + Sheets(sn2).Cells(1 + rnn, 1 + hv)) = Sheets(sn3).Cells(1 + sss, 1 + hv)
Next

For i = 9 To 49

'戦略1
If Sheets(sn1).Cells(5, i) = 1 Then
Sheets(sn1).Cells(6, i) = 1
Sheets(sn1).Cells(7, i) = 1
Sheets(sn1).Cells(8, i) = 1
Sheets(sn1).Cells(9, i) = 1
Sheets(sn1).Cells(10, i) = 1

End If

'戦略2
If Sheets(sn1).Cells(5, i) = 2 Then
Sheets(sn1).Cells(6, i) = 0
Sheets(sn1).Cells(7, i) = 0
Sheets(sn1).Cells(8, i) = 0
Sheets(sn1).Cells(9, i) = 0
Sheets(sn1).Cells(10, i) = 0

End If

'戦略3
If Sheets(sn1).Cells(5, i) = 3 Then

```

〈解説〉

S…stop「制止」

L…look「傍観」

C…concern「加担」

Trigger…トリガー戦略

TTT…堪忍袋戦略

RTrigger…逆トリガー戦略

1～7 固定

8～13,16～18 相手に依存

14,15 ランダム

いじめが発生する条件を以下のものと定める

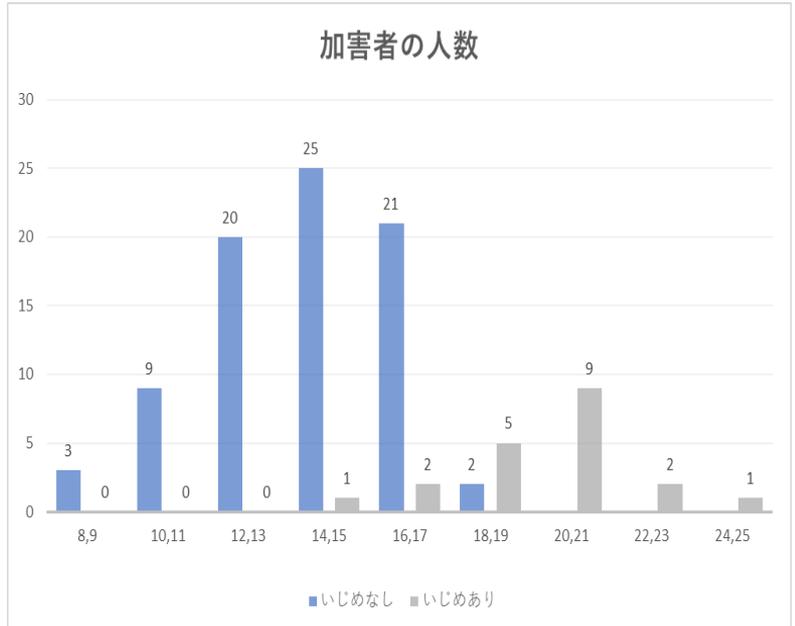
$$\text{傍観者の合計点数} - |\text{加害者の合計点数}| = X$$

(最終的に $X \geq 0$ でいじめは発生しなかった、 $X < 0$ でいじめは発生した)

4.1.実験①

「制止」1ポイント、「傍観」0ポイント、「加担」-1ポイント

| | 被害者 | 加害者 | いじめの有無 | 加害者の人数 |
|----|------|-------|--------|--------|
| 1 | 1597 | -1366 | × | 16 |
| 2 | 1234 | -1608 | ○ | 21 |
| 3 | 2262 | -1575 | × | 12 |
| 4 | 1884 | -794 | × | 14 |
| 5 | 1748 | -2006 | ○ | 18 |
| 6 | 1004 | -2147 | ○ | 23 |
| 7 | 1213 | -1895 | ○ | 20 |
| 8 | 2298 | -1148 | × | 13 |
| 9 | 2155 | -1291 | × | 15 |
| 10 | 1382 | -2127 | ○ | 20 |
| 11 | 1731 | -1664 | × | 16 |
| 12 | 1806 | -1481 | × | 15 |
| 13 | 2672 | -1751 | × | 12 |
| 14 | 1575 | -1669 | ○ | 16 |
| 15 | 2376 | -1627 | × | 14 |
| 16 | 2076 | -1714 | × | 15 |
| 17 | 2202 | -1001 | × | 15 |
| 18 | 2256 | -831 | × | 8 |
| 19 | 1938 | -1261 | × | 16 |
| 20 | 2600 | -1333 | × | 13 |



100回の試行のうちいじめが起きたのは**20回**
 いじめありの場合の「加害者」の平均人数は**19.6人**、
 いじめなしの場合の「加害者」の平均人数は**13.95人**
 ⇒「加害者」の人数はいじめの有無に関係がある

4.2.実験②

「制止」2ポイント、「傍観」0ポイント、「加担」-1ポイント

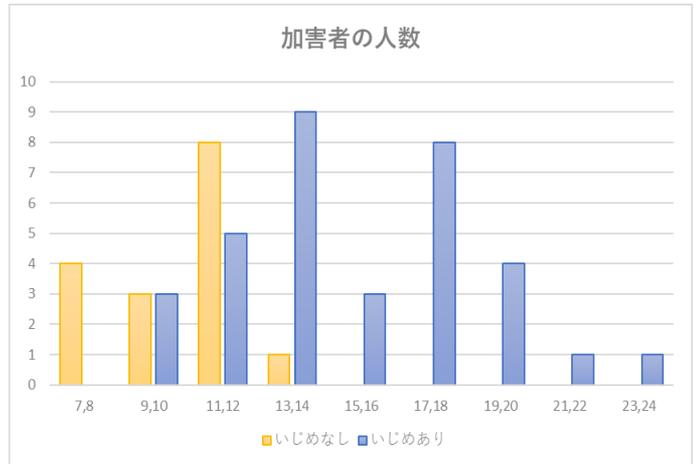
| | 被害者 | 加害者 | いじめの有無 | 加害者の人数 |
|----|------|-------|--------|--------|
| 1 | 3365 | -1466 | × | 16 |
| 2 | 3667 | -1018 | × | 9 |
| 3 | 3871 | -1587 | × | 14 |
| 4 | 4013 | -1202 | × | 13 |
| 5 | 4677 | -1223 | × | 9 |
| 6 | 3809 | -1461 | × | 14 |
| 7 | 2556 | -1620 | × | 18 |
| 8 | 3422 | -1366 | × | 12 |
| 9 | 3792 | -1504 | × | 15 |
| 10 | 4271 | -1366 | × | 13 |

50回の試行のうちいじめが起きたのは0回
 いじめはなかったが「加害者」の平均人数は
14.82人
 ⇒**実験①**でのいじめありの場合の「加害者」
 の人数には及ばなかった
 (「加害者」の人数が24人であってもいじめ
 は発生しなかった)

4.3.実験③

「制止」1ポイント、「傍観」0ポイント、「加担」-2ポイント

| | 被害者 | 加害者 | いじめの有無 | 加害者の人数 |
|----|------|-------|--------|--------|
| 1 | 2592 | -1648 | × | 7 |
| 2 | 2210 | -1647 | × | 13 |
| 3 | 2219 | -2048 | × | 11 |
| 4 | 768 | -4957 | ○ | 23 |
| 5 | 1365 | -2605 | ○ | 17 |
| 6 | 1677 | -2058 | ○ | 13 |
| 7 | 2386 | -3262 | ○ | 16 |
| 8 | 2206 | -2731 | ○ | 9 |
| 9 | 2137 | -3103 | ○ | 15 |
| 10 | 2676 | -2980 | ○ | 14 |



50回の試行のうちいじめが起きたのは**34回**

いじめありの場合の「加害者」の平均人数は**15.12人**、いじめなしの場合の「加害者」の平均人数は**10.31人**

5.考察

- ・今回自分で戦略を決めて実験を行ったが、行動のレポーターを増やしたり、実際に学生にどのような行動が予想されるか聞いて取り入れたりしても面白い
- ・いじめの状況におけるプログラミングの型は完成したのでこれを応用して、次はカバディとゲーム理論の関係について研究し、さらにいろいろなところに応用のできる型を作りたい

6.結論

・「いじめあり」の場合と「いじめなし」の場合で加害者の人数に差が出てくる

⇒ **加害者の人数はいじめの有無に直接関係する**

・「制止」と「加担」という行為を比較したときの度合によって、いじめが発生するときの「加害者」の人数には差が出てくる

⇒ **「加担」の度合いが大きければ大きいほどいじめは発生しやすくなる**

・ **いじめを減らすにはクラス内での「加担」にまわっている人の数、つまり「加害者」の人数に注意することが大切である**

7.参考文献

岡田章：「ゲーム理論 第3版」,有斐閣,2021

鎌田雄一郎：「ゲーム理論入門の入門」,岩波新書,2019

ケン・ビンモア：「1冊でわかるゲーム理論」,岩波書店,2010

森口朗：「いじめの構造」,新潮新書,2007

※1 文部科学省HP：いじめへの対応のヒント,

https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/c_housa/shotou/040/shiryo/06120716/005.htm

※2 矢野翔大,近匡,小柳文子：

囚人のジレンマを用いたいじめ発生メカニズムの解析と対策,

<http://repository.seikei.ac.jp/dspace/bitstream/10928/364/3/rikougaku-50-1-1-7.pdf>

早坂清志：「Excelの極意⑥「VBA」を極める」,毎日コミュニケーションズ,2008

折り紙による様々な方程式の解法について

石川県立金沢泉丘高等学校 物理部

研究動機

私たちは小さい頃から折り紙に親しんできた。

実は、折り紙は数学的研究がなされてきた。私たちは折り紙で方程式が解けるということを知り、興味を持った。

先行研究

折り紙を用いて、**2次方程式・3次方程式**の解を求められることが分かっている。

また、リルの解法を用いた**5次方程式**の解き方があることも分かっている。

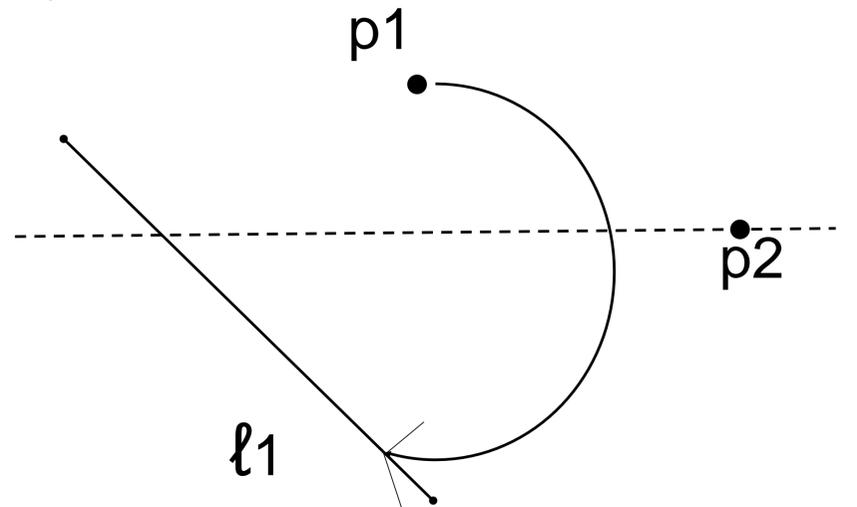
新しい提案

より高次の方程式や特殊な方程式が解けるのではないか。

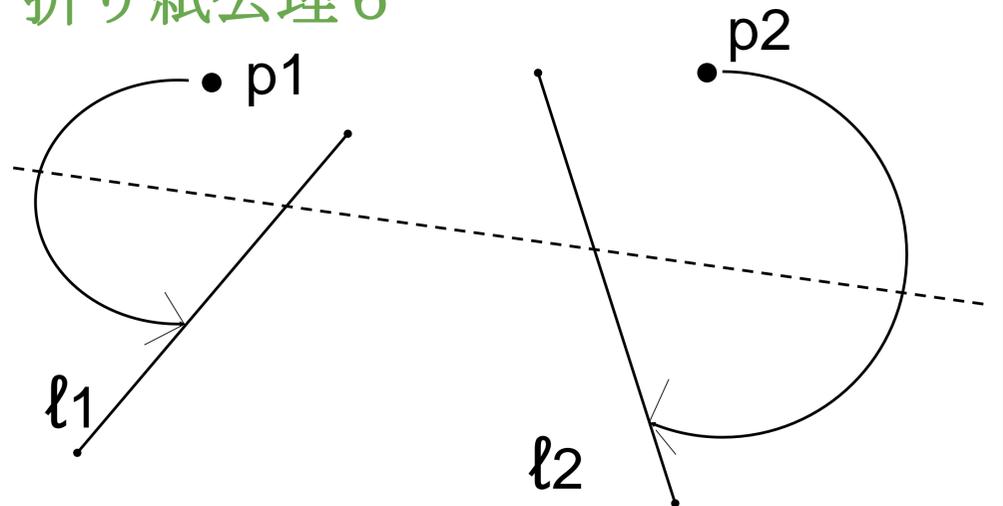
折り紙公理^{1) 2)}

紙を折るときに、可能な操作を示している。

折り紙公理 5



折り紙公理 6



研究内容

折り紙を用いて様々な方程式の解法を探る

方法

- ①折り紙を座標平面とみなす
- ②方程式を解きやすい形に変形
- ③折り紙を折って方程式の解を作図する

結果

解けた方程式

- ・ 4次の複二次方程式
- ・ 3次方程式
- ・ 相反方程式
- ・ $x^n - 1 = 0 (n = 1, 2, \sim, 10)$

考察

折り紙により求められる方程式の解は基本的には**実数解**しかない。そのため折り紙で解ける方程式はかなり限定される。

解ける方程式を増やすために折り紙を**複素平面**と見立てるという方法を考えた。

折り紙を用いた方程式の解法①

複二次方程式^{2) 3)}

式 $x^4 + ax^2 - b = 0$

<条件> x^4 の係数が1であること。

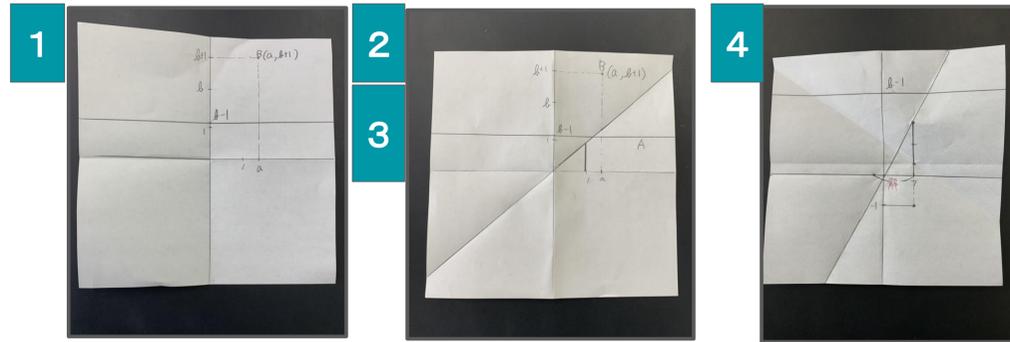
<方法>

係数a,bを折り紙の座標平面上に書く。

- 1:直線A $y = b - 1$ を引き、点B(a,b+1)を描く。
- 2:折り線が原点を通り、点Bが直線A上にくるような折り線を作図する。
- 3:その折り線を切片Oの一次関数とみて、x座標が1の点とx軸との距離を求めて線分で表す。
- 4:方べきの定理(*)を使ってその線分の長さの平方根の長さを求める。
- 5:求まった長さがその複二次方程式の解の一つである。

事前に1という長さの基準を決めておく。
(例) 1cmを1とする

注: 3枚目は方べきの定理の操作をわかりやすくするために別の紙に描き、折り線の傾きを異なるものになっているが、2,3枚目ともa,bについて仮に表しているだけなので問題は無い。



相反方程式^{2) 3)}

4次方程式

式 $x^4 + cx^3 + dx^2 + cx + 1 = 0$

<条件> x^4 の係数が1であること。

$3 - d < 0$ のとき $c > |2|$ であること。

<方法>

- 1:直線C: $y = 1 - d$ を引き、点D(c,3-d)を描く。
- 2:複二次方程式2,3と同様のことをC,Dでも行う。
- 3:線分を求めたら、x軸とy軸を入れ替える。
- 4:求めた線分をEとして、Eの左端の点のx座標について求める
- 5:求めたx座標をeとして、直線G: $y = 0$ と、点H(e,2)をとる。
- 6:2の操作と同様のことをG,Hでも行う。
ここで出てきた線分が解の一つである。

5次方程式

式 $x^5 + cx^4 + dx^3 + dx^2 + cx + 1 = 0$

<条件> x^5 の係数が1であること。

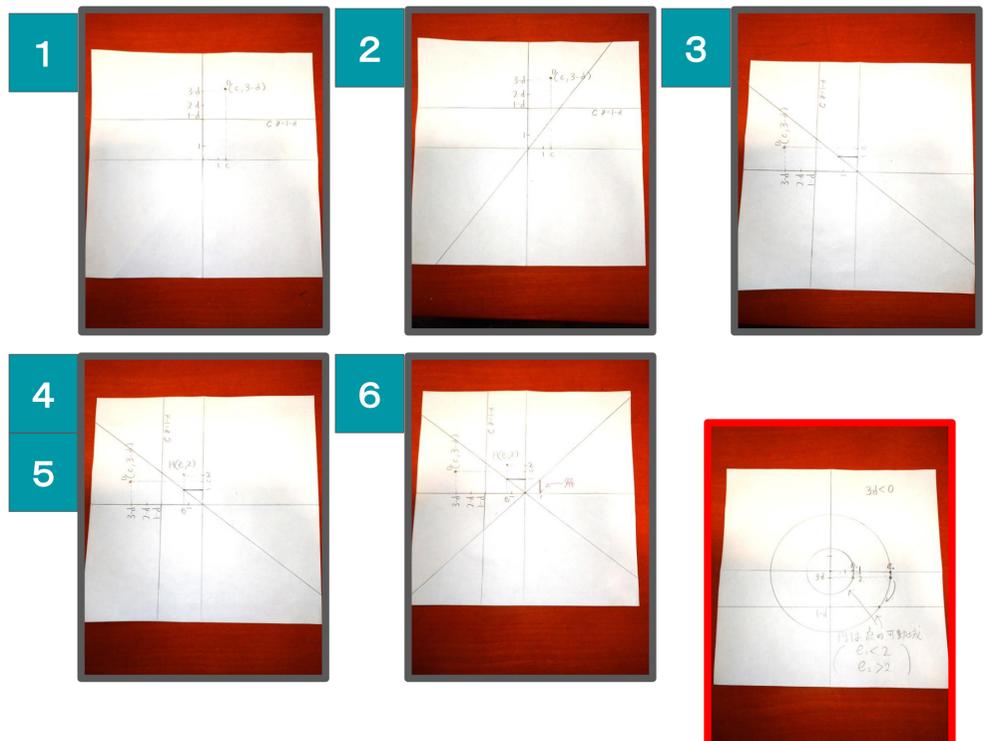
$d - c + 2 < 0$ のとき $c - 1 > |2|$ であること。

<方法>

これは、上の2の時に直線I: $y = -1 + c - d$ 点J(c-1,1+c-d)をとって、上記と同様の操作を行えばその式の解の一つを求めることができる。

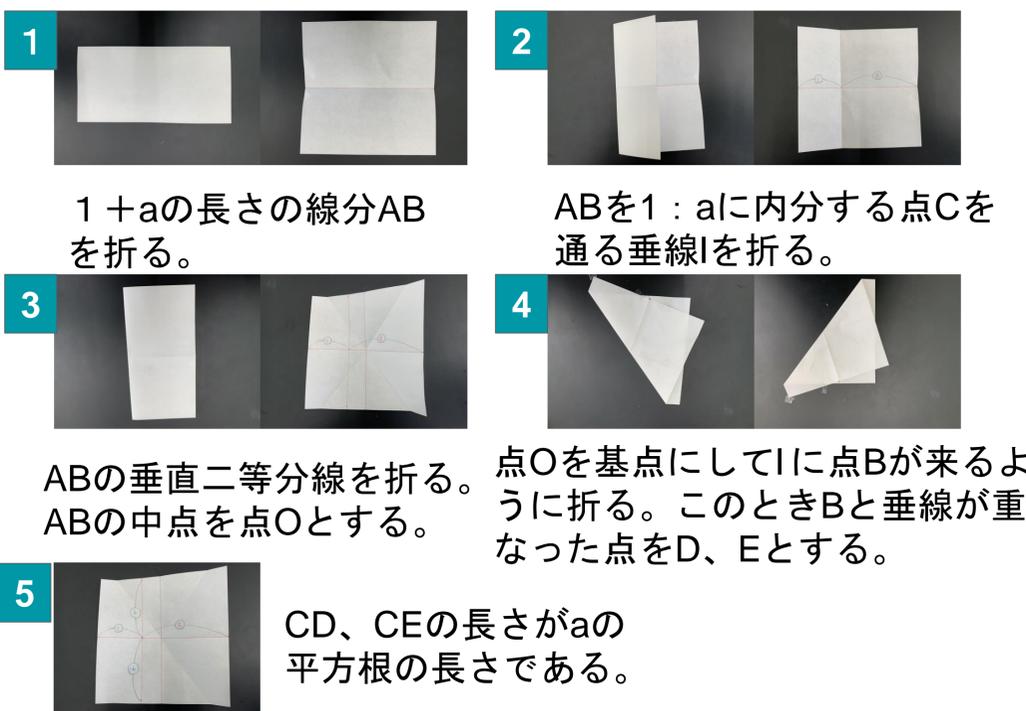
これは、奇数次の相反方程式の解に必ず-1が含まれることを利用した。

$x \neq 1$ としてこの方程式の両辺を $x + 1$ で割ることによって相反四次方程式へと変形できる。



$3-b < 0$ の時
cの値が2より小さいときは
作図不可能

※方べきの定理



折り紙を用いた方程式の解法②

三次方程式

次の条件下の時、以下の方法で三次方程式は折り紙で折ることができる。³⁾

<条件> $at^3 + bt^2 - ct - b$ であること。 ($b \neq 0$)

<方法>

まず、この式の両辺に $1/t$ を掛ける。

$$at^2 + bt - c - \frac{b}{t} = 0$$

$$\frac{2at^2}{2} + \frac{2bt}{2} - \frac{2c}{2} - \frac{2b}{2t} = 0$$

そして、式変形をする。

$\frac{2c}{2}$ について、 $\frac{2c}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2D}{2}$ となるような D を求め、 $\frac{2c}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2D}{2}$ を代入した式で表す。

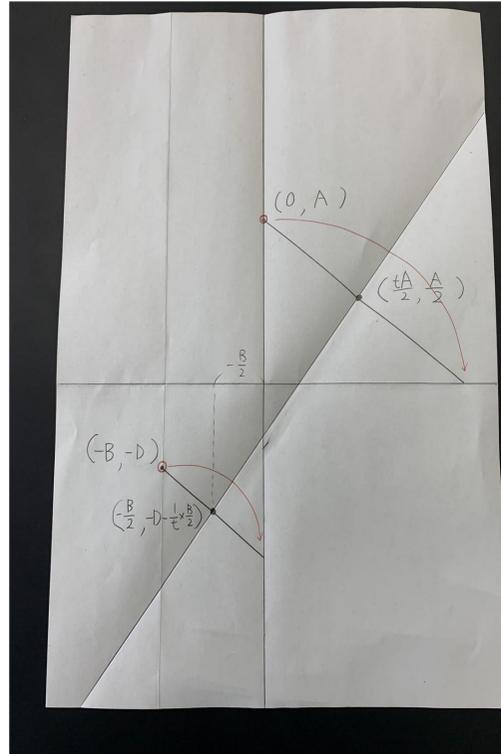
ここで、 $2a = A, 2b = B,$ とする。

$$\frac{2at^2}{2} + \frac{2bt}{2} - \frac{2a}{2} - \frac{2D}{2} - \frac{2b}{2t} = 0$$

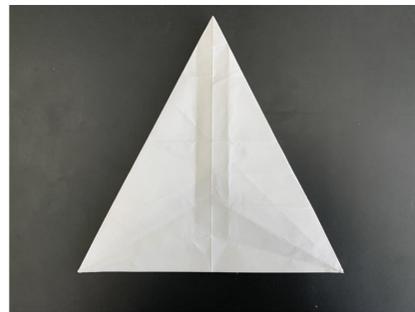
$$\frac{t^2 A}{2} + \frac{tB}{2} - \frac{A}{2} - D - \frac{B}{2t} = 0$$

この時の A, B, D を指定された座標に当てはめて折り紙を折ると一次関数のグラフができる。その傾きがその三次方程式の解の一つである。

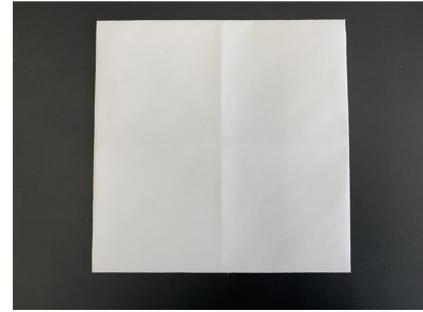
図の中の赤丸の場所に出てきた値を代入して公理6の折り方すると出る折り線の傾き t が三次方程式の解の一つである。



この傾きがなぜ三次方程式といえるのかについては直線を $y = Tx + h$ として折って移動した点と元の点の midpoint の x, y 座標をそれぞれ代入して h についての連立方程式を作るとわかる。



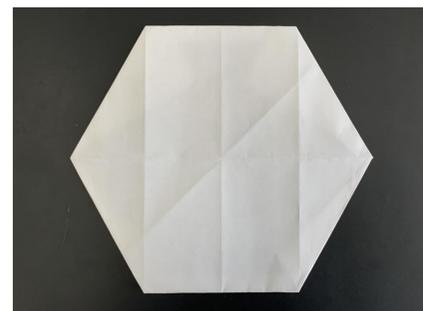
正三角形



正四角形



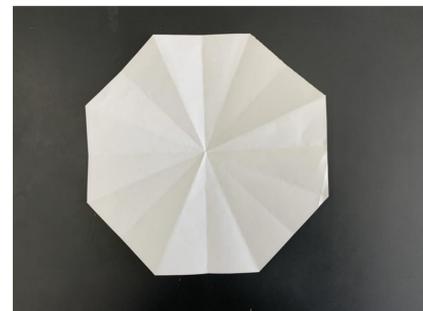
正五角形



正六角形



正七角形



正八角形



正九角形



正十角形

$x^n - 1 = 0$

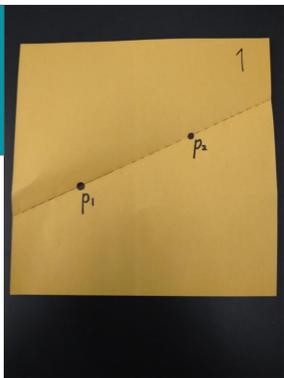
ド・モアブルの公式を用いて $x^n - 1 = 0$ の解を折り紙上に作った複素平面上に表す。現状 $n = 1, 2, \sim, 10$ などの折り方は見つかっている。

<折り方>

- 1: まず正多角形を折る⁴⁾
- 2: 正 n 角形の中心と一つの頂点を通るような直線を折る。
- 3: 2の直線と垂直になり、なおかつ正 n 角形の中心を通るような直線を折る。
- 4: 2の直線を実軸、3の直線を虚軸とする。
- 5: 中心から頂点までの長さを1とすることで正 n 角形の解を求めることができる。

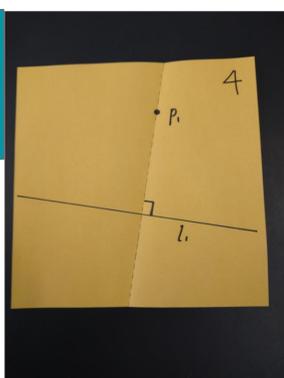
折り紙公理^{1) 2) 3)}

1



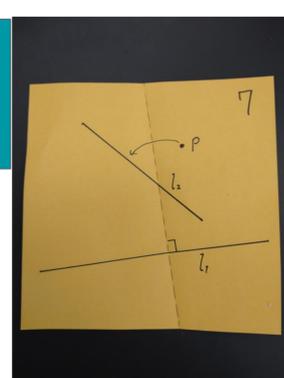
2点 p_1, p_2 が与えられた時2つの点を通る折り方がある。

4



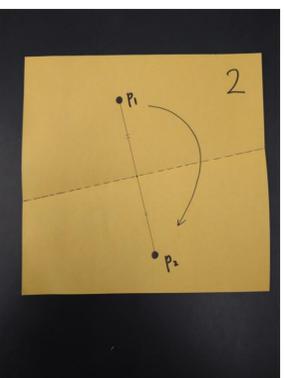
点 p_1 と直線 l_1 が与えられたとき点 p_1 を通り l_1 に垂直な折り方がある。

7



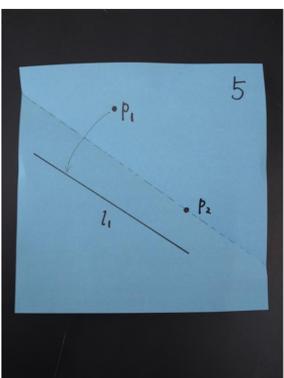
点 p と2直線 l_1, l_2 が与えられた時、 p を l_1 に重ね、 l_2 に垂直な折り方がある。

2



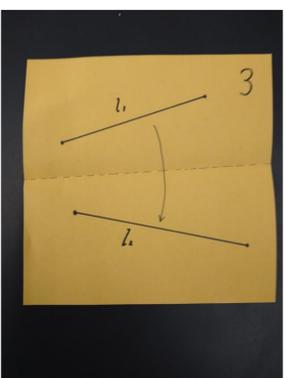
2点 p_1, p_2 が与えられた時、 p_1 を p_2 に重ねる折り方がある。

5



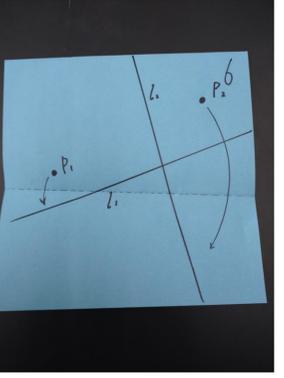
2点 p_1, p_2 , 直線 l_1 が与えられた時、 p_1 を l_1 に重ね p_2 を通る折り方がある。

3



2直線 l_1, l_2 が与えられた時、 l_1 を l_2 に重ねる折り方がある。

6



2点 p_1, p_2 , 2直線 l_1, l_2 が与えられた時、 p_1 を l_1 上に重ね、 p_2 を l_2 上に重ねる折り方がある。

今後の展望

通常の方方程式とは別に他の分野に応用できるのではないかと考え、以下のことについても研究した。

- ・ 偏微分方程式の解き方⁵⁾
- ・ ガロア群を用いて4次方程式の解を求め、折り紙による簡明な解法に繋がるかということ⁶⁾

上記のことを踏まえて、折り紙の数学的可能性を研究していきたい。

参考文献

- 1) Jacques JUSTIN (1989) RÉOLUTION PAR LE PLIAGE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES
- 2) Robert J Lang.(1996)Origami and geometric constructions
- 3) 豊穰折紙/Hojo Origami https://www.youtube.com/channel/UCewC__Q7dVzBfs7bBihwOBA
- 4) 西村保三、山本 一海、(2013) 折り紙による五次方程式の解法-三重折りによる五乗根、角の5等分、正十一角形の作図-
- 5) Bernard Dacorogna Paolo Marcellini, and Emanuele Paolini.(2010)Origami and Partial Differential Equations
- 6) 森継修一、中村玲子 (2009) 代数方程式の折紙による解法について

1. 動機

声でワイングラスを破壊する実験を見て共振現象について興味を持ち、ワイングラス以外の物も音で破壊することが出来るのか疑問に思い研究を行った。また、音の波形は全て単純な正弦波の合成からなることを知り、本当にそうなるのかフーリエ級数展開を用いて音波を数式で表し調べようと考えた。

2. 研究方法

研究1：様々な楽器の振動数をデジタルオシロスコープで測定し、グラフの数式化およびその分類を行う。

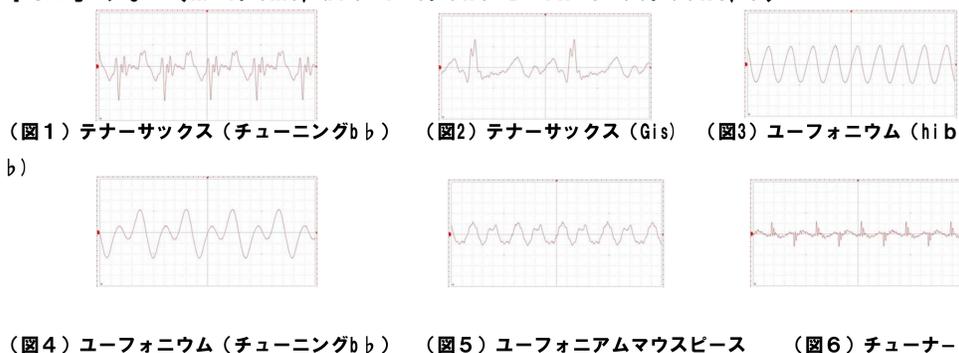
ユーフォニウム、テナーサクスをはじめ、様々な楽器の振動数をデジタルオシロスコープ（owon社製VDS6000 高分解能高感度 PCベース デジタルオシロスコープ 任意波形発生器）により調査し、数式として分類する。

研究2：音波による物体破壊（共振現象）について調べる。比較的壊れ易いと考えたチョーク、寒天を用いて実験を行う。同じ物体どうしを叩いて出た音の振動数をその物体の固有振動数とみなし、その振動数と同じ振動数をもつ音波を物体に当て、物体の様子を観察する。

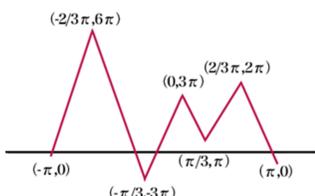
3. 結果

[研究1]

以下は、テナーサクス（チューニングbb）（図1）、テナーサクス（Gis）（図2）、ユーフォニウム（hibb）（図3）、ユーフォニウム（チューニングbb）（図4）ユーフォニウムマウスピース（図5）、チューナー（図6）の各音波の波形をオシロスコープにて読み込んだものである。波形が同じになるかどうかを確認するため、条件を同じくして各5回データをとり確認した。そのうちの1回を以下に示す。（M 1.0ms/div T 0.0ns D 1k S 50.00kS/s）



続いて、テナーサクス（Gis）グラフの数式化を試みた。見た目からだけではグラフの数式化は困難と考え、テナーサクス音波のグラフに直線のグラフを重ね、近似グラフを作成しそれをフーリエ級数にて近似して式を作成した。右が重ねて合わせた直線のグラフである。計算のしやすさも考えながらグラフを作成した。周期 2π のフーリエ級数は以下の式で与えられる。



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

n=1のとき $\frac{7}{6}\pi - \frac{6}{\pi} \cos x + 3 \sin x$

n=2のとき $\frac{7}{6}\pi - \frac{6}{\pi} \cos x + 3 \sin x + \left(\frac{9\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3}{2}\right) \sin 2x$

n=3のとき $\frac{7}{6}\pi - \frac{6}{\pi} \cos x + 3 \sin x + \left(\frac{9\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3}{2}\right) \sin 2x + \frac{52}{3\pi} \cos 3x - \sin 3x$

nの値が増えるにしたがって近似グラフの周期関数に近づけることができた。同様にユーフォニウム（チューニングb, hib）の近似グラフを作成し数式化を行った。

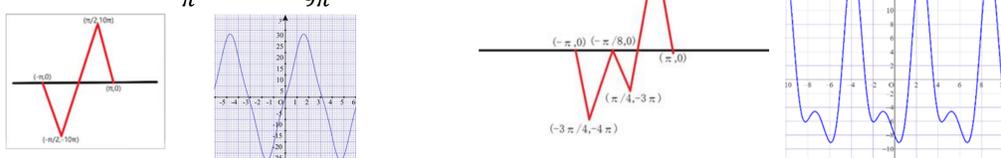
ユーフォニウム（チューニングb）

n=3のとき $\frac{-228-40\sqrt{2}+36\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}} \cos x + \frac{128+4\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{5\sqrt{2}\pi} \sin x$

+ $\frac{18-10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\pi} \cos 2x + \frac{-388+4\sqrt{2}}{20\pi} \sin 2x + \frac{-32+40\sqrt{2}+36\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{45\sqrt{2}\pi} \cos 3x + \frac{128+4\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{45\sqrt{2}\pi} \sin 3x$

ユーフォニウム（hib）

n=3のとき $\frac{80}{\pi} \sin x - \frac{80}{9\pi} \sin 2x$



[研究2]

まず、通常チョークおよび加工チョーク（写真1）、寒天ゼリー（写真2）の固有振動数を、オシロスコープを用いて調べた。加工チョークは、円形のものと比較分析するため長方形の形になるように加工して分析を行った。



通常チョークおよび加工チョーク（写真1）



作成した寒天ゼリー（写真2）

（図7）～（図10）は、通常、加工チョークをそれぞれにて叩いたとき、折れたときにそれぞれ発生する波形をオシロスコープにて読み取ったものである。



通常チョークどうして叩いたときに出る波形（図7）



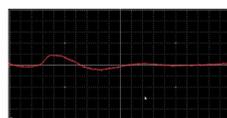
通常チョークが折れたときに出る波形（図8）



加工チョークどうして叩いたときに出る波形（図9）



加工チョークが折れたときに出る波形（図10）



寒天ゼリーでは、鈍い音が発生し、振動数も低く横に広い波形が観測された。寒天ゼリーは微少な振動を与えることができていた様子もあるが、大きな振動の観測には至らなかった。

4. 考察

- ・デジタルオシロスコープによる音波の観測からはじめ、近似、フーリエ級数展開を利用して三角関数でグラフを数式化することができた。
- ・チョークが折れたときに観測される波形に関しては、円形のチョークよりも角柱形に加工されたチョークのほうが幅の狭いグラフが観測された。
- ・以上の測定より発生した振動を固有振動数とし同じ振動数の音波をチョークにあてることによりどのような影響を及ぼすのかを調べた。スマートフォンのアプリ（楽器チューナーLite）にて同じ振動数の音を作成した。
- ・物体に音波をあてることにより音波が物体に及ぼす影響について調査したが、スマートフォンの音波が微弱であることから、チョークにはっきりと目立つ振動を与えることができなかった。
- ・寒天ゼリーでは、鈍い音が発生し、振動数も低く横に広い波形が観測された。寒天ゼリーは微少な振動を与えることができていた様子もあるが、大きな振動の観測には至らなかった。
- ・ガラスのような固い物体ではなく、崩れやすいものを使用して実験を行ったが、ガラスのような固い材質であり丸い形のほうが、振動をより与えることができたのではないかと考えている。
- ・振動に関しては、スマートフォンによる微弱な音波では振動数をそろえても、物体に破壊を及ぼすような振動を与えることはできなかった。
- ・今回の研究では、音波のグラフについて直線グラフで近似して、フーリエ級数展開を行ってグラフの式化を行ったが、見た目上のグラフ化はできたものの数学的厳密さには弱さが残る。

5. 今後に向けて

今後さらにグラフから正確に式を見出せるかについて検討したいとともに、詳細な分類を試みたいと考えている。グラフから、「音」を作成し、聞いたところある程度は同じ音が聞こえたが理論づけが不十分であることを感じた。また、固有振動数の波形を調べ、音波による振動を与えて物体にどのような影響があるのかを分析したが、目立った破壊にはつながらなかった。物体と音波による影響に関して今後さらに理論的追究を果たしたいと考えている。

6. 引用・参考文献

改訂版 物理基礎 國友正和ほか 数研出版株式会社 2016年
改訂版 高等学校 数学III 岡部恒治ほか 数研出版株式会社 2018年
応用数学 田河生長（代表） 大日本図書株式会社 2001年
GRAPES <https://tomodak.com/grapes/>
理工学者が書いた数学の本 フーリエ解析 江沢洋 講談社 1987年
鐘のうなりにおける考察 屋代高等学校理数科課題研究 平成20年度

確率のパラドクス

名古屋市立向陽高等学校 2年

1. 実験の動機

「シンプソンのパラドクス」について知り、確率が直感に反することがあることに興味をもち、他の例を用いて規則を調べたいと思った。

2. 研究の目的

次の命題において、玉の種類を変数として、確率のパラドクスを満たす一般式を作り出すこと。

3. 実験方法

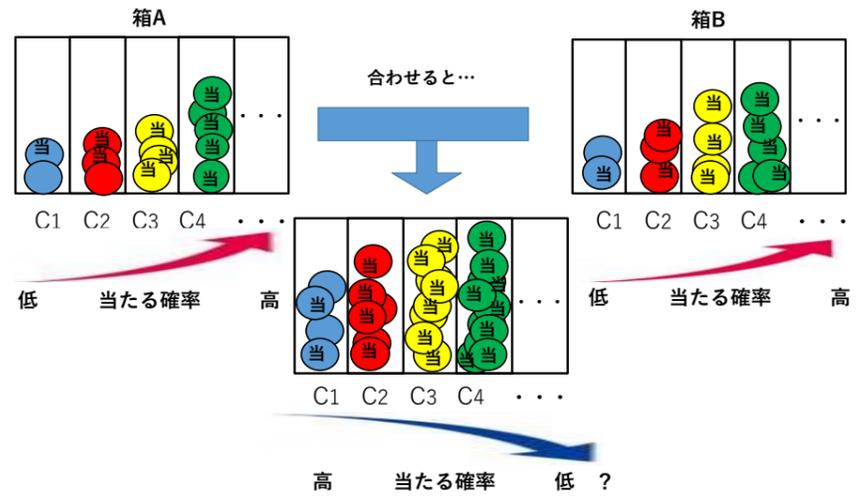
次の命題が成り立つと予想し、プログラミング言語 VBA を用いて Excel 上で表現し、検証を行った。

<命題>

2個の各箱(箱A, 箱B)にn種類(nは自然数, $n \geq 2$)の色(C1, C2, ..., Cn)の、当たり・外れのある玉が色ごとに分けられて入っている。C1の玉を1個取って当たる確率をP1、C2の玉を1個取って当たる確率をP2、... Cnの玉を1個取って当たる確率をPnとする。このとき、どちらの箱でも $P_1 < P_2 < \dots < P_n$ とする。2個の箱を合わせたとき、 $P_1 > P_2 > \dots > P_n$ となるような例(パラドクス)を作ることができる。

右に命題を簡易的に図で示した。

<命題> 次のような例を作ることができる。



4. 実験1 命題の証明 (色の種類と箱Bの玉の総数の関係)

目的 命題が真であることをプログラムを用いて確認し、証明すること。

方法 プログラム(後述)を用いて、命題において $n=100$ として次の条件でパラドクスを作成した。

- <条件>
- 箱A C1の設定: C1の玉の総数を2個、そのうち当たり玉の数を1個とする。
玉の増加の条件: C1からC100まで当たり玉の数と総数を1個ずつ増加させる。
 - 箱B C1の設定: C1の玉の総数を1個、そのうち当たり玉の数を0個とする。
玉の増加の条件: C1からC100まで当たり玉の数を1個ずつ増加させ、玉の総数をパラドクスの条件を満たす最小値とする。

※条件の補足 箱Aの玉の増加の条件を用いれば容易に $P_1 < P_2 < \dots < P_{100}$ を満たすことができることに着目した。しかし、<命題>の図のように箱Bにおいても同様の玉の増加の条件を用いると、2個の箱を合わせたとき、 $P_1 > P_2 > \dots > P_{100}$ とならないことは明らかである。そのため、箱Bの玉の増加の条件は上記のようにすることにした。

結果 右の表が結果の一部である。箱Bの玉の総数はC1からC100まで6個ずつ増加した。

考察 箱Bの玉の総数の増え方が6ずつで一定であり、右の表のように等差数列をなしていた。この結果をもとに命題を次のように証明できた。また、次の証明において、目的であった $f(k)$ 、 $g(k)$ という一般式を作ることができたと言える。

証明) 表より、箱AのCk(kは自然数)の玉を引いて当たる確率を $f(k)$ とすると、 $f(k) = \frac{k}{k+1}$
 よって、 $f(k+1) - f(k) = \frac{k+1}{(k+1)+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} > 0 \therefore f(k+1) > f(k)$
 箱BのCkの玉を引いて当たる確率を $g(k)$ とすると、 $g(k) = \frac{k-1}{6k-5}$
 よって、 $g(k+1) - g(k) = \frac{(k+1)-1}{6(k+1)-5} - \frac{k-1}{6k-5} = \frac{1}{(6k+1)(6k-1)} > 0 \therefore g(k+1) > g(k)$
 箱Aと箱Bを合わせたとき、Ckの玉を引いて当たる確率を $h(k)$ とすると、 $h(k) = \frac{2k-1}{7k-4}$
 よって、 $h(k+1) - h(k) = \frac{2(k+1)-1}{7(k+1)-4} - \frac{2k-1}{7k-4} = -\frac{1}{(7k+3)(7k-4)} < 0 \therefore h(k+1) < h(k)$
 以上より、題意は示された。

※以後、 $1 \leq k \leq n-1$ (kは自然数)として、箱BのCk+1とCkの玉の総数の差が常に一定であるとき、その差を公差、その状態を等差数列と表現することにする。

| 色の種類 | 箱Aの総数 | 箱Aの当たり | 箱Bの総数 | 箱Bの当たり |
|------|-------|--------|-------|--------|
| C1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| C2 | 3 | 2 | 7 | 1 |
| C3 | 4 | 3 | 13 | 2 |
| C4 | 5 | 4 | 19 | 3 |
| C5 | 6 | 5 | 25 | 4 |
| C6 | 7 | 6 | 31 | 5 |
| C7 | 8 | 7 | 37 | 6 |
| C8 | 9 | 8 | 43 | 7 |
| C9 | 10 | 9 | 49 | 8 |
| C10 | 11 | 10 | 55 | 9 |
| C11 | 12 | 11 | 61 | 10 |
| C12 | 13 | 12 | 67 | 11 |
| C13 | 14 | 13 | 73 | 12 |
| C14 | 15 | 14 | 79 | 13 |
| C15 | 16 | 15 | 85 | 14 |
| C16 | 17 | 16 | 91 | 15 |
| C17 | 18 | 17 | 97 | 16 |
| C18 | 19 | 18 | 103 | 17 |
| C19 | 20 | 19 | 109 | 18 |
| C20 | 21 | 20 | 115 | 19 |

4. 実験1 命題の証明（色の種類と箱Bの玉の総数の関係）

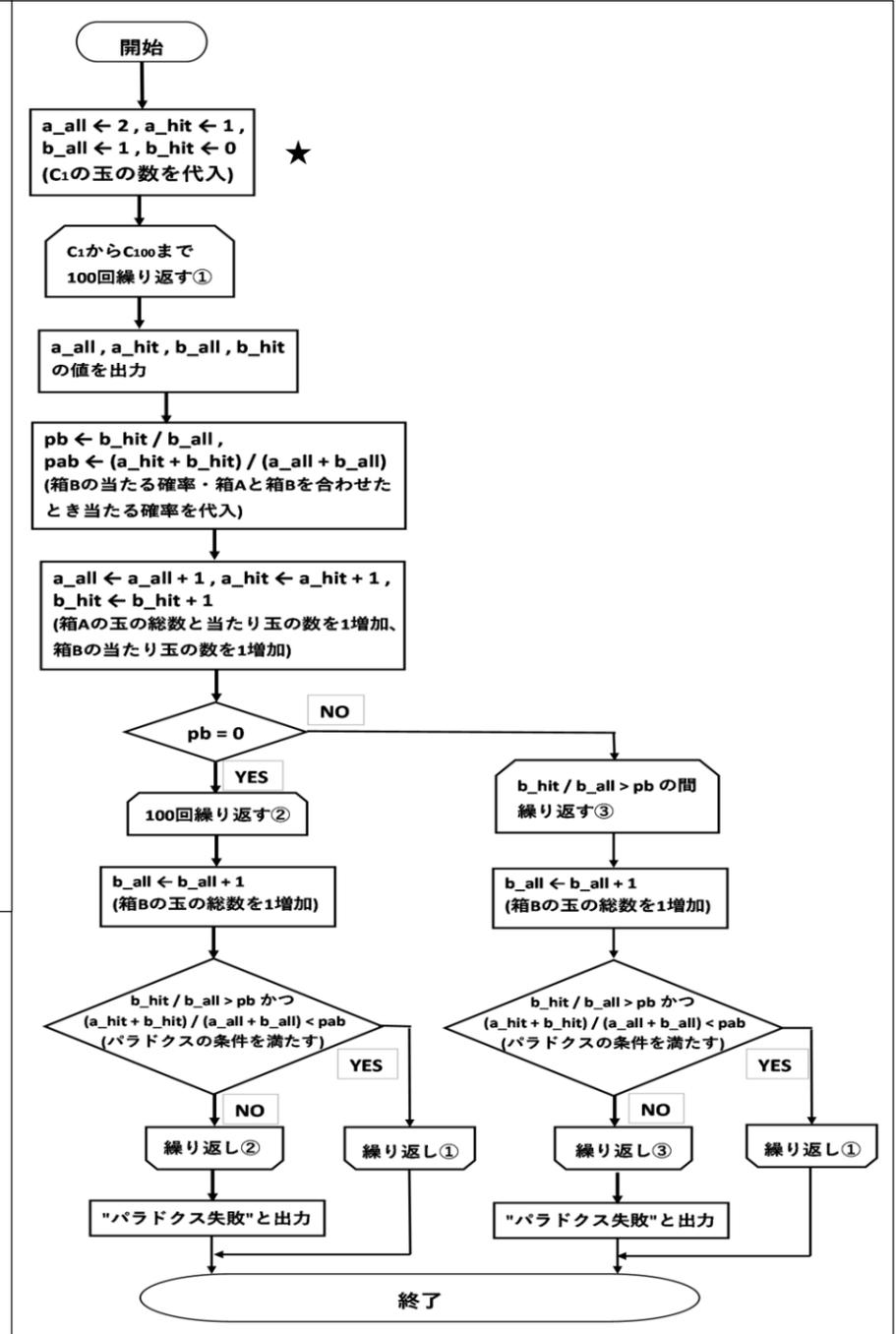
この実験で用いたプログラムと簡易的なフローチャートを次に示す。

```

Sub 実験1()
Dim a_all, a_hit, b_all, b_hit As Integer, pb, pab
a_all = 2
a_hit = 1
b_all = 1
b_hit = 0
★
For i = 1 To 100 Step 1
Cells(1 + i, 2).Value = a_all
Cells(1 + i, 3).Value = a_hit
Cells(1 + i, 4).Value = b_all
Cells(1 + i, 5).Value = b_hit
pb = b_hit / b_all
pab = (a_hit + b_hit) / (a_all + b_all)
a_all = a_all + 1
a_hit = a_hit + 1
b_hit = b_hit + 1
If pb = 0 Then
For ii = 1 To 100 Step 1
b_all = b_all + 1
If b_hit / b_all > pb And (a_hit + b_hit) / (a_all + b_all) < pab Then
Exit For
End If
Next ii
Else
ii = 101
Do While b_hit / b_all > pb
b_all = b_all + 1
If b_hit / b_all > pb And (a_hit + b_hit) / (a_all + b_all) < pab Then
ii = 0
Exit Do
End If
Loop
End If
If ii = 101 Then
Cells(2 + i, 4).Value = "パラドクス失敗"
Exit For
End If
Next i
End Sub
    
```

- ★ a_all…箱Aの玉の総数
- a_hit…箱Aの当たり玉の数
- b_all…箱Bの玉の総数
- b_hit…箱Bの当たり玉の数

※フローチャートの①～③は繰り返しの名称である。



5. 実験2 C1の設定と公差の関係

目的

実験1の<条件>のC1の設定を変え、玉の増加の条件を同じにしたとき、箱Bの玉の総数が等差数列をなすか、なす場合、公差はいくつになるか実験し、C1の設定と公差の関係を調べる。

方法

実験1で用いたプログラムの★の初期値を変え、パラドクスが成り立つC1の設定と、箱Bの玉の総数が等差数列をなすか、なす場合、公差がいくつになるか調べた。各箱の玉の総数が9個以下の全ての場合について調べた。

結果

次の表が結果の一部である。450通りのパラドクスが成り立つC1の設定があった。

考察

パラドクスが成り立つ場合、箱Bの玉の総数は必ず等差数列となった。各箱でC1の玉の総数が増えると公差も規則的に増えた。また、実験1の証明と同様の方法で、450通りの一般式を作ることができると考えられる。

| 箱Aの総数(C1) | 箱Aの当たり(C1) | 箱Bの総数(C1) | 箱Bの当たり(C1) | 箱Bの総数の公差 |
|-----------|------------|-----------|------------|----------|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 0 | 10 |
| 2 | 1 | 4 | 0 | 12 |
| 2 | 1 | 5 | 0 | 14 |
| 2 | 1 | 6 | 0 | 16 |
| 2 | 1 | 7 | 0 | 18 |
| 2 | 1 | 8 | 0 | 20 |
| 2 | 1 | 9 | 0 | 22 |

| 箱Aの総数(C1) | 箱Aの当たり(C1) | 箱Bの総数(C1) | 箱Bの当たり(C1) | 箱Bの総数の公差 |
|-----------|------------|-----------|------------|----------|
| 3 | 1 | 1 | 0 | 8 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 10 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 12 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 14 |
| 3 | 1 | 5 | 0 | 16 |
| 3 | 1 | 6 | 0 | 18 |
| 3 | 1 | 7 | 0 | 20 |
| 3 | 1 | 8 | 0 | 22 |
| 3 | 1 | 9 | 0 | 24 |

6. 実験2の公差の規則の考察 <箱Bに入ったC_nの玉の総数の決定>

これまでの実験において、

A_n : 箱Aに入ったC_nの玉の総数

a_n : 箱Aに入ったC_nの当たり玉の数

B_n : 箱Bに入ったC_nの玉の総数

b_n : 箱Bに入ったC_nの当たり玉の数 として、これらを式で表すことを考えた。

d : 箱Bに入った玉の総数の公差とすると、(※実験によって求めていたため具体的には分からない。)

$$A_n = A_1 + (n-1) \cdot 1$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 1$$

$$B_n = B_1 + (n-1) \cdot d$$

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 1 \quad \text{と表される。}$$

ここで、未知数dを求めることができれば、A_n、a_n、B_n、b_n全てを未知数を用いずに表すことができる。実験2で得られた結果の表を整理しなおし、dの決まり方を検討した。

はじめに、b₁=0の場合について、次のように表をまとめなおした。dをA₁、a₁、B₁で表すことができた。(次の表はまとめた一部。)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 6 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 7 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 |

表より、 $d = \left\lfloor \frac{2(A_1 + B_1)}{a_1} \right\rfloor$ ※ xを実数として、[x]はxを超えない最大の整数を表すものとする。

次に、b₁が0でない場合について、次のように表をまとめなおした。dをA₁、a₁、B₁、b₁で表すことができた。実験を行わなかったB₁ ≥ 10の場合についても必要があれば実験を行った。(次の表はまとめた一部。)

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | | | 8 | 9 | 10 |
| 5 | | | | | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 5 | | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 6 | | | 6 | 7 | 7 |
| 7 | | | | 7 | 8 |

表より、 $d = \left\lfloor \frac{2(A_1 + B_1)}{a_1 + b_1} \right\rfloor$

よって、B_nは次のように表されると言える。 $B_n = B_1 + (n-1) \cdot \left\lfloor \frac{2(A_1 + B_1)}{a_1 + b_1} \right\rfloor$

※ただし、これはこの実験方法でパラドクスが成立する場合に上式を満たすということであり、上式を満たす任意の0以上の整数が必ずパラドクスを成立させるということは意味しないことに注意する必要がある。

7. まとめと結論

実験1により、命題は真であると証明でき、パラドクスを満たす一般式を作り出すことに成功した。

実験2により、450通りのパラドクスを作ることができた。さらに、この実験の方法では箱Bの玉の総数は必ず等差数列をなし、公差の決まり方に規則があると分かった。

実験2で得られた結果を整理すると、その公差dは箱A、箱BそれぞれのC₁の玉の総数と当たり玉の数(A₁, a₁, B₁, b₁)によって表され、箱A、箱BそれぞれのC_nの玉の総数と当たり玉の数(A_n, a_n, B_n, b_n)はすべてA₁, a₁, B₁, b₁, nによって表されると分かった。

8. 今後の展望

パラドクスを成立させるA₁, a₁, B₁, b₁の条件を調べること。

9. 参考文献

数学の課題研究テーマ選びのヒント第1集

フィボナッチ数列の n 乗和の表現

名古屋市立向陽高等学校 フィボナッチ班

1. 実験の動機

世界には様々な美しい数列があり、私たちの生活に深くかかわっている。まさに運命的で、数学は神が作り出したと人々が考えるのも無理はない。特にその中でも、フィボナッチ数の美しさは特出しており、それらに魅了され、深く知りたくなってしまったから。

2. フィボナッチ数列とは

フィボナッチ数列は、三項間漸化式 $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ (①) で表わせる。ただし、 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 。

3. フィボナッチ数列の二乗和の一般化

この研究で使用する、すでに証明されているフィボナッチ数列の二乗和の証明を wikipedia より引用してここに記す。



上の図のように、1 辺が1の正方形を2つ作る。さらに、すでにある二つの四角形を足した数を一辺とするような長さの正方形を作ることを繰り返していく。作り上げた図形の面積が各項の二乗和であると考え。求めたい面積は、正方形の面積を足していくことで求められ、 $1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2$ 。ここで、別の見方をすると、一つの大きな長方形と考えることもできるので、長方形の面積は、 34×21 となる。

つまり、 $a_{k+1} \cdot a_k = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_k^2$

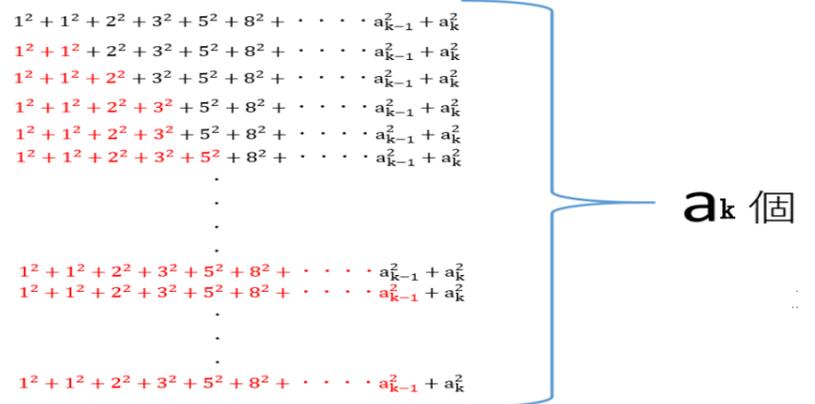
4. フィボナッチ数列の各項の三乗和

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_k^3$$

$$\text{まず } a_k^3 = a_k^2 \cdot a_k$$

$$= a_k^2 + a_k^2 + a_k^2 + a_k^2 + a_k^2 \cdot \dots \cdot \dots + a_k^2 \text{ と考える。}$$

上の考え方をういて 3 乗和の式を変形し空いている部分にそこに適した数字を当てはめると下の図のようになる。



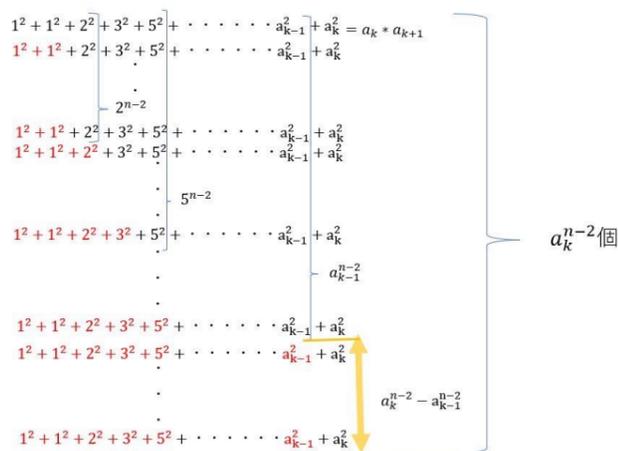
①の表し方をういると、一列全体の和は、 $a_k \cdot a_{k+1}$ と表せる。これが a_k 個あるので全体で $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_k$ となる。ここで先ほど足した赤色の部分を引く。 $1^2 + 1^2$ が一個、 $1^2 + 1^2 + 2^2$ が一個、 $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$ が二個、 $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2$ 三個と個数にフィボナッチが出てくるのに注意したい。それらをまとめたうえ、一項目から k 項目までの三乗和を計算すると、

$$1^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + a_k^3 = a_k^2 \cdot a_{k+1} - \sum_{l=3}^k a_l \cdot a_{l-1} \cdot a_{l-2}$$

5. n 乗和への発展

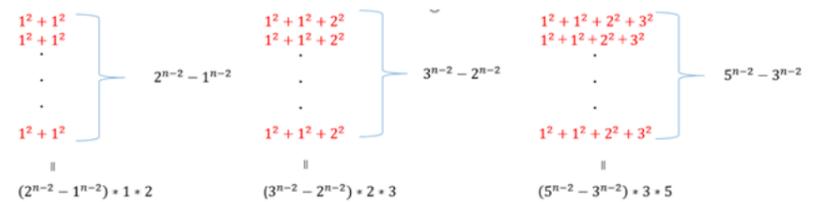
次に4と同様な方法を用いて縦に並べると、

$$a_k^n = a_k^2 \cdot a_k^{n-2}$$



① より、 $1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + a_{k-1}^2 + a_k^2 = a_k \cdot a_{k+1}$ それが a_k^{n-2} 個ある。

ゆえに全体を足した和は、 $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_k^{n-2}$ ここから先ほど足した部分を引けばよい。ここで、今回仮に足した赤色の部分が規則性を持っていることに考慮したい。



上図のように、 $1^2 + 1^2$ が $2^{n-2} - 1^{n-1}$ 個。 $1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$ より、 $(2^{n-2} - 1^{n-1}) \cdot 1 \cdot 2$ となる。同様に、 $1^2 + 1^2 + 2^2, 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2, 1^2 + 1^2 + \dots + a_{k-1}^2$ まで続くので、これらを全部足すと、 $\sum_{k=3}^n a_k \cdot a_{k-1} (a_k^{n-2} - a_{k-1}^{n-2})$ とすることができる。よって、最初に求めたものから引いてまとめたものが下のようになる。

$$1^n + 1^n + 2^n + 3^n + 5^n + 8^n \cdot \dots \cdot a_k^n = a_k^{n-1} \cdot a_{k+1} - \sum_{l=3}^k a_l \cdot a_{l-1} (a_l^{n-2} - a_{l-1}^{n-2})$$

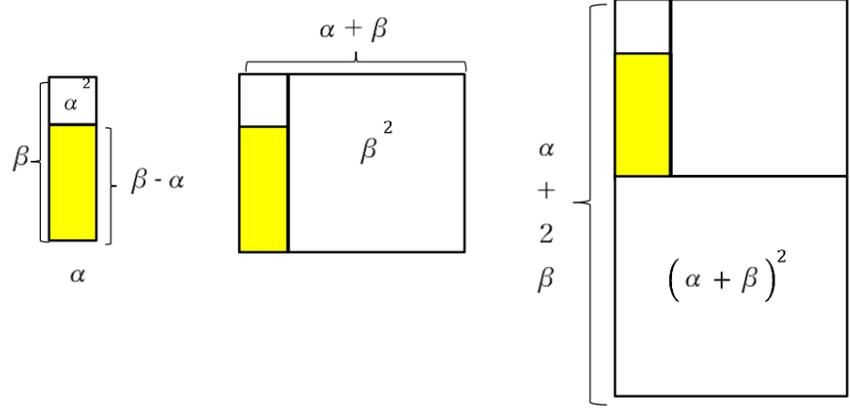
6. フィボナッチ数列の初項変更

フィボナッチ数列の漸化式において、初項を変更したときにどのような影響が出るかを調べることにした。

これによりフィボナッチ数列の特定の項から始めることができ、フィボナッチ数列の最初の二項を変えることで、途中の項からk項目までの和を求めることができる。またフィボナッチ数列だけでなく、初項が1、二項目が2であるリュカ数列などにも応用することができる。

初項を α 、次の項を β とした数列をエビナッチ数列と名づけ、エビナッチ数列のk項目を b_k 、 $b_0 = \beta - \alpha$ 、 $b_1 = \alpha$ 、 $b_2 = \beta$ とし、漸化式をフィボナッチ数列と同じ形である $b_{k+1} = b_k + b_{k-1}$ と定義する。このとき、 $b_3 = \alpha + \beta$ であり、計算していくと、エビナッチ数列の一般項は、フィボナッチ数列の k 項目の一般項 a_k を用いて、 $b_k = a_{k-1}\alpha + a_k\beta$ と表せる。

また、エビナッチ数列のk項目までの二乗和 (T_k とする) は、フィボナッチ数列の2乗和を元にして考えることができる。黄色い部分を除くことで2乗和を求められる(②)。



$$\textcircled{2} T_k = b_k \cdot b_{k+1} - \alpha(\beta - \alpha)$$

$$\textcircled{3} U_k = b_k^{n-1} \cdot b_{k+1} - b_k^{n-2} \cdot \alpha(\beta - \alpha) - \sum_{k=3}^n (b_k^{n-2} - b_{k-1}^{n-2}) T_{k-1}$$

7. m項間漸化式で表現される拡張版フィボナッチ数列のn乗和

これまで研究した3項間漸化式の総和は、 $a_{k+1} \cdot a_k \cdots$ ④で表わせた。

同様にトリボナッチやテトラナッチと呼ばれる4, 5...m 項間漸化式数列も考えたい。なお、フィボナッチ数列は $a_1 = 0$ 、トリボナッチ数列は $a_1 = a_2 = 0$ 、テトラナッチ数列は $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ というように $m-2$ 個0が連なっている。また、 $a_{m-1} = 1$ である。m 項間漸化式の総和を A_m ($m \geq 2$) と定義すると、 $m=3$ のとき、 $A_3 = a_{n+2} - 1 = a_{k+1} \cdot a_k$ である。

$$a_{n+m-1} = a_{n+m-2} + a_{n+m-3} + \cdots + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \quad m\text{項間漸化式の総和を求める。}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ とおく。}$$

$$a_{n+m-1} - a_{n+m-2} - a_{n+m-3} - \cdots - a_{n+2} - a_{n+1} = a_n \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+m-2} - a_{n+m-3} - a_{n+m-4} - \cdots - a_{n+1} - a_n = a_{n-1} \cdots \textcircled{2}$$

$$a_{n+m-3} - a_{n+m-4} - a_{n+m-5} - \cdots - a_n - a_{n-1} = a_{n-2} \cdots \textcircled{3}$$

⋮

⋮

⋮

$$a_{m-1} - a_{m-2} - a_{m-3} \cdots - a_4 - a_3 = a_2 \cdots \textcircled{n-1}$$

$$a_m - a_{m-1} - a_{m-2} \cdots - a_3 - a_2 = a_1 \cdots \textcircled{n}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \cdots + \textcircled{n} \text{ を計算すると、} a_{n+m-1} - a_{m-1} - \sum_{k=m-2}^{n+m-3} a_k - \sum_{k=m-3}^{n+m-4} a_k - \cdots - \sum_{k=3}^{n+2} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = S_n$$

$$a_{n+m-1} - a_{m-1} - (a_{n+m-3} + \cdots + a_{n+1} + S_n - a_{m-3} \cdots - a_1) - (a_{n+m-4} + \cdots + a_{n+1} + S_n - a_{m-3} \cdots - a_1)$$

⋮

⋮

$$-(a_{n+2} + \cdots + a_{n+1} + S_n - a_{m-3} \cdots - a_1) - (a_{n+1} + S_n - a_1) = S_n$$

m 項間漸化式より、 $a_{m-1} = 1$ かつ $a_{m-2} = \cdots = a_1 = 0$ より、

$$a_{n+m-1} - 1 - \{a_{n+m-3} + 2a_{n+m-4} + \cdots + (m-3)a_{n+1} + (m-3)S_n\} = S_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+m-1} - 1 - \{a_{n+m-3} + \cdots + (m-3)a_{n+1}\} = (m-2)S_n$$

よって、

$$A_m = \left(\frac{1}{m-2} \right) \{ a_{k+m-1} - \sum_{l=1}^{m-3} (l a_{k+m-l-2}) - 1 \}$$

総和をmを用いて表すことができたので、n乗和を考える。2乗和だけではなく、総和を用いてn乗和を一般化することができる。総和を使ってn乗和を求めた。(④) j乗和が分かっている時j乗和(S_j と定義する)を基本としてn乗和を計算することもできる(⑤)

$$\textcircled{4} A_m \cdot a_k^{n-1} - \sum_{l=m+1}^k A_{m-1} (a_l^{n-1} - a_{l-1}^{n-1})$$

$$\textcircled{5} S_{jk} \cdot a_k^{n-j} - \sum_{l=m+1}^k A_{m-1} (a_l^{n-j} - a_{l-1}^{n-j})$$

8. フィボナッチ数列の初項変更

フィボナッチ数列では初項が0、第二項が1である。漸化式がフィボナッチ数列と同様に定義されているリュカ数列において初項は2、第二項は1と定められている。リュカ数列はフランスの数学者エドゥアール・リュカにちなんで名づけられた。リュカ数にはフィボナッチ数列と同じく隣接する2項の比が黄金比である $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に近づいていくことなど様々な数学的性質が発見されている。

エビナッチ数列の隣接二項の比

リュカ数列とフィボナッチ数列の隣接二項の比が黄金比に近づいていくことより、エビナッチ数列においても同様に黄金比に近づいていくことが予想される。エビナッチ数列の漸化式である $b_{k+1} = b_k + b_{k-1}$ を特性方程式を用いてとくと

$$b_k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b_k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(b_k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b_{k-1}) \quad \text{---①}$$

$$b_{k+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}b_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(b_k - \frac{1-\sqrt{5}}{2}b_{k-1}) \quad \text{---②}$$

①の $b_k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b_{k-1}$ を c_k とする。また、②の $b_k - \frac{1-\sqrt{5}}{2}b_{k-1}$ を d_k とする。 c_k 、 d_k についてそれぞれ解くと、

$$c_{k+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_k, c_1 = b_1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)b_0 = \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha),$$

$$c_{k+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}$$

$$d_{k+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)d_k, d_1 = b_1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)b_0 = \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha),$$

$$d_{k+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}$$

$$d_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b_k - \left(b_{k+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}b_k\right) = \sqrt{5}b_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}$$

$$b_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}$$

となった。

隣接二項の比は、 $\frac{b_{k+1}}{b_k}$ を求めればよい。

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}}$$

これについて、 k を大きくしていった時を考えてみる。これを計算すると、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}}$$

であり、 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ より $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} = 0$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\sqrt{5}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left\{ \alpha - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\beta - \alpha) \right\}} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

以上より、エビナッチ数列においても同様に隣接二項の比は黄金比 φ に近づく。

9. シグマの消去

三乗和を求めることに成功したがシグマがまだ残っているので、それを消去したい。

$$\sum_{l=1}^k a_l^3 - a_{l-1}^3 = a_k^3 - a_{k-1}^3 + a_{k-1}^3 - a_{k-2}^3 + \dots - a_0^3 = a_k^3 - 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また、} \sum_{l=1}^k a_l^3 - a_{l-1}^3 = \sum_{l=1}^k (a_{l-2} + a_{l-1})^3 - a_{l-1}^3$$

ここで、 $(a_{l-2} + a_{l-1})^3 - a_{l-1}^3$ を変形すると、

$$\begin{aligned} (a_{l-2} + a_{l-1})^3 - a_{l-1}^3 &= a_{l-2}^3 + 3a_{l-2}^2 * a_{l-1} + 3a_{l-2}a_{l-1}^2 = a_{l-2}^3 + 3a_{l-2} * a_{l-1} (a_{l-2} + a_{l-1}) \\ &= a_{l-2}^3 + 3a_{l-2} * a_{l-1} * a_l \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{l=1}^k a_l^3 - a_{l-1}^3 = \sum_{l=1}^k a_{l-2}^3 + 3a_l * a_{l-1} * a_{l-2} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \textcircled{1} = \textcircled{2} \text{より、} a_k^3 - 1 = \sum_{l=1}^k a_{l-2}^3 + 3a_l * a_{l-1} * a_{l-2}$$

$$a_k^3 - 1 - \sum_{l=1}^k a_{l-2}^3 = 3 \sum_{l=1}^k a_l * a_{l-1} * a_{l-2} = 3 \sum_{l=3}^k a_l * a_{l-1} * a_{l-2} \quad (\because a_1 = 0)$$

$$1^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + a_k^3 = a_k^2 * a_{k+1} - \sum_{l=3}^k a_l * a_{l-1} * a_{l-2} = a_k^2 * a_{k+1} - \frac{a_k^3 - 1 - \sum_{l=1}^k a_{l-2}^3}{3}$$

$$\text{また、} 1^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + a_k^3 = \sum_{l=1}^k a_l^3 \text{より、これを仮に} S_{3k} \text{とすると、} S_{3k} = a_k^2 * a_{k+1} - \frac{a_k^3 - 1 - S_{3k-2}}{3}$$

$$\begin{aligned} 2S_{3k} &= 3a_k^2 * a_{k+1} - a_k^3 - (a_k^3 + a_{k-1}^3) + 1 \\ &= 3a_k^2 * a_{k+1} - a_{k-1}^3 - 2a_k^3 + 1 \end{aligned}$$

三乗和の場合に限っては、総和記号を計算できることが分かった。

無理数の連分数展開

名古屋市立向陽高等学校 ファレイ数列班

はじめに

例のように分母にさらに分数を含ませた分数を連分数と呼ぶ。

特に、分子をすべて 1 に統一した連分数を正則連分数と呼ぶ。

また、この連分数を循環する値に $\overline{\quad}$ をつけて表示することもある。

右の例の場合 $\rightarrow [1, \overline{2}]$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

例) $\sqrt{2}$ の展開結果

研究の動機・目的

- ファレイ数列という特定の分数に対する数列の特徴について調べていたところ、その性質の一つに連分数展開を絡ませたものがあり連分数に興味を持った。
- 無理数を正則連分数展開(以降はこれを連分数展開、展開と呼ぶ)しようとするとう値が循環しながら無限に続いていくことを知り、
任意の \sqrt{x} について循環する値や循環する値の個数等について展開する前に判断できるような法則性を見つけることを目的とした。

実験方法

$\sqrt{99}$ までの無理数を実際に連分数展開した結果を表に書き出し、共通点を探した。(表参照)

整数部分を a と置き、 $\sqrt{x} = \sqrt{a^2 + n}$ ($1 \leq n \leq 2a$) とすると、

- ① $\frac{2a}{n}$ が整数値をとるとき、循環する値の個数が総じて少なくなった。
- ② \sqrt{x} の循環の最後の値は $2a$ となる。
- ③ 循環する値が最後の $2a$ を除くと左右対称になっている。

今後の展望

これまでの研究の中で、 $\sqrt{99}$ までの数を連分数展開した結果を書き出した表から得られた仮説②と③が正しいということが証明できたので、これからの研究では仮説①が正しい事の証明方法を探していきたい。
②に関してはこの場合だけでなく広い範囲の値に対しても有効な方法を探していきたい。

仮説 1 $\frac{2a}{n}$ が整数の値をとるとき

例・ $\sqrt{6}$ ($a=2, n=2$)のとき $[2, \overline{2, 4}]$

・ $\sqrt{8}$ ($a=2, n=4$)のとき $[2, \overline{1, 4}]$

・ $\sqrt{10}$ ($a=3, n=1$)のとき $[3, \overline{6}]$

仮説 これらのように、 $\frac{2a}{n}$ が整数の値をとる時、循環の値の個数は 1 個もしくは 2 個であると思われる。

証明

《i》 n が偶数の時

$n=2m, a=ml$ (m, l は自然数)

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{x} &= \sqrt{m^2 l^2 + 2m} \\ &= ml + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{m^2 l^2 + 2m} - ml}} \\ &= ml + \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2 l^2 + 2m} + ml}{2m}} \\ &= ml + \frac{1}{l + \frac{\sqrt{m^2 l^2 + 2m} - ml}{2m}} \\ &= ml + \frac{1}{l + \frac{1}{\frac{2m}{\sqrt{m^2 l^2 + 2m} - ml}}} \\ &= ml + \frac{1}{l + \frac{1}{\frac{2m(\sqrt{m^2 l^2 + 2m} + ml)}{2m}}} \\ &= ml + \frac{1}{l + \frac{1}{2ml + \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2 l^2 + 2m} + ml}{2m}}}} \end{aligned}$$

・赤で示した部分が同じなため、以降同じ操作を繰り返す。

よってこのときの \sqrt{x} は $[ml, \overline{l, 2ml}] = [a, \frac{2a}{n}, 2a]$ の値で循環するとわかる。

《ii》 n が奇数の時

$\frac{2a}{n}$ →偶数より、 $\frac{2a}{n}=2k$ とおくと

$a=kn$ となる。

よって同様に展開して、

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{x} &= \sqrt{k^2 n^2 + n} \\ &= kn + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k^2 n^2 + n} - kn}} \\ &= kn + \frac{1}{\frac{\sqrt{k^2 n^2 + n} + kn}{n}} \\ &= kn + \frac{1}{2k + \frac{\sqrt{k^2 n^2 + n} - kn}{n}} \\ &= kn + \frac{1}{2k + \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{k^2 n^2 + n} - kn}}} \\ &= kn + \frac{1}{2k + \frac{1}{\frac{n(\sqrt{k^2 n^2 + n} + kn)}{n}}} \\ &= kn + \frac{1}{2k + \frac{1}{2kn + \frac{1}{\frac{\sqrt{k^2 n^2 + n} + kn}{n}}}} \end{aligned}$$

・赤で示した部分が同じなため、以降同じ操作を繰り返す。

よってこのときの \sqrt{x} は $[kn, \overline{2k, 2kn}] = [a, \frac{2a}{n}, 2a]$ の値で循環するとわかる。

結論

《i》, 《ii》より $\frac{2a}{n}$ が整数の値をとる時、 $[a, \frac{2a}{n}, 2a]$ の値で循環するといえる。

よって、 $\frac{2a}{n}=2a$ の時、つまり $n=1$ の時、 $2a$ の値一つだけで循環するといえる。

$n=1$ の時以外でも、右表のことが分かった。

$n=2$ の時、 $[a, \overline{a}, 2a]$

$n=a$ の時、 $[a, \overline{2}, 2a]$

$n=2a$ の時、 $[a, \overline{1}, 2a]$

$n=\frac{1}{2}a$ の時、 $[a, \overline{4}, 2a]$

「 $\frac{2a}{n}$ が整数のとき、循環する数が1つか2つになる」の逆の証明

$\sqrt{x} = \sqrt{a^2 + n} = [a, \overline{b, 2a}]$ とおく。このとき、 a, b, n は自然数になる。

このとき、

$$\sqrt{x} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{2a + \frac{1}{b + \dots}}}$$

になる。これを变形して、

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - a &= \frac{1}{b + \frac{1}{2a + \frac{1}{b + \dots}}} \\ &= \frac{1}{b + \frac{1}{2a + \sqrt{x} - a}} \\ &= \frac{1}{b + \frac{1}{\sqrt{x} + a}} \\ &= \frac{1}{\frac{b\sqrt{x} + ba + 1}{\sqrt{x} + a}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + a}{b\sqrt{x} + ba + 1}\end{aligned}$$

よって、

$$(\sqrt{x} - a)(b\sqrt{x} + ba + 1) = \sqrt{x} + a$$

これを解いて、

$$x = a^2 + \frac{2a}{b}$$

よって

$$n = \frac{2a}{b}$$

$$b = \frac{2a}{n}$$

になるので、 b は整数なので $\frac{2a}{n}$ は整数になる。

仮説2 \sqrt{x} の循環の最後の値

仮説

書き出した値の結果から、循環の最後の値は $2a$ であると思われる。

証明

$q_n = [\alpha_n]$ とする。 (q_n は α_n の正の整数部分とする。)

$$\begin{aligned} \sqrt{N} + [\sqrt{N}] = \alpha_1 &= q_1 + \frac{1}{\alpha_2} && \text{とおくと、} \\ &= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\alpha_3}} \dots && \text{となる。} \end{aligned}$$

$$\alpha_n = a + b\sqrt{N}, \quad \alpha'_n = a - b\sqrt{N}$$

(a, b は有理数) と定義すると

$$\alpha_n > 1, \quad -1 < \alpha'_n < 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\alpha'_{n0-1} = q_{n0-1} + \frac{1}{\alpha'_{n0}} \leftrightarrow -\frac{1}{\alpha'_{n0}} = q_{n0-1} - \alpha'_{n0-1}$$

$$\therefore \left[-\frac{1}{\alpha'_{n0}} \right] = q_{n0-1} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\alpha_{n0-1} = q_{n0-1} + \frac{1}{\alpha'_{n0}} \leftrightarrow \alpha_{n0-1} = \left[-\frac{1}{\alpha'_{n0}} \right] + \frac{1}{\alpha'_{n0}} \quad \dots\dots\dots ③$$

K 個の値で循環する、とすると

$$\alpha_{n0} = \alpha_{n0+k} \quad \dots\dots\dots ④$$

$$\alpha_{n0+k-1} = q_{n0+k-1} + \frac{1}{\alpha'_{n0+k}} \leftrightarrow \alpha_{n0+k-1} = \left[-\frac{1}{\alpha'_{n0+k}} \right] + \frac{1}{\alpha'_{n0+k}}$$

.....⑤

④より、③=⑤

よって、 $\alpha_{n0-1} = \alpha_{n0+k-1}$ が成り立つ。

これと④より最初の値 (α_1) から循環が始まると言える。

よって

$$\sqrt{N} + [\sqrt{N}] = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{k-1}]$$

$$\leftrightarrow \sqrt{N} + [\sqrt{N}] = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_1 + \dots}}}$$

$q_1 = 2[\sqrt{N}]$ より

$$\sqrt{N} = [\sqrt{N}] + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{2[\sqrt{N}]}}}$$

以上より、 $2[\sqrt{N}]$ が循環する最後の値になることがわかる。

$a + b\sqrt{N}$ のとき、 $a > 0$ 、 $b\sqrt{N} > 1$ ①

証明 (帰納法を用いる)

$n=1$ のとき

$$\alpha_1 = \sqrt{N} + [\sqrt{N}]$$

$$\sqrt{N} > 1, [\sqrt{N}] > 0 \text{ である。}$$

よって、 $n=1$ のとき①は成り立つ。

(i) $n=k$ のとき、

①が成り立つと仮定すると、

$$\alpha_k = a + b\sqrt{N} \text{ で、 } a > 0, b\sqrt{N} > 1 \dots\dots ②$$

このとき整数部分を c とすると、

$$a + b\sqrt{N} - 1 < c < a + b\sqrt{N} \dots\dots ③$$

この条件下で α_k を連分数展開すると、

$$\begin{aligned} \alpha_k &= c + (a + b\sqrt{N} - c) \\ &= c + \frac{1}{\frac{1}{a + b\sqrt{N} - c}} \end{aligned}$$

よって $\alpha_{k+1} = \frac{1}{a + b\sqrt{N} - c}$ なので、

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1}{(a - c) + b\sqrt{N}} = \frac{b\sqrt{N} + c - a}{\{b\sqrt{N} + (a - c)\}\{b\sqrt{N} - (a - c)\}} \\ &= \frac{b\sqrt{N} + c - a}{b^2 - (a - c)^2} > 0 \end{aligned}$$

よって②と③より①は成り立つ。

このとき α'_{k+1} と α_{k+1} は共役なので

$$\begin{aligned} \alpha'_{k+1} &= \frac{-a + c - b\sqrt{N}}{b^2 - (a - c)^2} \\ &= -\frac{b\sqrt{N} + a - c}{(b\sqrt{N} + a - c)(b\sqrt{N} - a + c)} \\ &= -\frac{1}{b\sqrt{N} - a + c} \end{aligned}$$

ここで①より

$$2b\sqrt{N} - 1 < b\sqrt{N} - a + c < 2b\sqrt{N}$$

$b\sqrt{N} > 1$ より、

$$1 < b\sqrt{N} - a + c < 2$$

$$\therefore -1 < \alpha'_{k+1} < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore -1 < \alpha'_k < 0$$

よって①は成り立つ

仮説3 対称性

具体的な証明

平方数ではない 2 以上の整数 X に対し,

$$\sqrt{x} \text{ は } \sqrt{x} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$$

という形で連分数展開される

主張. 平方数ではない 2 以上の整数 X に対し,

$$\text{連分数展開 } \sqrt{x} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$$

において数列 a_0, a_1, \dots, a_n は回文的である.

\sqrt{x} を $[a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, 2a_0}]$ と連分数展開しておく.

ここで, $a_0 = [\sqrt{x}]$ を超えない最大の整数である.

$a_0 + \sqrt{x}$ は純循環連分数 $[2a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$

として表されるので,

$$a_0 + \sqrt{X} = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_0 + \sqrt{X}}}}}}$$

が成り立つ. 上の式で \sqrt{x} を $-\sqrt{x}$ で置き換えると

$$a_0 - \sqrt{X} = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_0 - \sqrt{X}}}}}}$$

が成り立つ. $Y := \sqrt{x} - a_0$ とおくと

$$Y = -2a_0 - \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n - \frac{1}{Y}}}}}$$

である. ここから

$$\frac{1}{2a_0 + Y} = -a_1 - \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n - \frac{1}{Y}}}}}$$

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{2a_0 + Y}} = -a_2 - \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n - \frac{1}{Y}}}}}$$

のように右辺の整数部分を左辺に移行して逆数を取る

操作を繰り返すと, 最終的に

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{2a_0 + Y}}}} = \frac{1}{Y}$$

が得られる.

よって,

$$1/Y = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, 1/Y] \text{ である.}$$

従って

$$1/Y = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, 2a_0]$$

であり $Y = X$

$$Y = \sqrt{x} - a_0 \text{ は } [0, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, 2a_0]$$

と循環連分数展開されることが分かった.

$$\text{従って, } \sqrt{x} = [a_0, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, 2a_0]$$

$$\text{であるが } X = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, 2a_0]$$

と比較すると, 循環節に現れる a_1, \dots, a_n の部分が逆順に並んでいることが分かる.

一つの実数を連分数展開する方法は一通りなので,

a_1, \dots, a_n は回文的である.

| \sqrt{x} | | a | n | 周期 |
|------------|--|---|----|--------------------------|
| 2 | | 1 | 1 | 2 |
| 3 | | | 2 | 1,2 |
| 5 | | 2 | 1 | 4 |
| 6 | | | 2 | 2,4 |
| 7 | | | 3 | 1,1,1,4 |
| 8 | | | 4 | 1,4 |
| 10 | | 3 | 1 | 6 |
| 11 | | | 2 | 3,6 |
| 12 | | | 3 | 2,6 |
| 13 | | | 4 | 1,1,1,1,6 |
| 14 | | | 5 | 1,2,1,6 |
| 15 | | | 6 | 1,6 |
| 17 | | 4 | 1 | 8 |
| 18 | | | 2 | 4,8 |
| 19 | | | 3 | 2,1,3,1,2,8 |
| 20 | | | 4 | 2,8 |
| 21 | | | 5 | 1,1,2,1,1,8 |
| 22 | | | 6 | 1,2,4,2,1,8 |
| 23 | | | 7 | 1,3,1,8 |
| 24 | | | 8 | 1,8 |
| 26 | | 5 | 1 | 10 |
| 27 | | | 2 | 5,10 |
| 28 | | | 3 | 3,2,3,10 |
| 29 | | | 4 | 2,1,1,2,10 |
| 30 | | | 5 | 2,10 |
| 31 | | | 6 | 1,1,3,5,3,1,1,10 |
| 32 | | | 7 | 1,1,1,10 |
| 33 | | | 8 | 1,2,1,10 |
| 34 | | | 9 | 1,4,1,10 |
| 35 | | | 10 | 1,10 |
| 37 | | 6 | 1 | 12 |
| 38 | | | 2 | 6,12 |
| 39 | | | 3 | 4,12 |
| 40 | | | 4 | 3,12 |
| 41 | | | 5 | 2,2,12 |
| 42 | | | 6 | 2,12 |
| 43 | | | 7 | 1,1,3,1,5,1,3,1,1,12 |
| 44 | | | 8 | 1,1,1,2,1,1,1,12 |
| 45 | | | 9 | 1,2,2,2,1,12 |
| 46 | | | 10 | 1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12 |
| 47 | | | 11 | 1,5,1,12 |
| 48 | | | 12 | 1,12 |

| \sqrt{x} | | a | n | 周期 |
|------------|--|---|----|----------------------------------|
| 50 | | 7 | 1 | 14 |
| 51 | | | 2 | 7,14 |
| 52 | | | 3 | 4,1,2,1,4,14 |
| 53 | | | 4 | 3,1,1,3,14 |
| 54 | | | 5 | 2,1,6,1,2,14 |
| 55 | | | 6 | 2,2,2,14 |
| 56 | | | 7 | 2,14 |
| 57 | | | 8 | 1,1,4,1,1,14 |
| 58 | | | 9 | 1,1,1,1,1,1,14 |
| 59 | | | 10 | 1,2,7,2,1,14 |
| 60 | | | 11 | 1,2,1,14 |
| 61 | | | 12 | 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14 |
| 62 | | | 13 | 1,6,1,14 |
| 63 | | | 14 | 1,14 |
| 65 | | 8 | 1 | 16 |
| 66 | | | 2 | 8,16 |
| 67 | | | 3 | 5,2,1,1,7,1,1,2,5,16 |
| 68 | | | 4 | 4,16 |
| 69 | | | 5 | 3,3,1,4,1,3,3,16 |
| 70 | | | 6 | 2,1,2,1,2,16 |
| 71 | | | 7 | 2,2,1,7,1,2,2,16 |
| 72 | | | 8 | 2,16 |
| 73 | | | 9 | 1,1,5,5,1,1,16 |
| 74 | | | 10 | 1,1,1,1,16 |
| 75 | | | 11 | 1,1,1,16 |
| 76 | | | 12 | 1,2,1,1,5,4,5,1,1,2,1,16 |
| 77 | | | 13 | 1,3,2,3,1,16 |
| 78 | | | 14 | 1,4,1,16 |
| 79 | | | 15 | 1,7,1,16 |
| 80 | | | 16 | 1,16 |
| 82 | | 9 | 1 | 18 |
| 83 | | | 2 | 9,18 |
| 84 | | | 3 | 6,18 |
| 85 | | | 4 | 4,1,1,4,18 |
| 86 | | | 5 | 3,1,1,1,8,1,1,1,3,18 |
| 87 | | | 6 | 3,18 |
| 88 | | | 7 | 2,1,1,1,2,18 |
| 89 | | | 8 | 2,3,3,2,18 |
| 90 | | | 9 | 2,18 |
| 91 | | | 10 | 1,1,5,1,5,1,1,18 |
| 92 | | | 11 | 1,1,2,4,2,1,1,18 |
| 93 | | | 12 | 1,1,1,4,6,4,1,1,1,18 |
| 94 | | | 13 | 1,2,3,1,1,5,1,8,1,5,1,1,3,2,1,18 |
| 95 | | | 14 | 1,2,1,18 |
| 96 | | | 15 | 1,3,1,18 |
| 97 | | | 16 | 1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18 |
| 98 | | | 17 | 1,8,1,18 |
| 99 | | | 18 | 1,18 |

曲がる国歌と曲率

ノートルダム女学院高等学校3年

1 研究の動機と背景

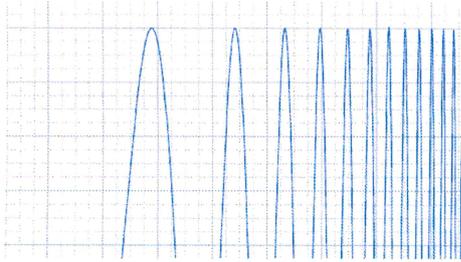


図 1: $\sin(x^x)$ のグラフ

→ 「音楽」を「曲率」で表現できないか？

「nPVI を用いた日本民謡のリズム跳躍の計量分析 (2019, 河瀬 彰宏)」

2 研究の目的

「国歌の曲調」「国歌の雰囲気」

→ 「曲率」を用いたグラフで表す

調査対象: 日, 韓, 中, 露, 米, 英, 仏, 独, 芬 (9カ国)

3 曲率の定義

定義 1. 曲率半径 R とは, 関数 $f(x)$ 上の異なる 2 点, $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ について, 点 Q を点 P に限りなく近づけた時, 点 P と点 Q の接線の交点を中心として, 点 P を通る円 (曲率円) の半径のこと.

$$R_P = \frac{\sqrt{[f'(p)]^2 + 1}^3}{|f''(p)|} \quad (1)$$

曲率 (K) とは, 曲率半径の逆数で定義される量.

$$K = \frac{1}{R} \quad (2) \quad (七).$$

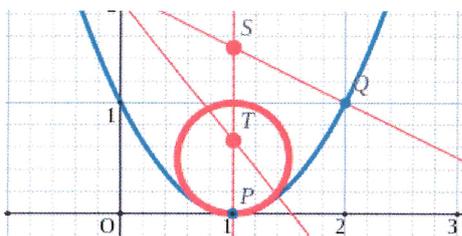


図 2: 曲率の定義イメージ

4 研究方法

(一). 音 → 縦軸 = $\frac{\text{振動数}}{440}$, 横軸 = 時間 (*) の座標

(二). 時系列順に, 各点を極点とするグラフ

極点とは, 曲線上で接線の傾きの正負が変わる点

(三). 上のグラフの隣り合う 2 極点について, 放物線

$$y = ax^2 \quad (3)$$

で近似

ただし, 横軸の値が大きいほうを放物線の頂点かつ原点に
(四). 各頂点における曲率

$$\kappa = 2|a| \quad (4)$$

を求める

(五).

定義 2.

$$\kappa'(a) = \begin{cases} -\kappa(a > 0) \\ +\kappa(a < 0) \\ 0(a = 0) \end{cases}$$

このとき, $-\kappa$ を「負の曲率値」

$+\kappa$ を「正の曲率値」

(六).

定義 3.

$$\text{テンポ調整係数 } (m) = \frac{(\text{拍数}) * 60}{(\text{秒数})} \quad (5)$$

得たデータを「曲率*」「曲率値*」とする

$$m\kappa = (\text{曲率*}) \quad (6)$$

$$m\kappa' = (\text{曲率値*})$$

定義 4.

$$\text{Delta 振動数} = \frac{\text{振動数の差}}{440} \quad (7)$$

縦軸=「曲率値*+Delta 振動数」

横軸=音符間番号のグラフ(変化のグラフ)を作成

(八).「曲の構成」「構成音」「リズム」の3観点

→ 各国国歌の類似性の調査 → 評価基準に

(九). 得たグラフ(結果2), 評価基準(結果1)の類似性を比較

評価基準項目例:

- ・主音を曲中25%以上含む
- ・主音を曲中22%以上含む
- ・主音を曲中22%以上25%未満含む
- ・四分の三拍子である
- ・主音で始まる

5 結果1-評価基準

| | |
|----|-----------------|
| 29 | (仏,米) |
| 28 | |
| 27 | |
| 26 | (中,仏) |
| 25 | |
| 24 | (芬,露) |
| 23 | (仏,露) |
| 22 | (中,露)(露,米)(英,米) |
| 21 | (芬,米) |
| 20 | (英,韓)(英,独) |
| 19 | (中,韓) |
| 18 | (中,米)(芬,仏)(芬,独) |

| | |
|----|---------------------------|
| 17 | (中,英)(芬,韓)(仏,日)(日,米)(米,独) |
| 16 | (中,芬)(芬,日)(仏,韓)(米,韓)(韓,独) |
| 15 | (仏,独)(日,英)(日,韓)(露,韓) |
| 14 | (仏,英)(日,独)(露,英) |
| 13 | (芬,英) |
| 12 | (中,日) |
| 11 | (中,露)(露,独) |
| 10 | |
| 9 | |
| 8 | |
| 7 | (日,露) |

6 結果2-グラフ



図3: 曲率値*+Delta 振動数

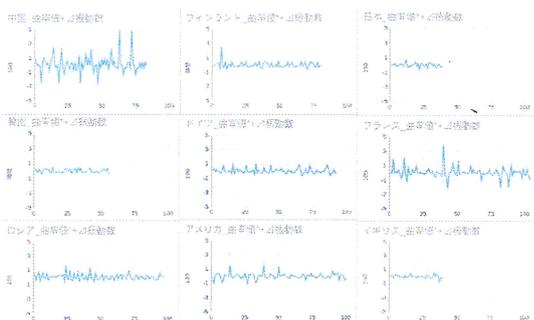


図4: 参考結果-各国歌の比較-「曲の激しさ」とは

7 結果3-グラフの統計データ

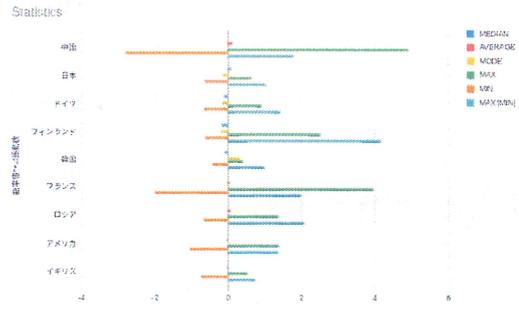


図5: 曲率値*+Delta 振動数の統計図

8 考察

1. グラフから, 曲の激しさ (= 雰囲気) を読み取れる
2. グラフと評価基準のとりわけの数値的類似性は見受けられない
3. MEDIAN がすべて 0 付近であることが, 正の変化と負の変化がほぼ同数であることを表す
4. MODE が 0 の国は, MODE が曲中で占める割合 (MODE-A) 自体も大きい
5. MEDIAN が 0 の国と MODE が 0 の国は全く等しい

9 まとめと結論

1. 曲調のグラフ化に一部成功した
2. 客観的数値の評価を得られていない
3. 定義量の改善が必要

10 今後の展望

1. より客観的なメロディのグラフ化を目指す
2. バッハの「フーガの技法」を通して定義量の改善を図る
3. 音楽の三要素を全て反映する (伴奏, 副旋律)
4. 各国の古今の音楽, 言語との関連を調査する

11 参考結果「曲率」と「曲率値」の違い

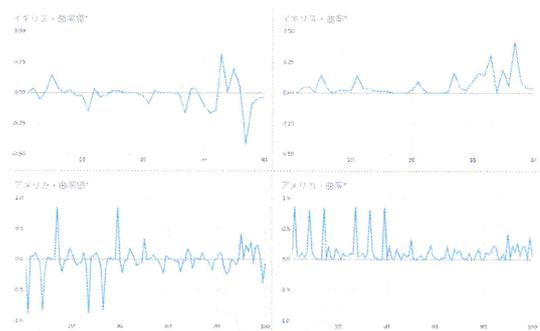


図6: 参考結果-曲率系と曲率値系の比較

中線定理とスチュワートの定理の拡張

奈良女子大学附属中等教育学校

1. 概要

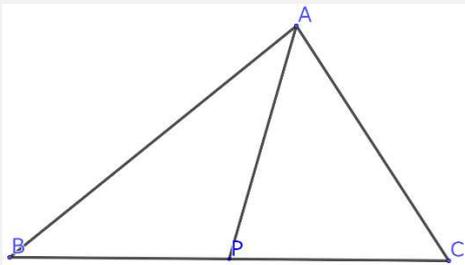
$\triangle ABC$ の辺 BC を 2 等分するときに成り立つ中線定理を拡張して、辺を n 等分したときに成り立つ定理を証明した。

2. 研究内容

中線定理とは

$\triangle ABC$ と辺 BC の中点 P について次のような式が成り立つ。

$$AC^2 + AB^2 = 2(BP^2 + AP^2)$$

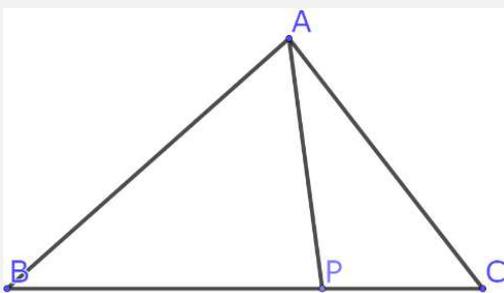


中線定理は三平方の定理で証明できる。

スチュワートの定理とは

$\triangle ABC$ の辺 BC を点 P で内分すると次のような式が成り立つ。

$$AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP = BC(BP \cdot CP + AP^2)$$

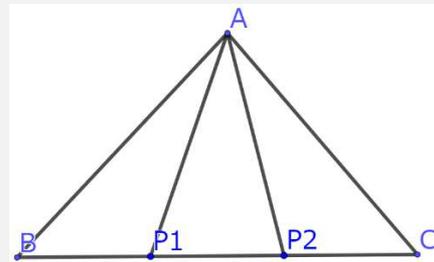


スチュワートの定理は三平方の定理または余弦定理で証明できる。

3 等分したとき

$\triangle ABC$ の辺 BC を点 P_1, P_2 で三等分するとき、次のような式が成り立つことが分かっている。

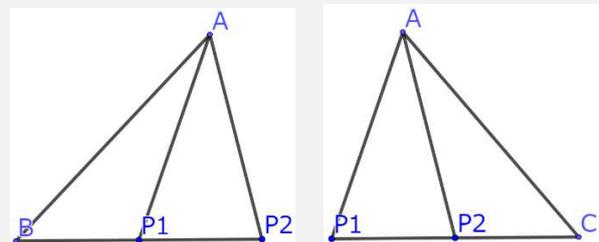
$$AC^2 + AB^2 = 4BP_1^2 + AP_1^2 + AP_2^2$$



この命題には主に 2 つの証明方法がある。

(i) 中線定理を使う方法

- ① $\triangle ABP_2$ の辺 BP_2 の中点 P_1 において中線定理を使う。
- ② $\triangle AP_1C$ の辺 P_1C の中点 P_2 において中線定理を使う。
- ③ ①, ② で導いた式を足して計算する。



(ii) スチュワートの定理

- ① 点 P_1 についてスチュワートの定理を使う。
- ② 点 P_2 についてスチュワートの定理を使う。
- ③ ①, ② で導いた式を足して計算する。

4,5,6,7 等分した場合

(ii)の方法で考えた。

・ 2 等分

$$1(AC^2 + AB^2) = 2(AP^2) + 2BP^2$$

・ 3 等分

$$1(AC^2 + AB^2) = 1(AP_1^2 + AP_2^2) + 4BP_1^2$$

・ 4 等分

$$3(AC^2 + AB^2) = 2(AP_1^2 + \dots + AP_3^2) + 20BP_1^2$$

・ 5 等分

$$2(AC^2 + AB^2) = 1(AP_1^2 + \dots + AP_4^2) + 20BP_1^2$$

・ 6 等分

$$5(AC^2 + AB^2) = 2(AP_1^2 + \dots + AP_5^2) + 70BP_1^2$$

・ 7 等分

$$3(AC^2 + AB^2) = 1(AP_1^2 + \dots + AP_6^2) + 56BP_1^2$$

$AC^2 + AB^2$ と $AP_1^2 + \dots + AP_n^2$ の係数比の値

は、それぞれ $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$ である。つま

り、 n 等分するとき比の値は $\frac{n-1}{2}$ になると予

想できる。

n 等分したとき

定理 1

$\triangle ABC$ の辺 BC を点 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} で n 等分し

たとき、

$$\frac{n-1}{2}(AC^2 + AB^2) = \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2$$

が成り立つ。

(証明)

点 AP_k においてスチュワートの定理より

$$AC^2 \cdot BP_k + AB^2 \cdot CP_k = BC(BP_k \cdot CP_k + AP_k^2)$$

ここで、

$$BP_k = kBP_1, CP_k = (n-k)BP_1, BC = nBP_1$$

より、

$$kAC^2 + (n-k)AB^2 = n\{k(n-k)BP_1^2 + AP_k^2\}$$

この式を $1 \leq k \leq n-1$ の範囲で足し合わせる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} kAC^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)AB^2 = \sum_{k=1}^{n-1} n\{k(n-k)BP_1^2 + AP_k^2\}$$

これを整理すると

$$\frac{n-1}{2}(AC^2 + AB^2) = \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2$$

(Q.E.D.)

インターネットに次のような定理が掲載されていた。

定理 2

$\triangle ABC$ において、辺 BC を n 等分する点を

P_1, P_2, \dots, P_{n-1} とするとき、

$$AB^2 + AC^2 = AP_1^2 + AP_{n-1}^2 + 2(n-1)BD_1^2$$

が成り立つ。

この定理は同じ三角形について(i)の方法で証明している。

定理 2 の式を $\frac{n-1}{2}$ 倍すると、

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2}(AB^2 + AC^2) \\ &= \frac{n-1}{2}AP_1^2 + \frac{n-1}{2}AP_{n-1}^2 + (n-1)^2 BP_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AP_1^2 + AP_{n-1}^2 + (n-1)^2 BD_1^2 + \frac{n-3}{2}(AP_1^2 + AP_{n-1}^2) \\
&= AP_1^2 + AP_{n-1}^2 + (n-1)^2 BP_1^2 \\
&\quad + \frac{n-3}{2}(AP_2^2 + AP_{n-2}^2 + 2(n-3)BP_1^2) \\
&= AP_1^2 + AP_2^2 + AP_{n-2}^2 + AP_{n-1}^2 \\
&\quad + \{(n-1)^2 + (n-3)^2\}BP_1^2 \\
&\quad + \frac{n-5}{2}(AP_2^2 + AP_{n-2}^2)
\end{aligned}$$

この変形を行うたびに、()内の式に一つ内側の線分の平方が現れる。最終的に n が偶数のときには中線定理のような図が、 n が奇数の際は三等分したときの定理のような図が得られる。

① n が偶数の場合

式変形を $\frac{n-2}{2}$ 回繰り返すと

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{2}(AB^2 + AC^2) &= AP_1^2 + \dots + AP_{\frac{n-2}{2}}^2 + AP_{\frac{n+2}{2}}^2 \\
&+ \dots + AP_{n-1}^2 + \{(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots + 3^2\}BP_1^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left(AP_{\frac{n-2}{2}}^2 + AP_{\frac{n+2}{2}}^2\right)
\end{aligned}$$

ここで、中線定理を用いて、

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2 + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} (2j+1)^2 BP_1^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(n-1)BP_1^2
\end{aligned}$$

② n が奇数の場合

式変形を $\frac{n-3}{2}$ 回繰り返すと

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}(AB^2 + AC^2) &= AP_1^2 + \dots + AP_{\frac{n-3}{2}}^2 + AP_{\frac{n+3}{2}}^2 \\
&+ \dots + AP_{n-1}^2 + \{(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots + 4^2\}BP_1^2 \\
&+ \left(AP_{\frac{n-3}{2}}^2 + AP_{\frac{n+3}{2}}^2\right)
\end{aligned}$$

ここで、三等分したときの定理を用いて、

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2 + 4\sum_{k=j}^{\frac{n-1}{2}} j^2 BP_1^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} AP_k^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(n-1)BP_1^2
\end{aligned}$$

したがって、いずれの n に対しても

$$\frac{n-1}{2}(AC^2 + AB^2) = \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} AP_i^2$$

定理 2 のメリット

1 つ内側の線分が式に含まれているので帰納的に考えるのに適している

定理 1 のメリット

すべての線分が式に含まれているので全体を同時に考えることができる

3. 結果・考察・今後の課題

三角形の 1 つの辺を n 等分したときに成り立つ式を導出して中線定理を拡張することができた。

これからは、中線定理を多角形や多次元の立体に拡張する研究をしたいと思う。

また、中線定理には幾つか証明方法があるので今回証明した定理の別証明を考えたい。

4. 参考文献

[1] 高校数学の美しい物語. 「スチュワートの定理の証明とその仲間」, <https://manabitimes.jp/math/688>

[2] Accademia Nuts. 「中線定理の拡張?」, <https://ameblo.jp/accade/entry-12250886087.html>

質問・助言等はこちらにお願いします。

tm.hn1184@gmail.com

復元数

1. 説明

自然数 N の正の約数の総和を考える際、その正の約数のうち、 N ではない異なる特定の2つを選び(α, β とする)、それらを負として総和を考える。その総和が N の2倍になる N を復元数と呼ぶ。

すなわち、

$$N \text{ が復元数である。} \Leftrightarrow 2N = (N \text{ の正の約数の総和}) - 2(\alpha + \beta)$$

例) $N=30$ は復元数。

正の約数は 1,2,3,5,6,10,15,30

(α, β) を (1,5) とすると、

$$-1+2+3-5+6+10+15+30=60=2N$$

2. 方法

次の①, ②を満たす自然数 N を探す。

① N が過剰数であり、 $2N < (N \text{ の正の約数の総和}) \leq \frac{11}{3}N$ を満たす。

② 約数の和の公式を利用して、

$$\frac{(N \text{ の正の約数の総和}) - 2N}{2} = \text{ある2つの約数の和}$$

3. 結果

・コンピューターを使用して2000万まで調べ、約1300個の復元数を発見し、以下の性質を発見した。

① $N = (\text{完全数}) \times (\text{素数})^2 \Rightarrow N$ は復元数 (この完全数と素数は互いに素) 例) 150

② $N = (\text{偶数の完全数}) \times 2^2 \Rightarrow N$ は復元数 例) 24

③ $N = 2^{2k} \times (2^k - 1) \Rightarrow N$ は復元数であり、因数が2種類存在する。ここで、 $(2^k - 1)$ はメルセンヌ素数とする。

例) 48

④ $N = 2^{k-1} \times (2^k - 1) \times (2^m - 1) \Rightarrow N$ は復元数 例) 84

ここで、 $(2^k - 1), (2^m - 1)$ はともにメルセンヌ素数であり、 $m < k$ を満たす。

⑤ 復元数が無限個存在する。

⑥ 10個の奇数の復元数を発見した。例) 2205, 19845, 236925, 1102725, 2132325, 2401245, 6243237, 8164233, 8281845, 17690805

4. 考察

復元数の中に完全数やメルセンヌ素数が約数に含まれているものが多くあったので、復元数とそれらの数の間には関係があるのではないかと思った。

5. 今後の展望

・奇数の復元数についての規則性を調べる ・ある復元数から完全数を導き出す式の発見

6. 参考文献

HP「過剰数一覧」<https://number-pedia.com/abundant/>

HP「メルセンヌ数とは」<https://dic.nicovideo.jp/a/%E3%83%A1%E3%83%AB%E3%82%BB%E3%83%B3%E3%83%8C%E6%95%B0>

HP「高校数学の美しい物語」<https://manabitimes.jp/math/883>

偏差値の誤差

1. 本研究の目的

学生が自分の学力を知るために必要不可欠である偏差値について興味を持ち、調べることにした。

2. 方法

正確に偏差値を求める式と簡易的に偏差値を求める式の二つの式を用意し、二つの式で求めた偏差値の誤差について調べる。

もとの自分の点数を x_1 、もとの平均点を \bar{x} 、もとの偏差値を T 、テストを受けた人数を n 、上げる点数を y 、上がる正確な偏差値を q 、上がる簡易的な偏差値を q' とすると、

$$T + q = \frac{(x_1 - \bar{x}) + y\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x^2 - (\bar{x})^2 + \frac{2y}{n}(x_1 - \bar{x}) + \frac{y^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}} \times 10 + 50 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$T + q' = \frac{(x_1 - \bar{x}) + y}{\sqrt{x^2 - (\bar{x})^2}} \times 10 + 50 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \left(q' = \frac{10y}{\sqrt{x^2 - (\bar{x})^2}} \right)$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より、 } q - q' = 10 \left\{ \frac{(x_1 - \bar{x}) + y\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x^2 - (\bar{x})^2 + \frac{2y}{n}(x_1 - \bar{x}) + \frac{y^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}} - \frac{(x_1 - \bar{x}) + y}{\sqrt{x^2 - (\bar{x})^2}} \right\}$$

この差が -0.1 から 0.1 の範囲に収まるとき、誤差がないと考える。

とある模試の結果を代入して、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ の値を調べる。有効数字は3桁とする。

$T = 71.6$ 、 $x_1 = 85$ 、 $\bar{x} = 54.6$ 、 $n = 358$ 、 $\bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = 14.1$ 、 $y = 10$ とする。

4. 結果

代入した結果、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ は -0.162 となり、 -0.1 から 0.1 の範囲に収まらなかった。つまりこの時、 $\textcircled{2}$ の式で偏差値を求めるのは誤差が生じるため、不適切だと分かった。

5. 考察・結論

母体となる試験者の人数が多くなるほど、 $\textcircled{2}$ で求めた偏差値はより正しいものとなるので、 $q - q'$ と n の関係性に注目すると $\textcircled{2}$ 式で偏差値を求めてよい人数がわかると考えた。

6. 今後の展望

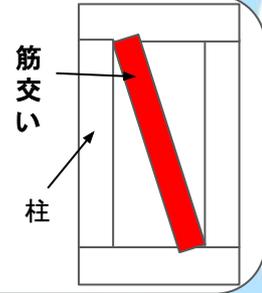
n 以外の値を決めて代入して、 $q - q'$ と n の方程式を立てる。この実験を様々な値で行うことによって、 $q - q'$ と n の関係性をグラフ化しようと考えた。そして、 n を学校の学年人数として、ほかの値の条件を調べていこうと思う。こうすることで、模試や定期考査の校内データに適用し、学業に活用できると考える。

7. 参考文献

チャート式基礎からの数学II+B P632 偏差値について

建築補強の効率化

- 目的: ①補強に必要な筋交いという補強部材の必要最低限の本数を求めることで、 unnecessary筋交いを減らし、材料費を削減できるようにする。
 ②必要最低限の筋交いの本数が簡単に求められない例外にあたる図形の判別方法を考える。



目的 ① について

方法: 二部グラフを用いて必要最低限の筋交いの本数を考える。

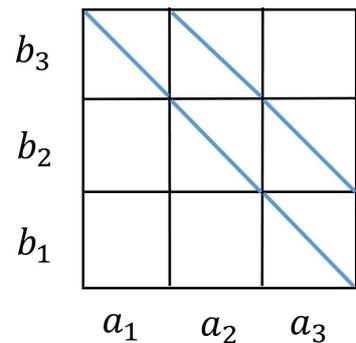
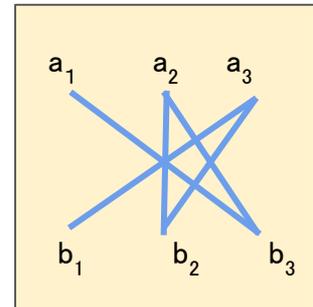
※二部グラフ…頂点集合を2つに分解して各部分の頂点は互いに隣接しないグラフ (今回では点a同士、点b同士で結ぶことができない。)

例えば右図の横3ブロック、縦3ブロックの正方形の場合、 a_1 と b_3 によって囲まれたブロックに筋交いを入れたのに対応するように、二部グラフでは2点 a_1, b_3 を結ぶ。このような作業を続けていき、二部グラフの3点 a_1, a_2, a_3 がそれぞれ3点 b_1, b_2, b_3 のすべての点と結ばれているとき、図形の補強は完了である。

(右図の場合、 a_1 と b_2 によって囲まれたブロックは補強できていないように見えるが、二部グラフ上で a_1 と b_2 は b_3, a_2 を経由することで結ばれているため補強できている。)

また、対象の図形を長方形などにも変えて必要最低限の筋交いの本数を調べた。

二部グラフ



結果: 一般的に、ある図形を補強する必要最低限の筋交いの本数は、

(縦の最大ブロック + 横の最大ブロック) - 1 (本)

であった。

例えば上で挙げた図形では、縦の最大ブロックが3、横の最大ブロックが3であるので、

$3 + 3 - 1 = 5$ 本の筋交いが必要である。

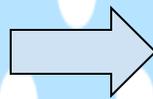
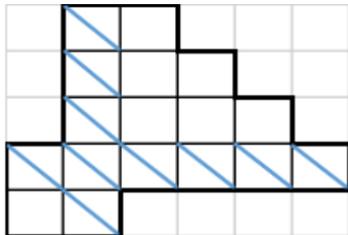
上記の方法が適用できない場合の判別

目的②について

必要な筋交いの本数が、①で求められない図形を見つけ、その共通点を探す

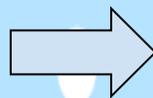
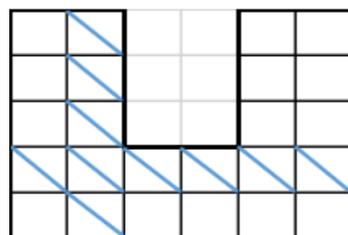
(1) (2) の図形のうち例外に当たる図形は (2) であった。
なぜだろう？

(1)



| | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|
| 1 A | | 4 B | 3 B | 2 B | 1 B |
| 2 A | | 5 B | 4 B | 3 B | 2 B |
| 3 A | | 6 B | 5 B | 4 B | 3 B |
| | | | | | |
| 1 C | | 4 D | 3 D | 2 D | 1 D |

(2)



| | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|
| 1 A | | 4 B | 3 B | 2 B | 1 B |
| 2 A | | 5 B | 4 B | 3 B | 2 B |
| 3 A | | 6 B | 5 B | 4 B | 3 B |
| | | | | | |
| 1 C | | 4 D | 3 D | 2 D | 1 D |

手順:それぞれの図形を長方形から一部が切り取られたものと見て考える。
次に、もとの四角形に四隅から番号を振る。

結果:例外の図形は、番号の小さい順に切り取られていないことがわかった

倍数判定法

大阪府立大手前高等学校

●導入

一般に、ある数字が3の倍数であるかを判定する時、各位の数字の和が3の倍数ならばその数字は3の倍数になることが知られている。ここから考えを発展させて、すべての整数に適用できる倍数の判定法を作った。また合同式や関数を用いてより研究を深める。

●方法

判定したい整数を N とすると、 N は整数 a, b を用いて $10a+b$ とあらわすことができる。

まずは具体的に考えてみる。13の倍数について考えるとき、

$$N = 10a + b = (13a - 3a) + b = 13a + (-3a + b)$$

$$\boxed{-3a+b \text{ が } 13 \text{ の倍数} \Leftrightarrow N \text{ は } 13 \text{ の倍数}}$$

●一般性を保つことの説明

整数 N が k の倍数かどうかを判定する(ただし k は自然数)。

整数 N は整数 a, b を用いて $10a+b$ とあらわすことができる。

$$\therefore N = 10a + b = ka + M \quad (M \text{ は整数}) \cdots \textcircled{1}$$

$$M = (10 - k)a + b \cdots \textcircled{2}$$

②を①に代入して、

$$N = ka + \{(10 - k)a + b\}$$

このとき M が k の倍数であれば N は k の倍数である。

これは逆も成り立つ。

\therefore 整数 M が k の倍数 \Leftrightarrow 判定したい整数 N は k の倍数

●商・余りを出す手順

特に言及のない限り、この手順で扱う文字はすべて整数とする。

割られる数を $10a+b$ 、割る数を k (ただし k は自然数)、求めたい商を x 、求めたい余りを y ($0 \leq y < k$) とおくと

$$10a + b = kx + y \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } 10a + b = ka + \{(10 - k)a + b\} \cdots \textcircled{2}$$

ここで $(10 - k)a + b$ を k で割った時の商を m 、余りを n とする。

$$(10 - k)a + b = km + n \cdots \textcircled{3} \quad \text{とおく, } (0 \leq n < k)$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } 10a + b = ka + km + n = k(a+m) + n \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より } kx + y = k(a+m) + n$$

$$k\{x - (a+m)\} = n - y$$

$$0 \leq y < k, 0 \leq n < k \text{ より } -k < n - y < k$$

$$\text{ゆえに } -1 < x - (a+m) < 1$$

$x - (a+m)$ は整数だから $x - (a+m) = 0, n - y = 0$ である。したがって $x = a+m, y = n$

●合同式を用いた考え方

整数 N を k の倍数かどうかについて判定する（整数 N は m 桁）。

k を法とするとき、

$$1 \equiv 1$$

$$10 \equiv 10 - k$$

$$10^2 \equiv (10 - k)^2$$

⋮

$$10^{m-2} \equiv (10 - k)^{m-2}$$

$$10^{m-1} \equiv (10 - k)^{m-1}$$

判定法

$0 \leq \alpha < k$ (α は整数) とする。

$$(10 - k)^{m-1} \times (N \text{ の } m \text{ 桁目の数字}) + (10 - k)^{m-2} \times (N \text{ の } m - 1 \text{ 桁目の数字})$$

+ ⋯

$$\dots + (10 - k) \times (N \text{ の } 2 \text{ 桁目}) + (10 - k)^0 \times (N \text{ の } 1 \text{ 桁目}) \equiv \alpha \pmod{k}$$

この判定法は次のように表すこともできる。

10^0 の位の数字を a_1 、 10^1 の位の数字を $a_2, \dots, 10^{i-1}$ の位の数字を a_i とする。

$$\sum_{i=1}^m a_i (10 - k)^{i-1} \equiv \alpha \pmod{k}$$

N を k で割った余りが α

とくに $\alpha=0$ のときに N は k の倍数

例) 41431 が 13 の倍数であるかを判定する。

上の判定法を用いて考える。このとき、 $m=5, k=13$ であるから

$$\sum_{i=1}^5 a_i (10 - 13)^{i-1}$$

$$= (-3)^{5-1} \times 4 + (-3)^{4-1} \times 1 + (-3)^{3-1} \times 4 + (-3)^{2-1} \times 3 + (-3)^{1-1} \times 1$$

$$= 325 \equiv 0 \pmod{13}$$

∴ 41431 は 13 の倍数である。

$$(41431 = 13 \times 3187)$$

●関数を用いた考え方

判定したい整数を N とする。割る数を k (ただし k は自然数) とする。

$$N=10a+b \text{ とおく } (a,b \text{ は実数})、b=N-10a \cdots \textcircled{1}$$

$$10a+b=ka+\{(10-k)a+b\}$$

$(10-k)a+b=km$ (m は整数) とおく。

$$b=km-(10-k)a \cdots \textcircled{2}$$

①、②より

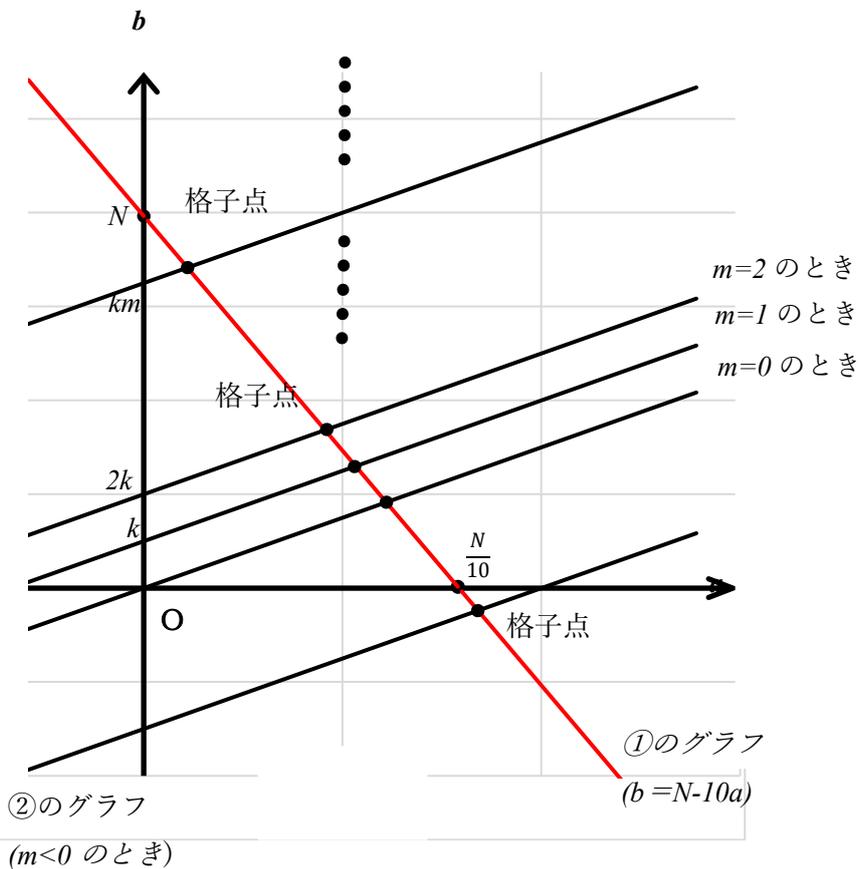
$$N-10a=km-(10-k)a=km-10a+ak$$

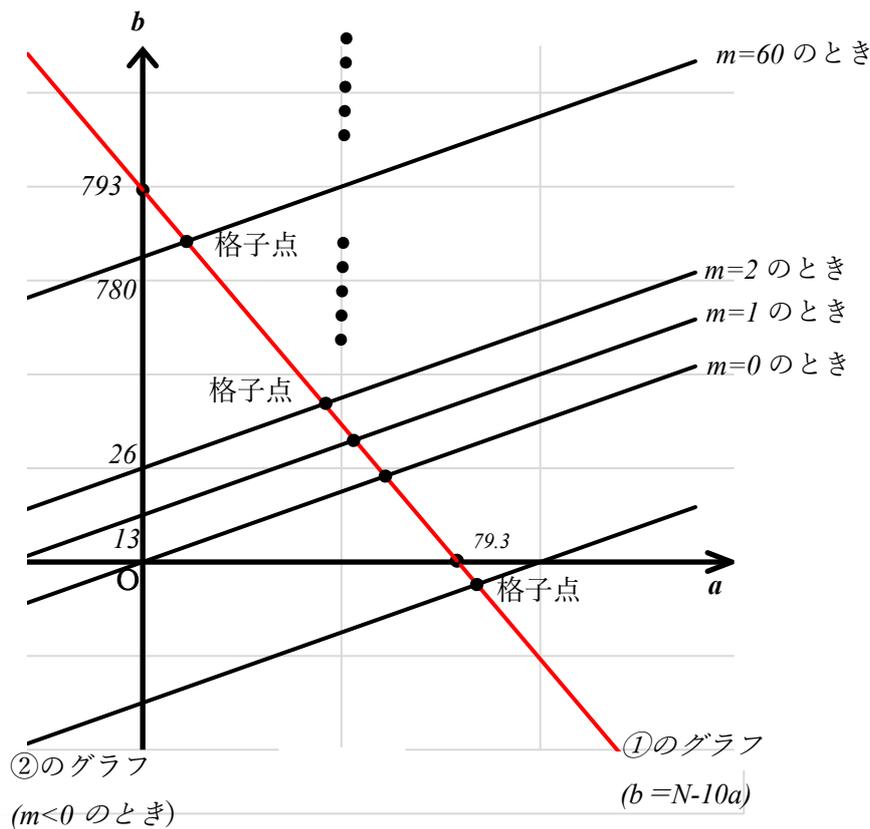
$N=km+ak=k(m+a)$ このとき m が整数なので実数 a が整数ならば N は k の倍数である

すなわち N が k の倍数ならば実数 a,b はともに整数である。

逆に N が k の倍数ならば、2直線①、②の交点は格子点となる。

2直線①、②の交点が格子点 \Leftrightarrow 整数 N は k の倍数





例) 793 が 13 の倍数であるかを判定する。

$$10a + b = 793 \text{ とおくと } b = 793 - 10a \dots \textcircled{1}$$

$$10a + b = 13a + (-3a + b)$$

$$-3a + b = 13m (m \text{ は整数}) \text{ とする。}$$

$$b = 3a + 13m \dots \textcircled{2}$$

例えば $m=60$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より } b = 3a + 780 \dots \textcircled{3}$$

①、③より

$$3a + 780 = 793 - 10a$$

$$13a = 13 \text{ より } a = 1$$

a, m が整数なので、 $-3a + b = 13m$ は整数である。

よって $-3a + b$ は 13 の倍数

したがって 793 は 13 の倍数

ここに数式を入力します。

有限集合における位相空間

大阪府立大手前高等学校 3年

1 遠山啓著「無限と連続」より

「開集合」「閉集合」は連続空間で定義されるものと思っていたが、遠山啓著「無限と連続」において、血縁関係を表す家系図など離散的な要素からなる集合においても、「開集合」「閉集合」が定義されることを知った。図1が例として用いられた源氏の家系図である。

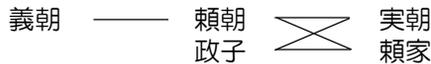


図1

これを見て、違和感を持ったのが研究の始まりである。その違和感は、親から子への一方向の流れだけとなっていることである。図2のように、もとに戻ってくる流れの関係においても、「開集合」「閉集合」を定義できないかと考え、有限集合における「位相空間」を構成する方法を研究した。

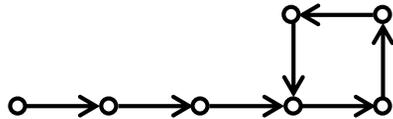


図2

2 位相空間の紹介

2-1 連続空間の開集合と閉集合

離散的な要素からなる集合の「開集合」「閉集合」を考える前に、連続空間における「開集合」「閉集合」を復習してみる。

開集合は、境界を含まない内部だけからなる点の集合で、数直線では、开区間 $1 < x < 2$ がその例である。閉集合は、内部と境界からなる点の集合で、数直線では、閉区間 $1 \leq x \leq 2$ がその例である。数直線以外の例として、平面を考えると、図形の全ての内部の点からなる集合は開集合であり、図形の全ての内部の点と境界の点からなる集合は閉集合である。内部のみからなる点の集合を破線で囲み、内部と境界からなる点の集合を実線で囲み、開集合、閉集合を表すと、図3のようになる。



図3

2-2 開集合と閉集合の特徴

連続空間の開集合、閉集合には、次の性質がある。

- 性質① 開集合の補集合は閉集合
閉集合の補集合は開集合
- 性質② 開集合 O_1, O_2 の和集合 $O_1 \cup O_2$ は開集合
閉集合 C_1, C_2 の和集合 $C_1 \cup C_2$ は閉集合
- 性質③ 開集合 O_1, O_2 の共通部分 $O_1 \cap O_2$ は開集合
閉集合 C_1, C_2 の共通部分 $C_1 \cap C_2$ は閉集合

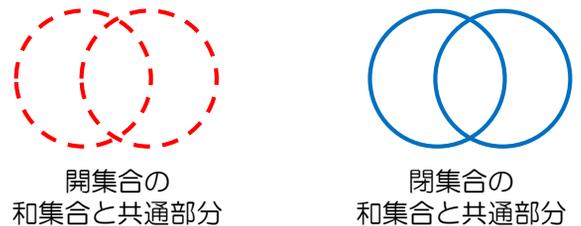


図4

2-3 位相空間とは

ここで、発想を逆転させて、ある集合(全体集合) X の部分集合が、性質①、性質②、性質③を満たすときに、その部分集合を「開集合」「閉集合」と定義することにより、連続空間以外(例えば離散的な要素からなる集合)の集合において「開集合」「閉集合」を考えてみることにする。集合(全体集合) X に「開集合」「閉集合」といった構造を入れ、集合 X の要素が個々別々のものではなく繋がりをもったもの(空間)となるように構成してみよう。この考え方は、20世紀初頭に確立した「位相空間」の考え方である。

定義1 開集合

空でない集合 X において、次の性質を満たす集合を「開集合」とする。

- (1) 空集合 ϕ 及び全体集合 X は、開集合である。
- (2) 有限個の開集合 O_n ($n=1,2,3,\dots,N$) の共通部分 $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_N$ (有限個の共通部分) は、開集合である。
- (3) 有限個及び無限個の開集合 O_n の和集合 $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_N$ (有限個の和集合)
 $O_1 \cup O_2 \cup \dots$ (無限個の和集合) は、開集合である。

有限集合を考える際には、無限個の和集合については考えなくてもよい。閉集合は、次のように定義される。

定義2 閉集合

補集合が開集合である集合を「閉集合」とする。

ド・モルガンの規則を用いると、定義1から、閉集合は次の性質を持つことがわかる。

閉集合の性質（定義1の書き換え）

空でない集合Xにおいて、「閉集合」は次の性質を持つ。

- (1) 空集合 ϕ 及び全体集合Xは、閉集合である。
- (2) 有限個の閉集合 C_n ($n=1,2,3,\dots,N$) の和集合 $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_N$ (有限個の和集合) は閉集合である。
- (3) 有限個及び無限個の閉集合 C_n の共通部分 $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_N$ (有限個の共通部分)
 $C_1 \cap C_2 \cap \dots$ (無限個の共通部分) は、閉集合である。

このように、集合Xの部分集合について、どの部分集合が「開集合」あるいは「閉集合」であるかが定義された集合Xを、「**位相空間**」という

3 研究成果

3-1 矢印図を用いた位相空間の構成

図2のように、点 \circ と矢印 \longrightarrow で作られた図を「矢印図」と呼ぶことにする。ここで、矢印を流れとみなして、矢印に沿って進んでいく方向を「下流」、矢印に逆らって進んでいく方向を「上流」としよう。私たちは、矢印図において、開集合、閉集合を次のように定義した。

定義3 矢印図における開集合・閉集合

部分集合Oに含まれる全ての元（要素）について、その元の上流にある要素が全て部分集合Oに含まれるとき、部分集合Oを「**開集合**」と定義する。

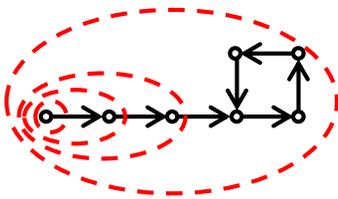


図5 開集合の例

部分集合Cに含まれる全ての元（要素）について、その元の下流にある要素が全て部分集合Cに含まれるとき、部分集合Cを「**閉集合**」と定義する。

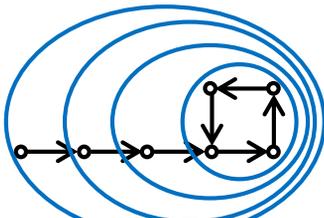


図6 閉集合の例

開集合は上流が全て含まれる集合であるから、開集合の外側から内側に矢印が流入することはない。したがって、開集合を囲む境界面で矢印の出入りがないか、内側から外側への矢印のみが存在するかの、どちらかである。



図7 開集合の境界面と矢印の関係

閉集合は下流が全て含まれる集合であるから、閉集合の内側から外側に矢印が流出することはない。したがって、閉集合を囲む境界面で矢印の出入りがないか、外側から内側への矢印のみが存在するかの、どちらかである。



図8 閉集合の境界面と矢印の関係

したがって、部分集合の境界面の矢印の出入りから、その部分集合を次のように判別することができる。

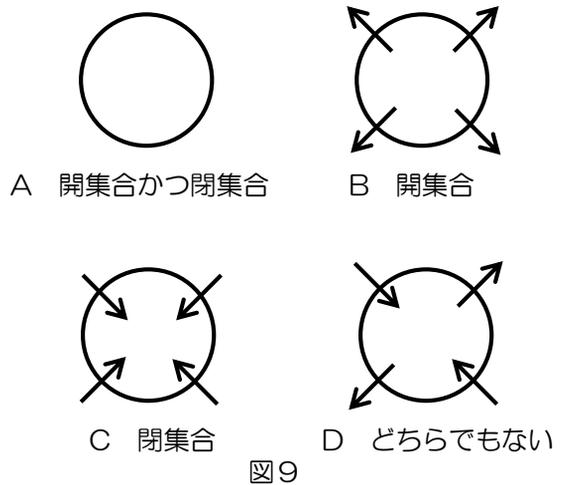


図9

空集合 ϕ 及び全体集合Xが、図9のAを満たすことから、空集合 ϕ 及び全体集合Xが、開集合かつ閉集合であることがわかり、矢印図の開集合、閉集合の定義が、位相空間論の定義1の(1)を満たすことがわかる。

また、全体集合Xが、図のように集合Aと集合Bに分かれている場合を考えると、Aが開集合なら、Bが閉集合をなることが、図10からわかる。したがって、閉集合は開集合の補集合である（定義2を満たす）。

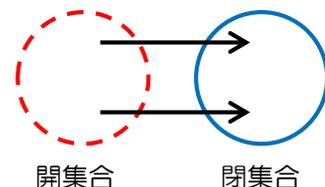


図10

また、図11より開集合 O_1 、 O_2 の和集合 $O_1 \cup O_2$ は開集合であり、共通部分 $O_1 \cap O_2$ も開集合であることがわかる。同様に、閉集合 C_1 、 C_2 の和集合 $C_1 \cup C_2$ は閉集合であり、共通部分 $C_1 \cap C_2$ も閉集合であることがわかる。これらより、矢印図で定義した開集合、閉集合が、位相空間論の開集合の定義（定義1(2)(3)）及び閉集合の性質（定義1の書き換え(2)(3)）を満たすことがわかる。

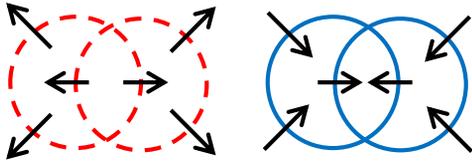


図11

したがって、矢印図で定義した開集合、閉集合の定義が、位相空間論の定義を満たしており、矢印図を用いて、位相空間が構成できることが分かる。

3-2 有限集合の位相空間の考察

3-1では、矢印図から開集合・閉集合を定義し、位相空間を構成したが、3-2では、逆に、位相空間（開集合の集まり、閉集合の集まり）が与えられた場合に、それを再現する矢印図が作成できるかどうかについて検討してみる。

集合（全体集合） X について、開集合の集まりが与えられたとする。開集合の境界面では、開集合の内部から外部への矢印が存在することがあっても、外部から内部への矢印が存在しない。このことを考慮して、次のルール1~4を設定し、 X の2つの元 a 、 b の間に矢印を引いてみよう。

- ルール1**
 $a \in O_a$ 、 $b \notin O_a$ である開集合 O_a が存在する
 $a \notin O_b$ 、 $b \in O_b$ である開集合 O_b が存在する
 このとき、 ab 間には矢印を引かない。

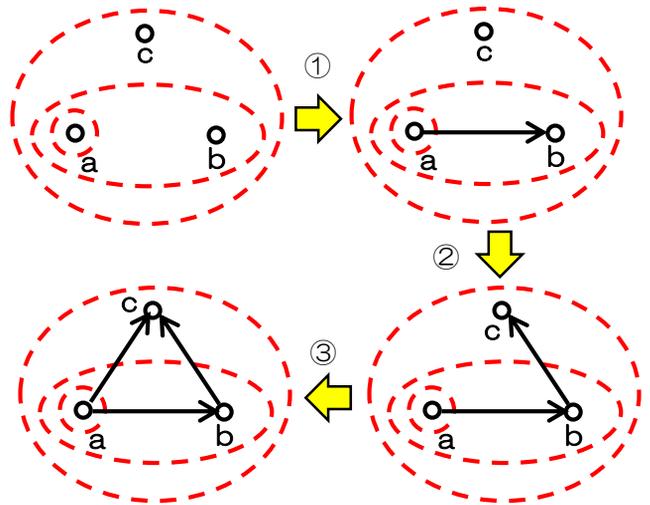
ルール2
 $a \in O_a$ 、 $b \notin O_a$ である開集合 O_a が存在する
 $a \notin O_b$ 、 $b \in O_b$ である開集合 O_b が存在しない
 このとき、 $a \longrightarrow b$ の向きに矢印を引く。

ルール3
 $a \in O_a$ 、 $b \notin O_a$ である開集合 O_a が存在しない
 $a \notin O_b$ 、 $b \in O_b$ である開集合 O_b が存在する
 このとき、 $a \longleftarrow b$ の向きに矢印を引く。

ルール4
 $a \in O_a$ 、 $b \notin O_a$ である開集合 O_a が存在しない
 $a \notin O_b$ 、 $b \in O_b$ である開集合 O_b が存在しない
 このとき、 $a \longleftrightarrow b$ の両側矢印を引く。

例として、図12のような、3つの元からなる集合において開集合の集まりが与えられている位相空間を考えよう。

- ① a b 間について
 「 a を含み b を含まない開集合」のみ存在する。
 よって、 $a \longrightarrow b$ の矢印を引く。
- ② b c 間について
 「 b を含み c を含まない開集合」のみ存在する。
 よって、 $b \longrightarrow c$ の矢印を引く。
- ③ a c 間について
 「 a を含み c を含まない開集合」のみ存在する。
 よって、 $a \longrightarrow c$ の矢印を引く。



矢印図完成

図12

このように、開集合の集まりが与えられれば、それに対応する矢印図を（少なくとも1つは）つくることができる。

また、3-1で見たように、矢印図の開集合の定義より、矢印図から開集合の集まりを描くこともできる。

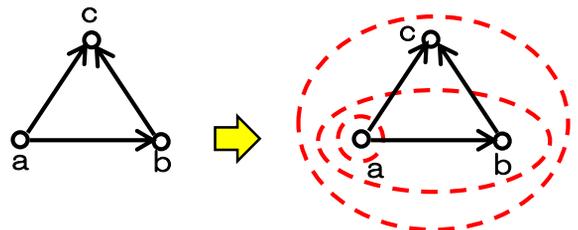


図13

3-1で矢印図から開集合の集まり（位相空間）を構成したが、3-2では、開集合の集まり（位相空間）から矢印図を作成した。有限集合においては、全ての位相空間には、対応する矢印図が存在することになる。したがって、有限集合では、可能な矢印図を作成すれば、可能な位相空間が尽くされることになる。

3-3 無限集合の位相空間の考察

集合に属する元の個数が有限個である有限集合においては、任意の位相空間（開集合の集まり）に対し、対応する矢印図が存在した。では、元の個数が無限個である無限集合ではどうなのか？

私たちの研究では、この問いに対し、無限集合では、有限集合のとときと、全く逆の結論を得た。すなわち、無限集合では、対応する矢印図が存在しない位相空間が存在することが分かった！ しかも、無数に！

この事情を明らかにするために、再度、連続空間における開集合（内部の点のみからなる集合）と閉集合（内部の点と境界の点からなる集合）を考えてみる。

簡単のため、数直線における開集合、閉集合を考えよう。開区間 $O_n(n=1,2,3,\dots)$ を、

$$O_n = \{x \mid -(1+\frac{1}{n}) < x < 1+\frac{1}{n}\}$$

とする。無限個の開区間 $O_n(n=1,2,3,\dots)$ の共通部分

$$\bigcap O_n = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

は、閉区間である。このように、連続空間では、無限個の開集合の共通部分が閉集合になることもありうる。無限集合においては、無限個の開集合の共通部分は、開集合とは限らず、開集合、閉集合、それ以外の集合、いずれにもなりうるのである。

一方、矢印図は、無限集合にも拡張可能であるが、3-1と同様の方法により、無限個の開集合の共通部分は、必ず開集合になることを示すことができる。これは、矢印図を用いる限り、無限個の開集合の共通部分が開集合以外になる位相空間をつくることのできないことを意味する。したがって、解析学の土台としている実数や複素数の位相空間は、矢印図からは創り出すことができない。

ここで、もう一度、位相空間論における開集合の定義を見てみよう。

定義1 開集合（位相空間論）

空でない集合 X において、次の性質を満たす集合を「開集合」とする。

- (1) 空集合 ϕ 及び全体集合 X は、開集合である。
- (2) 有限個の開集合 $O_n(n=1,2,3,\dots,N)$ の共通部分 $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_N$ （有限個の共通部分）は、開集合である。
- (3) 開集合 O_n の和集合 $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_N$ （有限個の和集合） $O_1 \cup O_2 \cup \dots$ （無限個の和集合）は、開集合である。

定義の(2)では、有限個の開集合の共通部分は開集合であると述べているだけで、無限個の開集合の共通部分については、何の制約もない。

それに対し、矢印図を無限集合に拡張して得られる開集合の性質は、次のようになる。

矢印図から得られる開集合の性質

矢印図で定義される「開集合」は次の性質を持つ。

- (1) 空集合 ϕ 及び全体集合 X は、開集合である。
- (2) 開集合 $O_n(n=1,2,3,\dots)$ の共通部分 $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_N$ （有限個の共通部分） $O_1 \cap O_2 \cap \dots$ （無限個の共通集合）は、開集合である。
- (3) 開集合 O_n の和集合 $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_N$ （有限個の和集合） $O_1 \cup O_2 \cup \dots$ （無限個の和集合）は、開集合である。

矢印図で得られる開集合の集まり（位相空間）よりも、位相空間論で得られる開集合の集まり（位相空間）の方が範囲が広く、矢印図の位相空間は、無限集合における位相空間の、ほんの一部を占めるにすぎない。

4 結論

結論1

矢印図を用いて、位相空間を構成することができた。

結論2

有限集合においては、矢印図から作られる位相空間だけで、全ての位相空間が尽くされる。

結論3

無限集合においては、矢印図から作られる位相空間は、位相空間全体の一部分にすぎない。

5 展望

遠山啓著「無限と連続」の位相空間の例において、家系図の血縁関係が親から子への一方の流であることに違和感を感じて開始した本研究であったが、もう一つ、別の違和感があった。それは、血縁関係にせよ、矢印で表される関係であるにせよ、二者の関係であることである。私たちは、この研究を進めていく中で、矢印図の世界では点（元）と矢印（関係）の2つしかなく、面が存在しないことによる違和感に、何度となくぶつかった。三角形のように、三者がつくる面から新たな関係を創っていくことはできないだろうか？ 三者の関係から創られる空間は、位相空間と同じ空間か？ 位相空間と類似の空間か？ 全く別の空間か？

著書「無限と連続」において、位相空間を紹介する第3章は「創られた空間」と題してあったが、私たちも、新しいアイデアで、新たな「創られた空間」の創造に挑戦していきたい。

○ 参考文献：遠山啓「無限と連続」（岩波新書）

○ 発表生徒への質問、ご指導・ご助言をよろしくお願いたします。
T-FumitaN@medu.pref.osaka.jp【大手前】SSH主担 文田憲行

49と同じ性質を持つ自然数

大阪府立岸和田高等学校

§ 1. 研究背景

2つの自然数 a, b をこの順に並べるといふ操作は、 b の10進法表記の桁数 k に対して、

$$a \cdot 10^k + b$$

で表現される。

ここで、2つの平方数を並べるときのできる自然数であつて、平方数となるものについて考える。

例1. 1

6^2 と 1^2 をこの順に並べた361は 19^2 と平方数である。

例1. 2

4^2 と 9^2 をこの順に並べた1681は 41^2 と平方数である。

このような例は無限に構成することができる。例えば例1.1を元にして、 6^2 と 10^2 をこの順に並べた36100は 190^2 、 6^2 と 100^2 をこの順に並べた3610000は 1900^2 と平方数になる。ただし、後ろの平方数が100で割り切れないという条件を加えれば無限に構成できるかどうかは未解決である。

この並べる平方数に、

その平方数が互いに隣り合っている

という条件を加えると以下のような例が存在する。

例1. 3 n^2 と $(n+1)^2$ をこの順に並べる場合

2^2 と 3^2 をこの順に並べた49は 7^2 と平方数である。

例1. 4 n^2 と $(n+1)^2$ を逆順に並べる場合

4^2 と 3^2 をこの順に並べた169は 13^2 と平方数である。

この条件下では今のところ上記2例しか見つかっていない。

例1. 3の場合はプログラミングで探索したが $n \leq 10^7$ では他に存在しなかった。ただし、並べるときの記数法の底を10から変えればこのような例は他に見つかっている。

例1. 5

『 $(n+1)^2 + 1$ 進法』において n^2 と $(n+1)^2$ をこの順に並べた

$$n^2\{(n+1)^2 + 1\} + (n+1)^2$$

は $(n^2 + n + 1)^2$ と平方数である。

§ 2. 研究目的

背景から、タイトルにもなっている49という自然数は、

隣り合う平方数 2^2 と 3^2 をこの順に並べることで構成され、自身も 7^2 と平方数である。

という性質をもつことがわかるであろう。これと同じ性質をもつ自然数は存在するのだろうか。つまり、

隣り合う平方数 n^2 と $(n+1)^2$ をこの順に並べたときに構成される自然数であつて、平方数となるような例は49以外に存在するのだろうか。

という問題に考察を与えることが本研究の目的である。

なお、10進法で並べるものとし n^2 と $(n+1)^2$ を逆順に並べる場合は本研究では考えない。

§ 3. 予想

m, n, k を自然数とする。隣り合う平方数 n^2 と $(n+1)^2$ をこの順に並べた自然数は、

$$n^2 10^k + (n+1)^2$$

と表される。ただし、 k は $(n+1)^2$ の桁数である。これが平方数となるとき、

$$(3.1) \quad m^2 = n^2 10^k + (n+1)^2$$

と表されるとする。 k は $(n+1)^2$ の桁数なので、

$$(3.2) \quad 10^{k-1} \leq (n+1)^2 < 10^k$$

を満たす。

命題 3.3(予想)

(3.1), (3.2)を同時に満たす自然数の組 (m, n, k) は $(7, 2, 1)$ のみである。

したがって、以下では $n \neq 2$ のときに(3.1), (3.2)を同時に満たす自然数の組 (m, n, k) が存在しないことを考察する。初等整数論による3通りの手法と、それによる成果を記す。

§ 4. 証明(1)

k が偶数の場合に予想が正しいことが証明できている。この章ではその概略を記す。

k が偶数のときの各 n に対する m の値を調べると以下の表のようになった。

| nの値 | mの値(近似値) | nの値 | mの値(近似値) |
|-----|----------|-----|------------|
| 3 | 30.26549 | 31 | 3100.16515 |
| 4 | 40.31128 | 32 | 3200.17051 |
| 5 | 50.35871 | 33 | 3300.17514 |
| 6 | 60.40695 | 34 | 3400.18014 |
| 7 | 70.45565 | 35 | 3500.18513 |
| 8 | 80.50465 | 36 | 3600.19013 |

m の整数部分が $n0 \dots 0$ の形になっていることがわかる。

このことから,

$$n \cdot 10^{\frac{k}{2}} < m < n \cdot 10^{\frac{k}{2}} + 1$$

が成り立つと予想する. これが証明できれば, m が隣り合う整数の間に存在し, m が自然数であることに矛盾する.

(証明) 省略(*1)

よって, k が偶数のときに予想が正しいとわかる.

§ 5. 証明(2)

$n = p, 2p, 3p, 4p$ (p は素数)の場合に予想が正しいことが証明できている. この章ではその概略と, 問題点を記す.

$n \neq 2$ と $n = 3$ が解でないことより, $n \geq 4$ としてよい.

(3.1)は,

$$(5.1) \quad (m+n+1)(m-n-1) = n^2 10^k$$

と変形できる. この右辺の素因数に着目することで, 左辺の因数の候補を絞ることができる.

補題 5.2

$n = p_1 \dots p_i$ を素因数分解とすると, $m+n+1$ と $m-n-1$ の一方のみが奇素数 p_j ($j = 1, \dots, i$)で割り切れる.

(証明) 省略(*2)

補題 5.2 より (5.1)の左辺の因数 $m+n+1$ と $m-n-1$ の一方が p_j^2 の倍数であるとわかるので, 整数 s, t があり,

$$m+n+1 = sp_j^2 \quad \text{または} \quad m-n-1 = tp_j^2$$

と表される.

ここで次の補題を考える.

補題 5.3

$n \geq 4$ のとき, $n^2 < m < 4n^2$ が成り立つ.

(証明) 省略(*3)

補題 5.3 を用いて s, t の候補を絞ることができる.

例えば $n = p$ の場合は,

$$m+p+1 = sp^2 \quad \text{または} \quad m-p-1 = tp^2$$

であり, 補題 5.3 を用いると,

$$s = 2, 3, 4 \quad t = 1, 2, 3$$

となる. これらの矛盾を導くことで(省略(*4)), $n = p, 2p, 3p, 4p$ (p は素数)の場合に予想が正しいとわかる.

しかし, q, r を未知な素数として,

$$n = pq, pqr$$

などの場合を考えると s, t を評価する不等式に q, r などが入り絞り込めなくなるので, 同様の手法での解決は難しい.

§ 6. 証明(3)

この章では合同方程式を用いて考察を行う.

(3.1)より, 10^k を法とする合同方程式

$$(6.1) \quad m^2 \equiv (n+1)^2 \pmod{10^k}$$

の解を求めて, その解が不適であることを導く.

(6.1)を求めるためにより一般の

$$(6.2) \quad x^2 \equiv a \pmod{10^k}$$

の解法を考える.

(6.2)の法を素数冪に分解したものについて次の補題が成り立つ.

補題 6.3

(1) $p \neq 2$ を素数とすると, $p \nmid a$ で $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が解をもつなら

$$x^2 \equiv a \pmod{p^k}$$

の解は, 解の1つを $x \equiv x_0 \pmod{p^k}$ として, $x \equiv \pm x_0 \pmod{p^k}$ である.

(2) $a \equiv 1 \pmod{8}$, $k \geq 3$ ならば,

$$x^2 \equiv a \pmod{2^k}$$

は解を4つもち, その1つを $x \equiv x_0 \pmod{2^k}$ とすると, $x \equiv \pm x_0, \pm x_0 + 2^{k-1} \pmod{2^k}$ である.

(証明) 省略(参考文献[3]参照)

中国剰余定理と補題 6.3 より次の補題を得る.

補題 6.4

$a \equiv 1, 9 \pmod{40}$ ならば, (6.2)は8つの解をもつ.

(証明) 省略(*5)

補題 6.4 より, (6.2)を満たす解を具体的に8つ見つければそれですべての解となる. ここで以下の定理を示す.

定理 6.5

整数 a, k が, $a \equiv 1, 9 \pmod{40}$ と $k \geq 3$ を満たすとき,

$$x^2 \equiv 1 \pmod{10^k}$$

の解の1つで,

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2^k} \\ x \equiv -1 \pmod{5^k} \end{cases}$$

の解を $x \equiv u_k \pmod{10^k}$ とする.

ここで u_k は10進ノルムによる極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k =$

...836425781249の下 k 桁に対応する.

このとき, $x^2 \equiv a \pmod{10^k}$ の解の1つを $x \equiv x_0 \pmod{10^k}$ とするとすべての解は,

$$x \equiv \pm x_0, \pm x_0 u_k, \pm x_0 + \frac{10^k}{2}, \pm x_0 u_k + \frac{10^k}{2} \pmod{10^k}$$

である.

(証明) 省略(*6)

定理 6.5 より (6.2)は解が1つ分かればすべての解が構成できることが分かる. 以下では, 定理 6.5 を(6.1)に適用して, 実際に解を構成し, その解の1部に矛盾が生じることを記す.

(6.1)は自明な解 $m \equiv n+1 \pmod{10^k}$ をもつから, $(n+1)^2 \equiv 1, 9 \pmod{40}$, つまり n が偶数かつ $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ のときすべての解は,

$$m \equiv \pm(n+1), \pm(n+1)u_k, \pm(n+1) + \frac{10^k}{2}, \pm(n+1)u_k + \frac{10^k}{2} \pmod{10^k}$$

である. このうち u_k を含まない4つの場合については証明できている.(省略(*7))

u_k を含む残り4つの場合は, u_k の扱いが難しく, まだ解決できていない.

§ 7. 考察

■背景について

隣り合うの条件を無くし、後ろの平方数が100で割り切れないという条件を加えた場合の例が有限だと示すことができれば、命題3.3は解決する可能性がある。

■本論(2)の内容について

$n = pq, pqr$ などの場合は、 p だけでなく q, r も素数であるので q, r についても p と同様のことがいえる。

この q, r の条件をうまく利用することで候補を絞り切ることができる可能性がある。

■本論(3)の内容について

扱いが難しいと述べた u_k は、10進ノルムによる極限

$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ が $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ の要素になる。

つまり $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ の理解は p 進整数環の理解に帰着される。(参考文献[2]参照)

p 進数を深く学ぶことで u_k の扱いや、うまい解決法が見えてくる可能性がある。

§ 8. 結論

いくつかの場合について、予想が正しいことが分かった。以下に解決した内容をまとめる。

- k が偶数の場合
- $n = p, 2p, 3p, 4p$ (p は素数)の場合
- n が偶数かつ $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ で、 $k \geq 3$ のとき、

$$m^2 \equiv (n+1)^2 \pmod{10^k}$$

の8つの解

$$x \equiv \pm(n+1), \pm(n+1) + \frac{10^k}{2}, \pm(n+1)u_k,$$

$$\pm(n+1)u_k + \frac{10^k}{2} \pmod{10^k}$$

のうち、 u_k を含まない4つの場合

§ 9. 展望

■この研究について

- 考察した内容について研究する。
- 代数学を深く学び、代数的整数論による考察を試みる。

■背景について

- n^2 と $(n+1)^2$ を逆順に並べる場合を考察する。
- 任意の記数法で題意の数が存在するかを考察する。
- 2つ以上の題意の数が存在する記数法は存在するか考察する。

§ 10. 参考文献

[1]加藤文元 MathPower2016

『天に向かって続く数、あるいは“狂った”数』

[2]加藤文元 『天に向かって続く数』日本評論社

[3]高木貞治 『初等整数論講義』共立出版

[4]雪江明彦 『整数論1 初等整数論から p 進数へ』日本評論社

§ 11. 補遺

ここに省略してしまった補題の証明や、候補の矛盾を導く過程などを記す。

(*)

示す不等式の各辺は正であるから、各辺を2乗して $k = 2l$ とおいた、

$$(10^l \cdot n)^2 < m^2 < (10^l \cdot n + 1)^2$$

を示す。

(3.1)より $(10^l \cdot n)^2 < m^2$ は明らかに成り立つ。

$m^2 < (10^l \cdot n + 1)^2$ について、

(右辺)-(左辺)

$$= (10^l \cdot n + 1)^2 - m^2$$

$$= (10^l \cdot n + 1)^2 - n^2 \cdot 10^k - (n+1)^2$$

$$= n(2 \cdot 10^l - n - 2)$$

ここで(3.2)より $(n+1)^2 < 10^k$ なので、 $n+1 < 10^l$ 。

したがって、 $2 \cdot 10^l - n - 2 > 0$ であり $n > 0$ なので、

$$n(2 \cdot 10^l - n - 2) > 0$$

よって右側の不等式も成り立つ ■

(**)

$\gcd(m+n+1, m-n-1) = d$ に対して、 $p_j \nmid d$ を示せばよ

い。

$m+n+1 = ad, m-n-1 = bd$ とおくと、

$$2(n+1) = (a-b)d$$

となり、 d は $2(n+1)$ の約数である。

ここで p_j が n の約数であって、奇素数であることから、

$$\gcd(p_j, 2(n+1)) = 1$$

よって、 $p_j \nmid d$ ■

(*3)

(イ) $n^2 < m$ の証明

(3.1), (3.2)より,

$$m^2 = n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2 > n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ = (n^2+1)(n+1)^2 > n^4$$

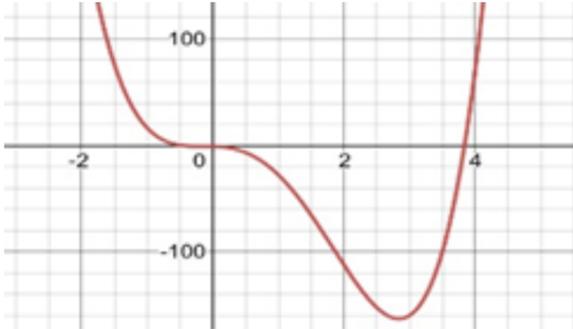
より, $n^2 < m$.

(ロ) $m < 4n^2$ の証明

(3.1), (3.2)より,

$$m^2 = n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2 \leq 10n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ = (10n^2+1)(n+1)^2$$

$f(x) = 16x^4 - (10x^2+1)(x+1)^2$ とおくと, $y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる.



よって, 4以上の実数 x に対して, $f(x) > 0$ が成り立つから, $n \geq 4$ に対して, $(10n^2+1)(n+1)^2 < 16n^4$.

よって, $m^2 < 16n^4$ なので $m < 4n^2$ ■

(*4)

$$m + p + 1 = sp^2 \quad \text{または} \quad m - p - 1 = tp^2$$

を用いて, (3.1)から m を消去すると,

$$10^k = s(sp^2 - 2p - 2) \quad \text{または} \quad 10^k = t(tp^2 + 2p + 2)$$

これより, s, t は10の約数であるから,

$$s = 3, t = 3$$

は不適. 以下, 代表して $s = 2, 4$ の場合を記す.

$s = 2$ のとき

$$10^k = 2(2p^2 - 2p - 2) \text{より } 25 \cdot 10^{k-2} = p^2 - p - 1$$

右辺が奇数なので $k - 2 = 0$.

これは k が偶数でないので矛盾.

$s = 4$ のとき

$$10^k = 4(4p^2 - 2p - 2) \text{より } 5^k 2^{k-3} = (2p+1)(p-1).$$

$$\text{したがって} \begin{cases} 2p+1 = 5^l \\ p-1 = 5^{k-l} 2^{k-3} \end{cases} \text{とおけ, } 5^{k-l} 2^{k-2} + 3 = 5^l$$

となり矛盾.

(*5)

(6.2)の解は,

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{2^k} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{5^k} \end{cases}$$

の解に対応する.

$a \equiv 1 \pmod{8}$ かつ $x^2 \equiv a \pmod{5}$ が解をもつとき, つまり

$a \equiv 1, 9 \pmod{40}$ のとき, $x^2 \equiv 1 \pmod{2^k}$ は4つ, $x^2 \equiv$

$1 \pmod{5^k}$ は2つの解をもち, 法である $2^k, 5^k$ は互いに素なので, (6.2)は $4 \cdot 2 = 8$ 個の解をもつ. ■

(*6)

(6.2)において,

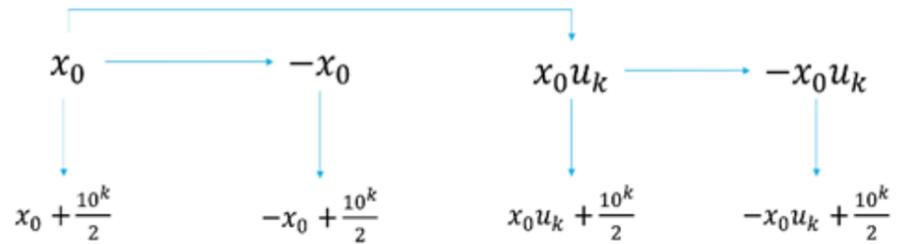
(イ) $x \equiv x_0 \pmod{10^k}$ が解ならば, $x \equiv -x_0 \pmod{10^k}$ も解である.

(ロ) $x \equiv x_0 \pmod{10^k}$ が解ならば, $x \equiv x_0 + \frac{10^k}{2} \pmod{10^k}$ も

解である.

(ハ) $x \equiv x_0 \pmod{10^k}$ が解ならば, $x \equiv x_0 u_k \pmod{10^k}$ も解である.

を示せば補題6.4より従う.



$x \equiv x_0 \pmod{10^k}$ が解なので, $x_0^2 \equiv a \pmod{10^k}$

(イ) $(-x_0)^2 \equiv x_0^2 \equiv a \pmod{10^k}$

(ロ) $(x_0 + \frac{10^k}{2})^2 \equiv x_0^2 + 10^k x_0 + \frac{10^{2k}}{4} \equiv x_0^2 \equiv a \pmod{10^k}$

(ハ) $u_k^2 \equiv 1 \pmod{10^k}$ なので, $x_0^2 u_k^2 \equiv a \cdot 1 \pmod{10^k}$

よって, $(x_0 u_k)^2 \equiv a \pmod{10^k}$ ■

(*7)

代表して, $m \equiv -(n+1) \pmod{10^k}$ の場合を記す.

自然数 t があり, $m = 10^k t - (n+1)$ とおける.

このとき

$$m^2 = 10^{2k} t^2 - 2t(n+1)10^k + (n+1)^2 \\ = n^2 10^k + (n+1)^2$$

より,

$$n^2 = 10^k t^2 - 2t(n+1)$$

となる.

(3.2)より

$$n+1 < (n+1)^2 < 10^k, \quad n^2 < (n+1)^2 < 10^k$$

なので,

$$10^k(t^2 - 2t) < 10^k t^2 - 2t(n+1) = n^2 < 10^k$$

したがって, $t^2 - 2t < 1$. t は自然数なので $t = 1, 2$.

$t = 1$ とすると,

$$n^2 = 10^k - 2(n+1) \Rightarrow \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{10^k - 1}{9} = 11 \dots 11 \text{ (} k \text{桁)}$$

より $\left(\frac{n+1}{3}\right)^2$ はrep-unit数であるが, 2桁以上のrep-unit数

は平方数でないため矛盾.

$t = 2$ とすると,

$$(n+2)^2 = 4 \cdot 10^k$$

となるが k は偶数でないので矛盾.

このポスターをご覧頂いた皆様へ

質問・助言・感想等がありましたら, 以下に記載されている担当教員のメールアドレスまで

ご連絡ください. 是非よろしくお願ひいたします.

t-hikitamako@medu.pref.osaka.jp

4-1 結果 | 二面体

操作RUについて

R(9 11 14 12)(4 44 27 36)
U(33 35 38 36)(1 9 25 17)

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|
| ○ | ○ | ○ | ○ | △ | △ | △ | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | |
| 9 | 11 | 14 | 12 | 4 | 44 | 27 | 36 | 33 | 35 | 38 | 1 | 25 | 17 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 11 | 14 | 12 | 9 | 44 | 27 | 36 | 4 | 33 | 35 | 38 | 1 | 25 | 17 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 11 | 14 | 12 | 25 | 44 | 27 | 33 | 4 | 35 | 38 | 36 | 9 | 17 | 1 |

○と△に注目すると、○では操作RU繰り返すと、それぞれのピースは9→11→14→12→25→17→1→9……と、いのように巡回していることが分かり、7回繰り返せば、全てのピースは元の盤面に戻ることが分かった。

△も同様に操作RUを繰り返すと、それぞれのピースは4→44→27→33→35→38→36→4……と巡回していることが分かり、7回繰り返せば、元の盤面に戻ることが分かった。

⇒ 二面体について操作RUを繰り返せば7回で元の盤面に戻ることが分かった。

4-2 結果 | 三面体

操作RUについて

R(8 13 15 10)(7 47 24 39)(2 42 29 34)
U(32 37 39 34)(0 8 24 16)(2 10 26 18)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|
| □ | □ | □ | ▽ | □ | □ | ▽ | □ | □ | □ | □ | ▽ | □ | □ | □ | □ | □ | |
| 8 | 13 | 15 | 10 | 7 | 47 | 24 | 39 | 2 | 42 | 29 | 34 | 32 | 37 | 0 | 16 | 26 | 18 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 13 | 15 | 10 | 8 | 47 | 24 | 39 | 7 | 42 | 29 | 34 | 2 | 32 | 37 | 0 | 16 | 26 | 18 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 13 | 15 | 26 | 24 | 47 | 16 | 34 | 7 | 42 | 29 | 32 | 10 | 37 | 39 | 8 | 0 | 18 | 2 |

□と▽に注目すると、□では操作RUを繰り返すと、それぞれのピースは8→13→15→26→18→2→42→29→32→37→39→7→47→16→0→8……と、いのように巡回していることが分かり、15回繰り返せば、元の盤面に戻ることが分かった。

▽は操作RUを繰り返すと、それぞれのピース10→24→34→10……と巡回していることが分かり、3回繰り返せば、元の盤面に戻ることが分かった。

⇒ 三面体において操作RUを繰り返せば15回で元の盤面に戻ることが分かった。

5 考察

結果から分かること

操作RUを繰り返した時、ルービックキューブが元の盤面に戻ることは、ルービックキューブの二面体と三面体が同時に元の盤面に戻ることと同値である。故に、ルービックキューブが元の盤面に戻るのに必要な回数は二面体と三面体がそれぞれ元の盤面に戻るまでの回数の最小公倍数より、 $7 \times 15 = 105$ つまり105回でもとに戻ると予測される。

実際に確かめる

実際に操作RUを繰り返したところ、予想通り105回で元の盤面に戻った。

7 今後の展望

改善点

この方法は、見ていただいても分かる通り、あまりにも時間がかかってしまう問題がある。素早く導き出せる方法について検討して欲しい。

応用

本研究の考え方を別の研究対象に応用してほしい。

6 結論

上記の方法は、ルービックキューブにおけるすべての操作において成り立つので、任意の操作を繰り返す時、元の盤面に戻るまでの回数を確認したい場合は、この方法を使えば良い。

また、ルービックキューブ以外の群についても、上記のような考え方をすれば良いかもしれない。

8 出典・参考文献

S. Kusafusa, 置換群で解き明かすルービックキューブ, 閲覧日 2021-11-22, <http://imetrics.co.jp/mathematics/RubiksCube.pdf>

中島秀斗, ルービックキューブと数学, 2018-06-23, 閲覧日 2021-11-22, <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~h-nakashima/others/suriwave/suriwaveHN.pdf>

9 キーワード

ルービックキューブ 群

AIを用いた衣服のブランド判別

大阪府立四條畷高等学校 SS情報班

Abstract

Today, many people have been using online shopping, so there are many kinds of clothes which are cheap and of great quality in the market. However, even the same clothes are sold at different prices on the same website. Therefore, we decided to solve this problem. And, we hope people will be able to buy clothes at the proper price in the future. Then, we decided to create a computer program that showed us the fair price. At first, we will produce the program of discriminating the clothing brand in this year.

研究背景

- ・ 今日、様々な種類のブランドがある
- ・ コンピューターサイエンスに興味を持った

仮説

衣服のブランドの判別が可能になるのではないかな？



GUCCI

<https://www.gucci.com/gp/ja/7gdlhEAla00bChMYt-g73fAV03hgC13G3ApQEAYASAEgLEvD>

RQ

AIを用いることで衣服のブランド判別が可能になるのではないかな

研究意義

本研究を活用することで



- ① 高級ブランドに多く見られる偽物の判別
- ② 素材などの他の変数を加えることで衣服の価格判別



など様々な面への応用が期待できる

研究手法

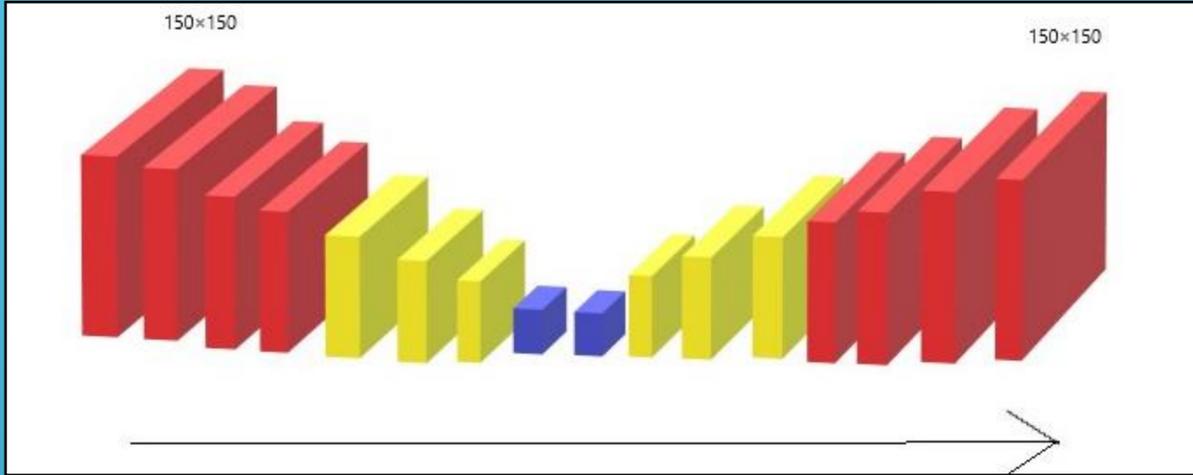
- ① : 学習用ブランドの選択
- ② : 服の画像の収集
- ③ : 画像データの処理
- ④ : 学習用プログラムの作成
- ⑤ : 学習用プログラムを利用し、画像を解析
- ⑥ : 学習済みモデルを用いて、ブランドの判別を行う
- ⑦ : AIの判別根拠を提示するプログラムの作成
- ⑧ : 判別根拠をヒートマップ上に可視化

プログラムの作成

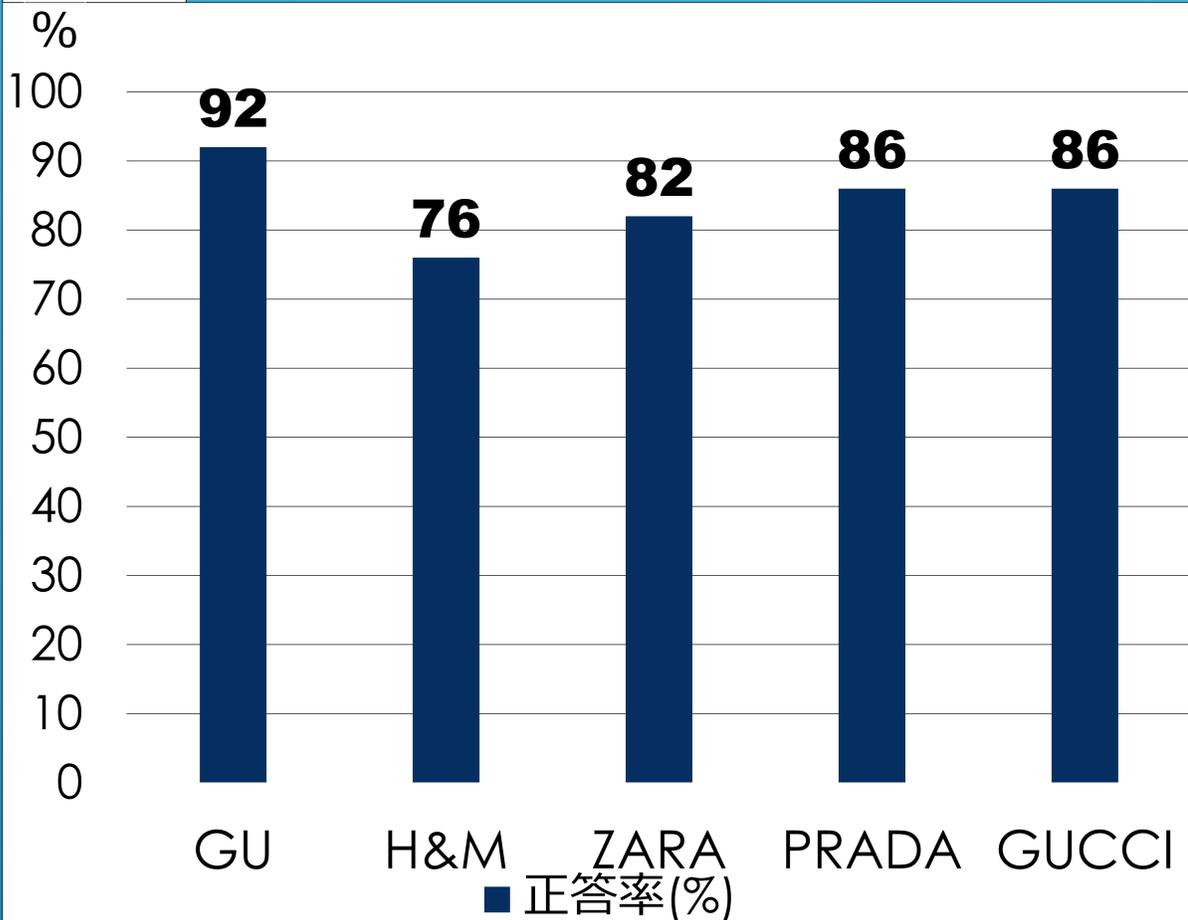
- Google Colaboratoryを使用
- 使用言語：Python



<https://colab.research.google.com/notebooks/welcome.ipynb?hl=ja>



結果



```
1 #学習用プログラム
2 from keras.preprocessing.image import load_img, img_to_array
3 from keras.preprocessing.image import ImageDataGenerator
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import os
7 import glob
8 from tf_explain.callbacks.occlusion_sensitivity import OcclusionSensitivityCallback
9
10 #画像の読み込み
11 from PIL import Image
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 import numpy as np
14
15 import tensorflow as tf
16 from tensorflow import keras
17 import numpy as np
18 import matplotlib.pyplot as plt
19 import glob
20 #ターゲット
21 targets = ["GUimageout", "H&Mimageout", "ZARAimageout", "PRADAimageout", "GUCCIimageout"]
22 target = ["/content/drive/MyDrive/GU image out/", "/content/drive/MyDrive/H&M image out/"]
23 #ターゲット
24 x = []
25 y = []
26 for c in range(len(targets)):
27     files = glob.glob(targets[c] + "/*.jpg")
28     for f in files:
29         img = load_img(f)
30         img = img_to_array(img)
31         x.append(img)
32         y.append(c)
33 x = np.array(x) / 255.0
34 y = np.array(y)
35
36 model = keras.Sequential([
37     keras.layers.Conv2D(16, [3, 3], activation='relu', input_shape=(150, 150, 3), name='layer1'),
38     keras.layers.MaxPool2D(),
39     keras.layers.Conv2D(32, [3, 3], name='layer2'),
40     keras.layers.MaxPool2D(),
41     keras.layers.Conv2D(64, [3, 3]),
42     keras.layers.MaxPool2D(),
43     keras.layers.Flatten(), # 次元を二次元から一元にする
44     keras.layers.Dense(1000, activation='relu'), #
45     keras.layers.Dense(len(targets), activation='softmax')
46 ])
47
48 model.compile(optimizer='adam',
49               loss='sparse_categorical_crossentropy',
50               metrics=['accuracy'])
51
```

- 計 250 枚の画像でテストを行い、平均84.4%の正答率を得た

• テスト用プログラム

```
1 #テスト用
2 import glob
3 d = "/content/drive/MyDrive/"
4
5 for f in glob.glob(d + '*.jpg'):
6     print(f)
7     img = load_img(f, target_size=(150, 150))
8     x = img_to_array(img) / 255.0
9     x = np.expand_dims(x, axis=0)
10    print(model.predict(x))
```

考察

正答率が高いブランド



ブランドがイメージするデザインが共通しているのではないかと

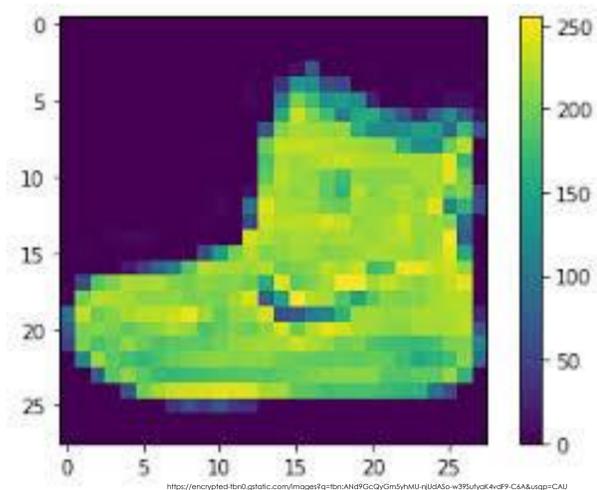
正答率が低いブランド



ブランドがイメージするデザインが様々なのではないかと

展望

① AIの判別根拠を示す、可視化手法の一つである「Grad-CAM」を用いる



② 正答率の向上に挑戦する

➡ プログラムの改善を行う

③ 偽物の判別、値段の判別などへの応用

画像の処理用プログラム

```
13 # 入力ディレクトリを作成
14 input_dir = "/content/drive/MyDrive/H&M 研究用/"
15 #files = glob.glob(input_dir + '*408837_XD838_4271_001_100_0000_Light[1].jpg')
16 files = glob.glob(input_dir + '*')
17
18 # 出力ディレクトリを作成
19 output_dir = "HMimageout"
20 if os.path.isdir(output_dir) == False:
21     os.mkdir(output_dir)
22
23 for i, file in enumerate(files):
24     img = load_img(file, target_size=(150, 150))
25
26     x = img_to_array(img)
27     x = np.expand_dims(x, axis=0)
28     # ImageDataGeneratorの生成
29     datagen = ImageDataGenerator(
30
31         rotation_range = 10,
32         width_shift_range=10,
33         height_shift_range = 10
34     )
35
36 # 10個の画像を生成
37 g = datagen.flow(x, batch_size=1, save_to_dir=output_dir, save_prefix='img', save_format='jpg')
38 for i in range(10):
39     batch = g.next()
```

使用ライブラリのインポート

```
1 from keras_preprocessing.image import load_img, img_to_array
2 from keras_preprocessing.image import ImageDataGenerator
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5 import os
6 import glob
7 from tf_explain.callbacks.occlusion_sensitivity import OcclusionSensitivityCallback
8 from PIL import Image
9 import numpy as np
10 import tensorflow as tf
11 from tensorflow import keras
```

謝辞

この研究を行うにあたって、多くのご指導とご協力を賜った大阪工業大学の先生方をはじめとするWWL（ワールド・ワイド・ラーニング）構築事業の方々、また学校の先生方に心より感謝申し上げます

参考文献

Fashion-MNIST
<https://github.com/zalando-research/fashion-mnist/blob/master/README.ja.md> (2021/4/23)

tf-explain
<https://tf-explain.readthedocs.io/en/latest/methods.html#grad-cam> (2021/9/22)

ImageDataGenerator
<https://keras.io/ja/preprocessing/image/> (2021/4/23)



角の三等分線に関する 三角形の中心の共線証明

大阪府立千里高等学校

導入

図1のように、任意の三角形においてそれぞれの内角の三等分線を引き、各辺に近い線同士の交点を D, E, F とすると、三角形 DEF は正三角形になるという Morley の定理が知られている。この定理に関連して Taylor と Marr が存在を証明した図1~3に示す3つの三角形の中心が図4のように共線であることを示した。本研究ではこれらの中心を通る直線を「内角の Morley 線」と名付けた。

定義

以下、2直線 PQ と RS の交点を $PQ \cap RS$ と表す。

導入で述べた3つの中心とは以下の3点である。

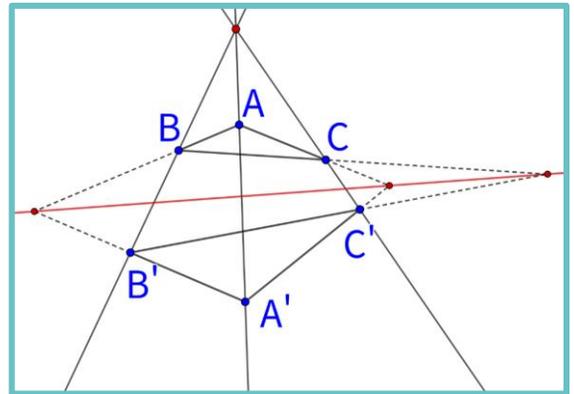
- 1st Morley Center : $\triangle DEF$ の重心で、3直線 DD', EE', FF' 上にあることが知られている。(図1)
- 1st Morley-Taylor-Marr Center : 共点な三直線 AD, BE, CF が交わる点。(図2)
- 2nd Morley-Taylor-Marr Center : 共点な三直線 AD', BE', CF' が交わる点。(図3)

方法

当初はベクトルでの証明を試み、証明を完了させたが、初等幾何的な証明の方が簡潔にまとめることができた。証明の大部分はデザルグの定理による。

デザルグの定理

任意の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で
3直線 AA', BB', CC' が共点 \Leftrightarrow
3点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線



デザルグの定理の図

証明

$\triangle D'EF$ と $\triangle DE'F'$ において、 $D'D, EE', FF'$ は共点である。従ってデザルグの定理より $D'F \cap DF' = B, D'E \cap DE' = C, EF \cap E'F'$ の交点が共線であるとわかる。

言い換えれば、 $BC, EF, E'F'$ は共点である。 — (1)

$\triangle BEE'$ と $\triangle CFF'$ において、(1) が成り立つから、デザルグの定理より $BE \cap CF, BE' \cap CF', EE' \cap FF'$ が共線であることがわかる。この3点が共線を示したかった3つの中心である。

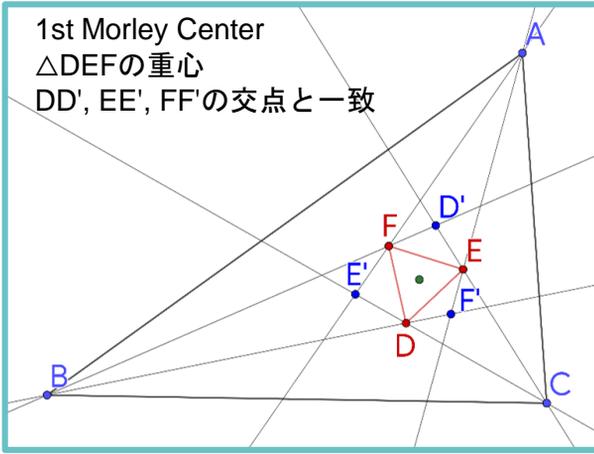


図1. Morley の定理と 1st Morley Center

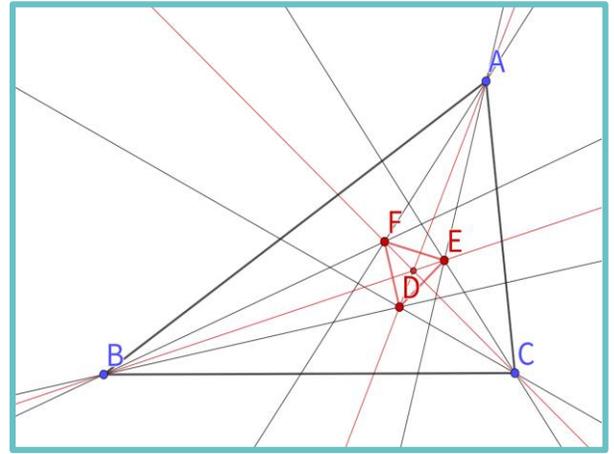


図2. 1st Morley-Taylor-Marr Center

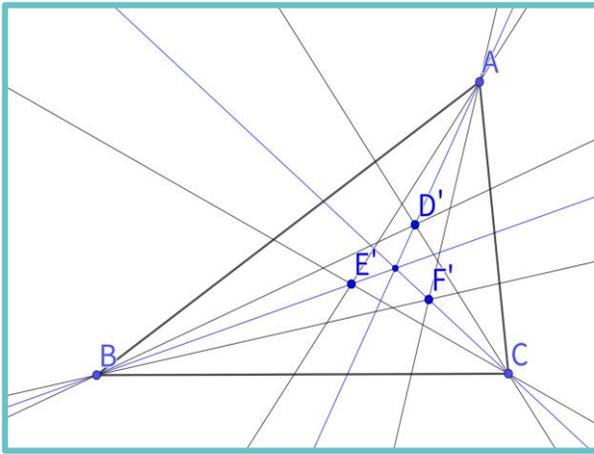


図3. 2nd Morley-Taylor-Marr Center

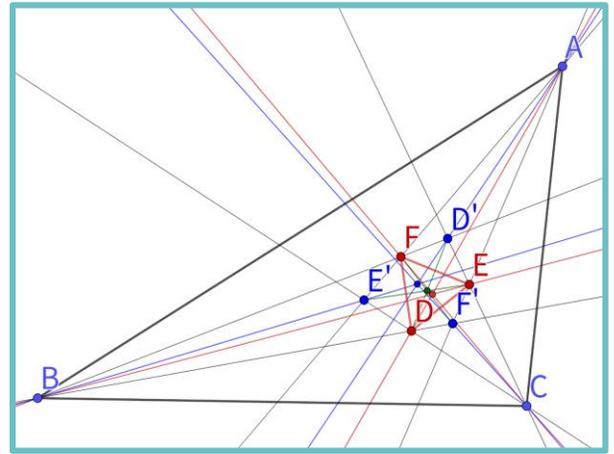


図4. 中心の共線

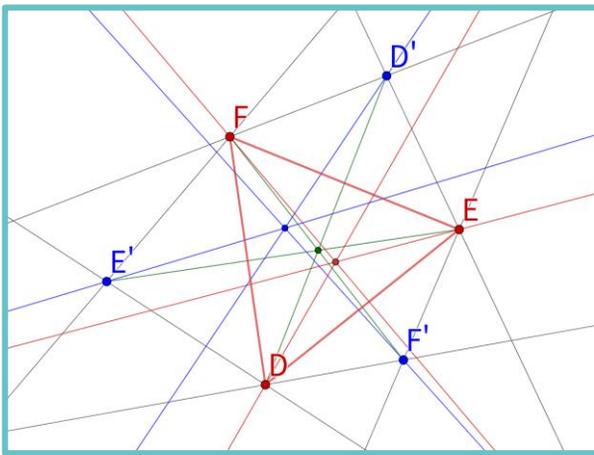


図5. 図4の拡大図

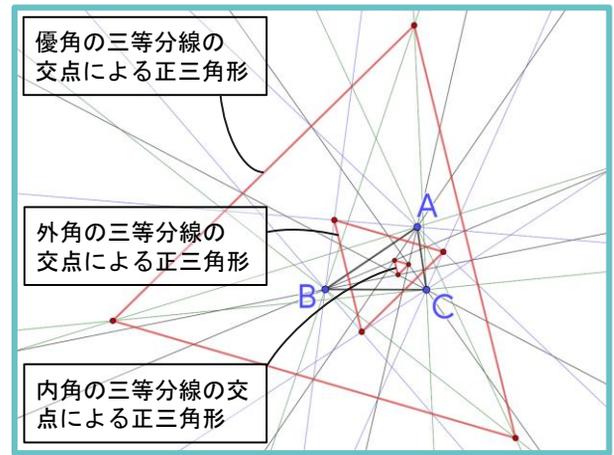


図6. 外角, 優角の三等分線

展望

1. 外角, 優角の三等分線

Taylor と Marr は図6に示すように外角の三等分線, 優角の三等分線の交点をとっても Morley の定理と同様に正三角形を構成できることを示した. そこから今回議論した内角の三等分線の場合と同様に中心を定義すると, それらが共線であることが証明できた. これらを「外角 (優角) の Morley 線」と名付けた. さらに作図ツールにより, 優角の Morley 線上には 1st Morley Center があることが予想できた. これを証明することに加えて, Taylor と Marr が論文中で定義した 18 種類の正三角形の中心同士でも, 同様な共線関係があるかを調べたい.

2. シムソン線の包絡線

シムソンの定理で現れる直線の包絡線は図7のように Steiner のデルトイドと呼ばれる曲線となる. この曲線の頂点から構成される三角形は正三角形となり, さらにその各辺は図6で示した3つの正三角形の各辺とそれぞれ平行となることが知られている. Steiner のデルトイドは Morley の定理のほかにも九点円などの三角形に関する重要な性質との関連が見られる. デルトイドを考察することで Morley の定理と三角形のほかの性質との関連性を調べたい.

3. Morley-Ceva Center

図8のように $M_A = BC \cap DD'$ とし, M_B, M_C を同様に定めれば, AM_A, BM_B, CM_C は共点となる. この交点を「内角の Morley-Ceva Center」と名付けた. 外角, 優角から得た正三角形でも同様に「外角 (優角) の Morley-Ceva Center」を定義すると, 3点が共線であることが証明できた.

1. で述べた18種類の正三角形でもこの中心をとり, それらの共線関係などを調べたい.

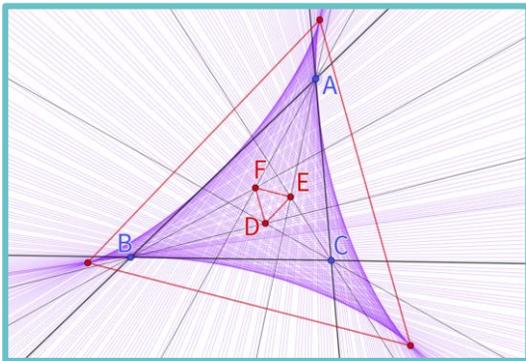


図7. Steiner のデルトイド

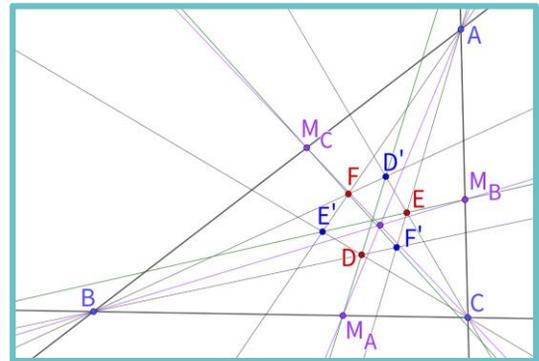


図8. Morley-Ceva Center

参考文献

- F. G. Taylor, W. L. Marr, the six trisectors of each of the angles of a triangle, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society, 1913
- Encyclopedia of Triangle Centers, Clark Kimberling, <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>, 最終閲覧日 2021-12-21
- “Morley's Theorem”, Wolfram MathWorld, <https://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>, 最終閲覧日 2021-12-21
- “Steiner Deltoid”, Wolfram MathWorld, <https://mathworld.wolfram.com/SteinerDeltoid.html>, 最終閲覧日 2021-12-21

正弦の拡張(Extension of Sine)

−1から1以外の値を取る正弦

(A sine that takes a value other than −1 to 1).

大阪府立東高等学校

Osaka Prefectural Higashi High School

目的(動機)

$\sin z = 2$ を満たす z が存在することをしり、 $\sin z$ がどのような値でもそれを満たす z が存在すると考え、そのような z について調べた。

方法

- ①複素数 z において $\sin z$ を定義する。
- ② $\sin z$ の値が実数かつ絶対値が1より大きいとき、また純虚数の時の z を求める。

結果

n は整数とする

(1) 1より大きい実数 a の時 $\sin z = a$

$$\Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi + i \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

(2) −1より小さい実数 a の時 $\sin z = a$

$$\Leftrightarrow z = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi + i \log(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

(3) 純虚数 ai の時

$$\sin z = ai \Leftrightarrow z = n\pi + i \log\left\{(-1)^n a + \sqrt{a^2 + 1}\right\} \quad (a \neq 0)$$

今後の展望

$\sin z$ の値に応じて式を作ることができた。
今後は $\sin z$ を $\cos z$ に置き換えたり、
一般的な複素数の場合について考えたい。

参考文献

宇野信一 著「複素数とは何か」
講談社 2012.10.20

【証明】

オイラーの公式より

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x を $-x$ とすると

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① から ② を引くと

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ が成り立つ}$$

(1) $\sin z$ が1より大きいとき

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a$$

$$e^{2iz} - 2ae^{iz}i - 1 = 0 \quad (e^{iz} - ai)^2 = 1 - a^2.$$

$$e^{iz} - ai = \pm \sqrt{1 - a^2} \quad e^{iz} = i(a \pm \sqrt{a^2 - 1}).$$

$z = x + yi$ (x と y は実数)とおく

$$e^{iz} = e^{i(x+yi)} = e^{xi-y} = e^{-y} \cdot e^{xi} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) \text{ より}$$

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = 0 \\ e^{-y} \sin x = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

$e^{-y} > 0$ 、 $a \pm \sqrt{a^2 - 1} > 0$ より $\sin x > 0$ 、また $\cos x = 0$ なので

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ (nは整数)}$$

$$\text{また } (e^{-y} \sin x)^2 + (e^{-y} \cos x)^2 = (a \pm \sqrt{a^2 - 1})^2$$

$$e^{-2y} = (a \pm \sqrt{a^2 - 1})^2$$

$$-2y = 2 \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$y = -\log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$y = \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$\text{よって、} z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

sin zが-1より小さい時、純虚数の時も同様にして求めると

(2) sin z が-1より小さい時

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + i\log(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

(3) sin z が純虚数 ai の時

$$z = n\pi + i\log\{(-1)^n a + \sqrt{a^2 + 1}\} \quad (a \neq 0)$$

と求めることが出来た

ここで別のアプローチを考えてみる

sin(x + yi)を考えると

$$\begin{aligned}\sin(x + yi) &= \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^y(\cos x - i\sin x)}{2i} \\ &= \frac{\cos x(e^{-y} - e^y) + i\sin x(e^y + e^{-y})}{2i} \\ &= \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2i} + \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ &= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \sin x \cdot \operatorname{cosh} y + i\cos x \cdot \operatorname{sinh} y\end{aligned}$$

という式が成り立つ

(1) $\sin z$ が1より大きいとき

$\sin z = \sin(x + yi) = a$ (x, y は実数、 a は1より大きい実数)

$$\sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y = a$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cosh y = a \\ \cos x \cdot \sinh y = 0 \end{cases}$$

$$a > 1 \text{より } \cosh y > 1, \quad 0 < \sin x \leq 1 \\ \sinh y \neq 0$$

$$\text{したがって } \begin{cases} \cos x = 0 \\ 0 < \sin x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot \cosh y = \cosh y \text{ より } \cosh y = a$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = a \text{ これを解いて } y = \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$\text{ゆえに } z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

となりこれは2枚目の結果と一致する

また

(2) $\sin z$ が-1より小さい時

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \log(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

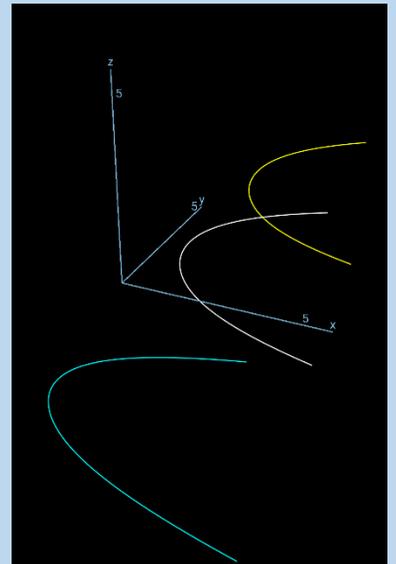
(3) $\sin z$ が純虚数 ai の時

$$z = n\pi + i \log\{(-1)^n a + \sqrt{a^2 + 1}\} \quad (a \neq 0)$$

がこの方法で求めることができ、これらの結果も2枚目の結果と一致した。

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ z = \log(t \pm \sqrt{t^2 - 1}) \end{cases}$$

x 軸は a ,
 y 軸・ z 軸は z の
実部と虚部を表す。
黄、白、青は $n = 1, 0, -1$
の場合。



$n \times n$ の $\circ \times$ ゲームが引き分けることの証明

Proof of a “ $\circ \times$ game” in $n \times n$ squares ending in a draw

Abstract

A “ $\circ \times$ game” is a simple game that is known among Japanese children. It's made of 3×3 squares, and the player's goal is lining \circ or \times up lengthways, sideways or diagonally. The fact that this game always ends in a draw is famous. We thought this game made of $n \times n$ squares also end in a draw, and tried to prove it mathematically.

1. 目的

幅広い世代に知られている 3×3 の $\circ \times$ ゲームを、 $n \times n$ に拡張しても、勝敗はつかないことを数学的に証明すること。

〈証明〉

【1】 3×3 の $\circ \times$ ゲーム

相手がリーチを一つ作ったらすぐにそこに自分のマークを書けば負けないことが知られている。

【2】縦横の一行のマス数を n と置き、勝つために必要な手数を n で表し、 $n \times n$ の $\circ \times$ ゲームを 3×3 の $\circ \times$ ゲームの証明を使って証明する。($n \geq 4$)

相手の勝ち方は、縦、横、斜めの $2n + 2$ 個、相手が勝つには少なくとも n 手必要。

(ア)

- ① 相手がマークを書いた縦列または横列上に自分のマークを書く。
- ② 自分の書くマーク同士は縦列または横列上に重ならない。
- ③ 相手が2回目以降に書いたマークが、自分が先に書いたマークの縦列または横列上にあったら②を守り、適当な所に置く。
- ④ できるだけ2つの対角線上に置く。2つの対角線上に1個ずつ自分のマークが書かれていたら、④はもう考えなくてよい。

1 (ア)を守って $(n-3)$ 回繰り返すと、次の①②のグループに分けられる。

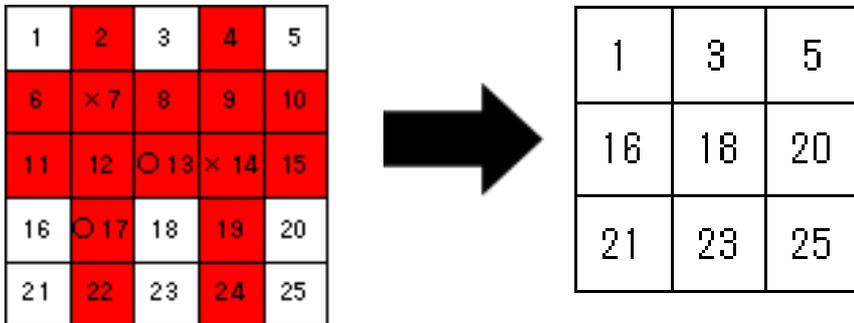
① 2つの対角線上にしか自分のマークが書かれていない。

② 2つの内、片方の対角線上にしか自分のマークが書かれていない。

② ①の時、自分のマークが置かれている縦、横列をすべて消してくっつける。

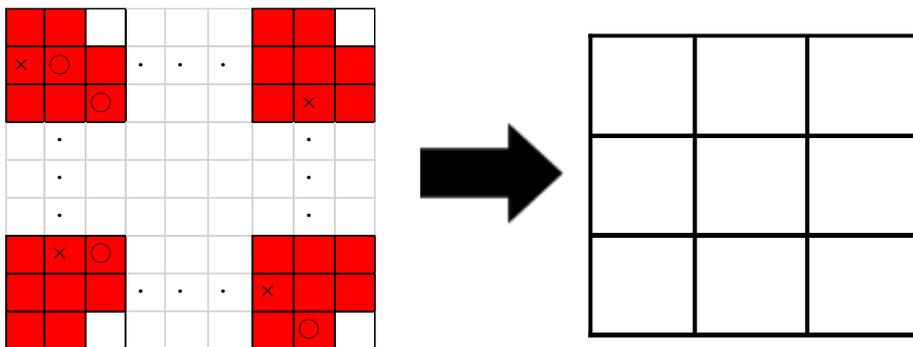
例) 縦と横にマスが5個並んでいるとき

$n-3=2$ (回) ずつ繰り返したとき (自分を○とする)



一般化) 縦と横にマスが n 個並んでいるとき

$n-3$ (回) ずつ繰り返したとき、



このとき、縦と横は揃えて勝てないことが証明される。

$n-3$ (回) 終了時点で

【 i 】 2つの対角線上に自分のマークが置いてある場合

②, ③より相手は勝てない。

【 ii 】 1つの対角線上にマークが置いてあり、もう1つにおいていないとき
相手が対角線上においたとき、自分も一つその対角線上におき、おかれるまでは

【 i 】 の時と同様に行う。両方の対角線上に自分のマークが置かれたとき、

②, ③より相手は勝てない。

以上より $n \times n$ の $\circ \times$ ゲームは互いにミスをしなければ勝敗はつかない。☒

4. 考察

この証明から、おけるマスを増やしても勝ちやすくなるわけではないとわかる。このゲームに似たゲームに五目並べがある。○×ゲームとの違いは碁を打つ場所が固定されておらず、置ける選択肢が多いことに加え、揃えなければならない碁の数は5個と固定されていることが挙げられる。○×ゲームではマスを多くすればするほど並べるマークも増えることが、引き分けになってしまう一つの要因ではないかと考える。

5. 結論

○×ゲームを拡張しても必ず引き分けになる。ひとつの原因として、拡張に比例して一列揃えるための手数も増えることや揃えられる場所の制限が多いことなどが考えられ、それを改良すれば新しい○×ゲームを作ることが出来る可能性がある。

“封筒”の一刀切り

広島大学附属高等学校

定義

紙 : 厚さのない平面の一部のこと.
平坦折り : 三次元空間に立体が存在するとき,その立体を「折る」という操作を用いて二次元空間の図形へと変形させること.
一刀切り : 平面を1つ定める.その平面上に平坦折りした立体を置き,それをその平面上に存在する直線に沿って1回のみ切ること.
封筒 : 2枚の合同な長方形の紙を,対応する3組の辺どうしで接着した図形のこと.

研究概要

私たちの研究は封筒と名付けた図形を平坦折りし,任意の三角形を一刀切りすることである.現段階では封筒のどの範囲に三角形が描かれているのかで場合分けをし,それぞれの場合について一刀切りができること,またはその方法を証明している.

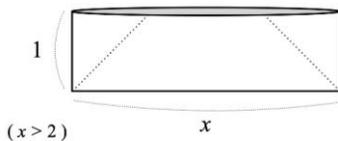
研究方法

トレーシングペーパーとテープを用いて封筒を再現し,実際に一刀切りをすることで性質を探る.

研究内容

先行研究 Erik and Martin Demaine(1999), Bern et al.(1998)より,任意の平面図形から一刀切りによって任意の多角形が切り出せることが証明されている.

まず,わたしたちはこの研究を進めていくにあたって封筒の縦横の辺の比に制限を付けた.具体的には,(横の辺):(縦の辺)の比の値が2より大きくなる封筒を対象として研究をしていく.



また,本研究では封筒に描く三角形は封筒の辺を跨がないものとする.

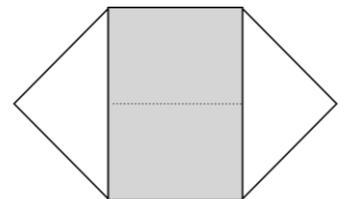
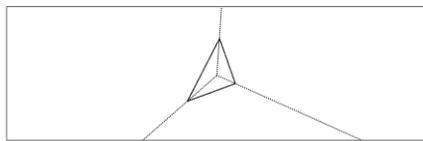
本研究ではこの封筒において,接着していない一組の辺の方向を横方向の基準とし,封筒の2つの横の辺について先に示した辺を上底,他方の辺を下底と定義する.

(i)封筒の左右から正方形を除いた範囲

下の図のように封筒の左右にそれぞれ縦の辺と1辺の長さが等しくなるような正方形をとる.封筒上のその正方形を除く範囲(下の図の網掛け部分)内に描かれた三角形を一刀切りする.

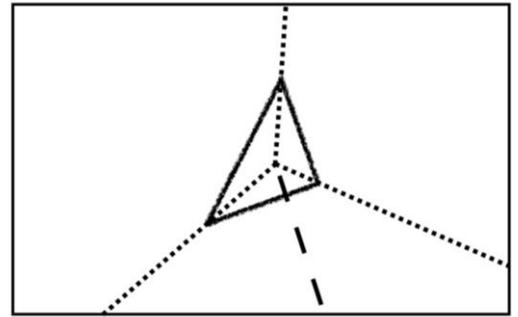
封筒を下図のように平坦折りする.このとき,平坦折りした後の図形は平面上に存在しており下の図の網掛け部分は紙が重なっていないことから,1枚の紙として扱うことができる.先行研究よりこの範囲内に存在する任意の三角形(この場合は任意の多角形も)を一刀切りによって取り出すことができる.

先に述べた封筒の横と縦の辺の比の条件は,封筒上にこの範囲を存在させるためである.



以降は,この封筒の左右の正方形の範囲に描かれた三角形について議論していく.

次の場合に入る前に、長方形に描かれた任意の三角形を一刀切りするための平坦折りの方法について説明しておく。



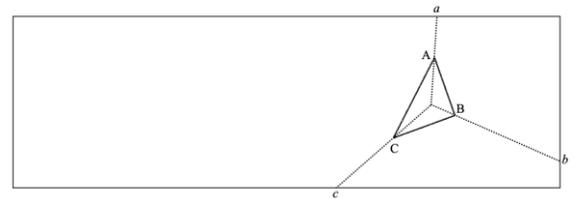
三角形を一刀切りによって切り取るための平坦折りをするときに着目するのは、描かれた三角形の3本の内角二等分線と1本の三角形の内心を通る三角形のいずれかの辺の垂線である。

これら4本の線を、内角二等分線は山折り、垂線は谷折り(またはこの逆)して折り進めることで平坦折りが完了する。

次に紹介する場合分けは、この三角形の内角二等分線と垂線に注目して考察を進める。

(ii) 3本の内角二等分線がそれぞれ上底、2つのうち三角形に近いほうの縦の辺、下底と交わるとき

※このとき、順にその三角形の頂点をA, B, Cとし、それぞれの対応する封筒との交点をa, b, cとする。

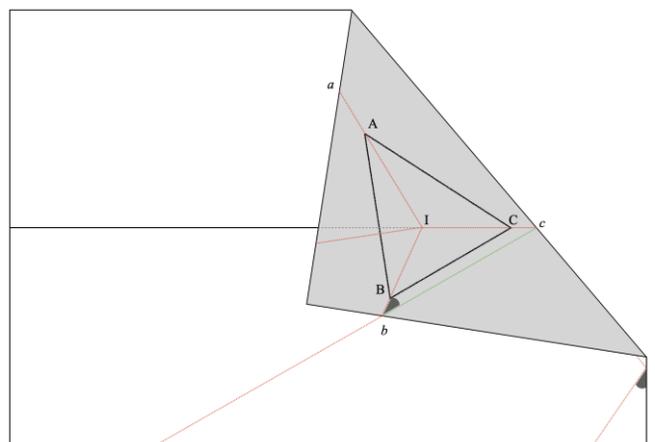
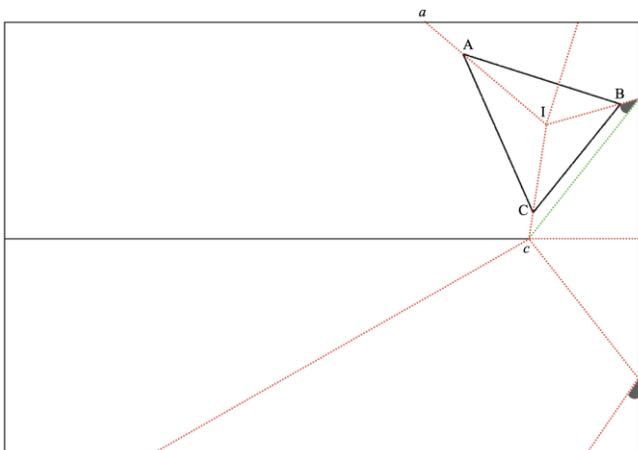


上記の方法だと、三角形の内心から辺への垂線は3種類存在することになる。今回はその垂線を、辺ABに対する垂線のひとつに限定し、垂線Lと呼ぶこととする。

(ア) 垂線Lが上底と交わるとき

右の方法で折り目を付けていく説明の都合上封筒を展開した状態で説明をする。

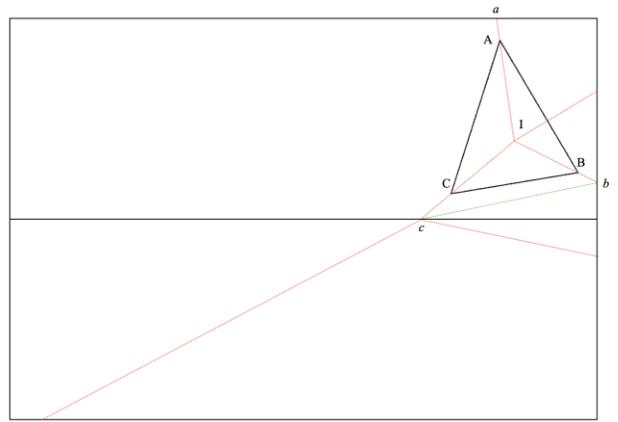
1. 三角形の3本の内角二等分線を引く
2. 三角形の内心を通る、辺ABに対する垂線を引く
3. 線分bcを引き、下底を対称の軸として対称な線分を引く
4. 線分lcが下底と重なるように折ったとき、直線bcと重なるような直線を引く
5. 点cから点bを含む縦の辺に垂線を引く
6. 下の図に示した2つの角の大きさが等しくなるように直線を引く



(イ)垂線Lが縦の辺と交わる時

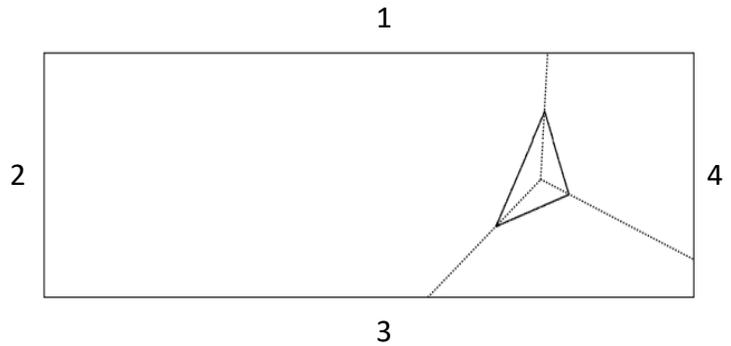
この場合,先ほど示した方法にさらに操作を重ねていくを必要があるが,それだと正しい折り目を付けられる場合とそうでない場合が出てくる.

その場合分けについては今後の研究で説明させていく.



(ii)では,三角形の3本の内角二等分線と封筒の辺の交わり方に着目した.

ここで,三角形の3本の内角二等分線と封筒の交わり方を場合分けする.
上底,左の縦の辺,下底,右の辺の順に1,2,3,4とナンバリングをすると,3本の内角二等分線と封筒の辺の交わり方は,



(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4),
(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(2,2,1),(2,2,3),(2,2,4),
(3,3,1),(3,3,2),(3,3,4),(4,4,1),(4,4,2),(4,4,3)

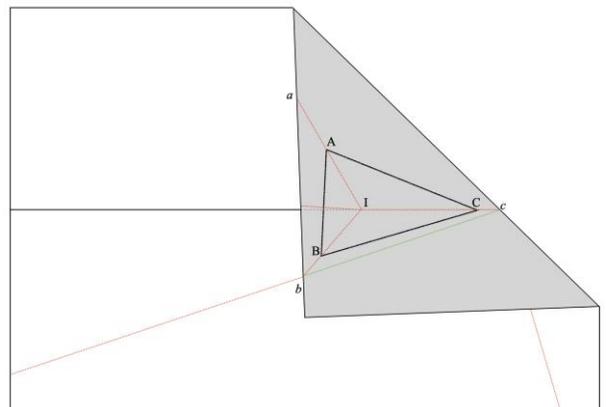
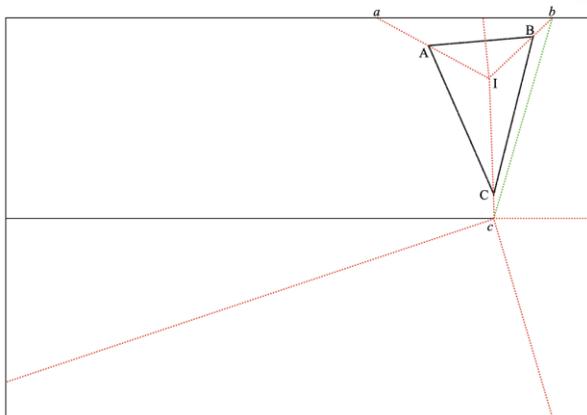
(ii)の場合は,上に示したもののうちの(1,3,4)である.

ここからは,先ほど(ii)で示した折り方を他の場合に適用できないかを考えていく.

(iii)2本の内角二等分線が上底,他の1本の内角二等分線が下底と交わる場合

※左上の頂点から時計回りに点A,B,Cとし,それぞれの頂点の内角二等分線と封筒の辺の交点を点a,b,cとする.

1. 三角形の3本の内角二等分線を引く
2. 三角形の内心Iを通る,辺ABに対する垂線を引く
3. 線分bcを引き,下底を対称の軸として対称な線分を引く
4. 線分Icが下底と重なるように折ったとき,直線bcと重なるような直線を引く
5. 点cから三角形に近いほうの封筒の縦の辺に垂線を引く



今後の展望

先ほど示した場合分けだと、今回触れたものを除いても残り14パターン存在する。そのため、残りの場合分けのなかでつながりを見つけて分類し、その分類ごとに折り方を考えていく。

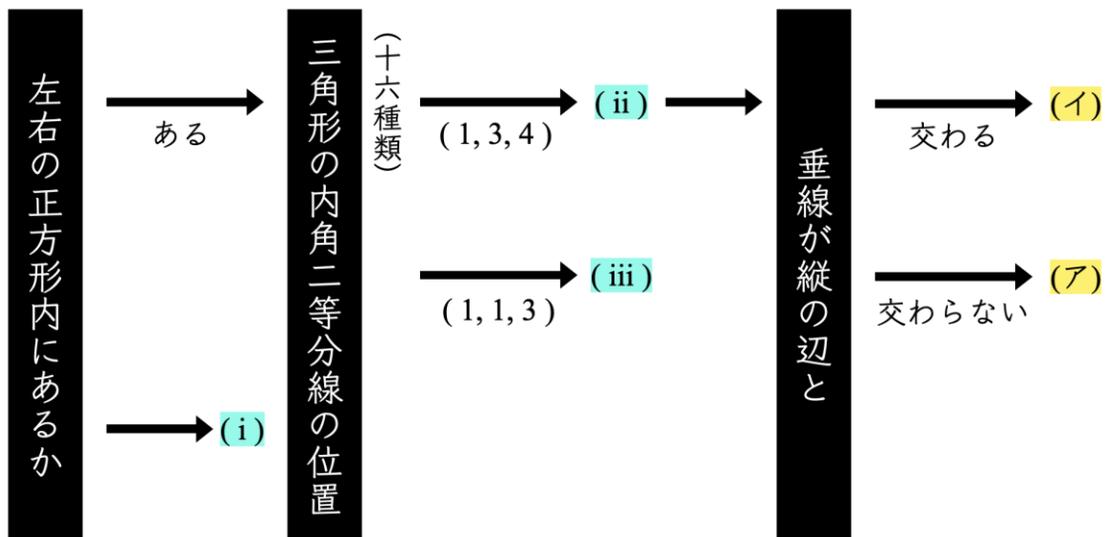
(ii)において、三角形の内心を通るいずれかの辺に対する垂線が封筒の縦の辺と交わる場合についての検討を先送りしていた。その場合についての折り方も明確にしていこうと思う。

現在他の折り方を考案し、そちらの証明を進めている。その折り方だと、すべての三角形が一刀切りできそうだと現段階では予想している。

参考文献

・ http://www.ic.daito.ac.jp/~mizutani/machine/origami/fold_and_cut.html (最終閲覧日 2021.10.10)
Erik Demaine, Martin Demaine and Anna Lubiw, Folding and Cutting Paper, (Lecture Notes in Computer Science, volume 1763(1998), pages 104–117.)

・ 折り紙のすうり リンケージ・折り紙・多面体の数学 (ジョセフ・オルーク著・上原隆平訳 近代科学社)



ナポレオン三角形の拡張

山口県立徳山高等学校

動機

先行研究である、ナポレオン三角形の拡張についてのポスターを見た際、これを更に拡張し、 n 角形の場合について調べたいと思った。

ナポレオン図形について

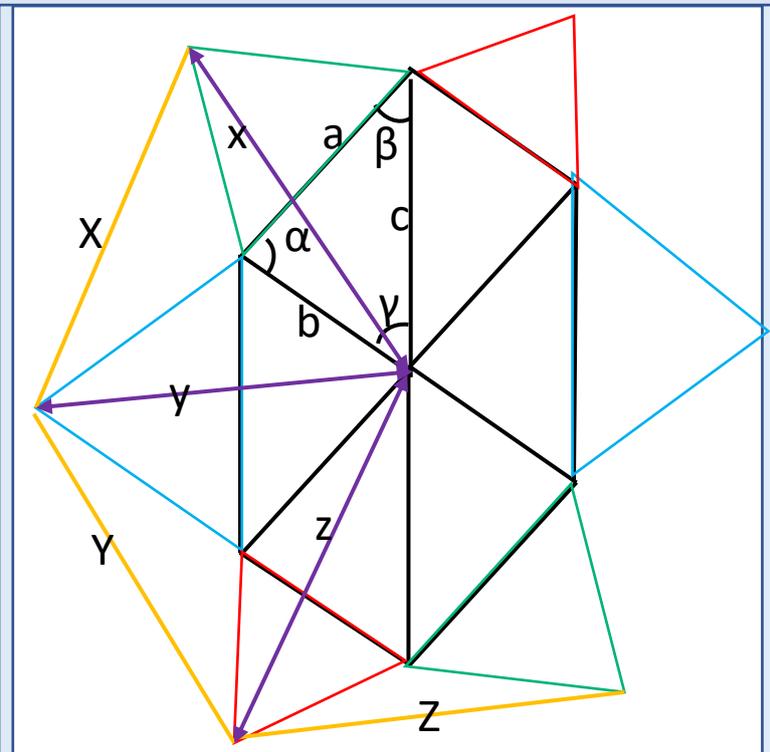
ナポレオン三角形...「任意の三角形に対し各辺を一边とする正三角形を描き、これら3つの正三角形の重心どうしを結んだとき、この三角形は正三角形となる。」と定義されている。今回はナポレオン三角形を拡張したナポレオン図形について定義する。

ナポレオン図形... n 角形について、その一边に着目しその辺を一边とする正多角形をとり、その重心をとる。これを全ての辺において行い、重心どうしを結ぶ。この操作によってできた図形をナポレオン図形と定義する。

また n 角形は元の図形と呼称する。

証明 I

元の図形が六角形の時、対辺が同じ長さ且つ平行で、さらに向かい合う対角線とも平行の時、ナポレオン図形が正六角形になる



- 全ての黒三角形は合同
- 同じ色付き三角形は合同
- 色付き三角形は正三角形の時、 $X=Y=Z$ 且つ $x=y=z$ であれば成立する。

余弦定理で

$$X^2 = a^2 + c^2 - ac \cos \beta + \sqrt{3} ac \sin \beta$$

$$Y^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \gamma + \sqrt{3} bc \sin \gamma$$

$$Z^2 = a^2 + b^2 - ab \cos \alpha + \sqrt{3} ab \sin \alpha$$

また黒三角形で余弦定理

$$\cos \beta = (a^2 - b^2 + c^2) / 2ac$$

$$\cos \gamma = (-a^2 + b^2 + c^2) / 2bc$$

$$\cos \alpha = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$$

$$\sin \beta = \sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)} / 2ac$$

$$\sin \gamma = \sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)} / 2bc$$

$$\sin \alpha = \sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)} / 2ab$$

以上から $X^2=Y^2=Z^2$ が言える。

また余弦定理より

$$x^2 = a^2 + c^2 - accos\beta + \sqrt{3}acsin\beta$$

$$y^2 = b^2 + c^2 - bccos\gamma + \sqrt{3}bcsin\gamma$$

$$z^2 = a^2 + b^2 - abcos\alpha + \sqrt{3}absin\alpha$$

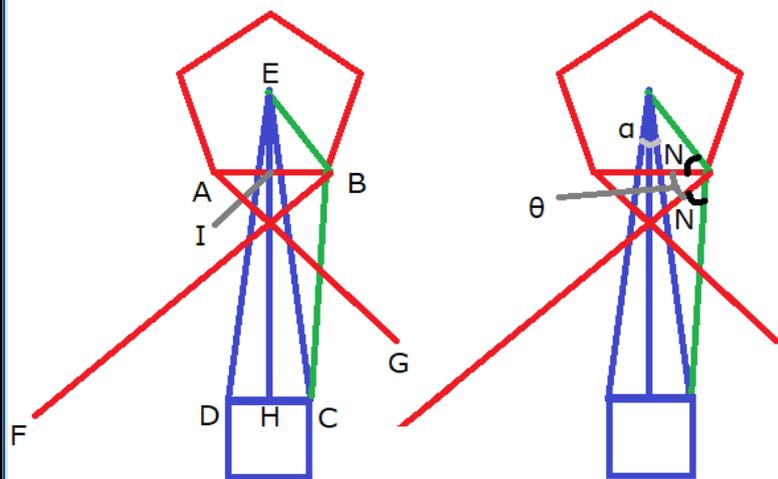
であるため $X^2=Y^2=Z^2$ より

$$x^2=y^2=z^2$$

$X, Y, Z, x, y, z > 0$ より

$X=Y=Z$ と $x=y=z$ が言え題意が示された。

イメージ：正五角形の場合



今回の証明に際し、上図のように角と辺を設定する。またナポレオン図形と元の図形は凸多面体とする。

証明

Phase1 AGとBFの干渉を考察

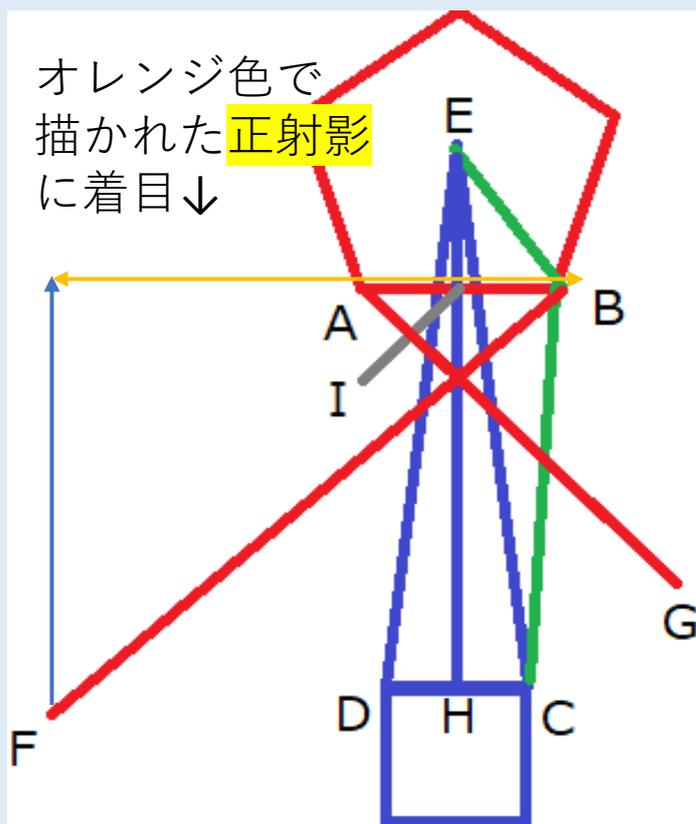


Phase2 AGとBFの線対称性

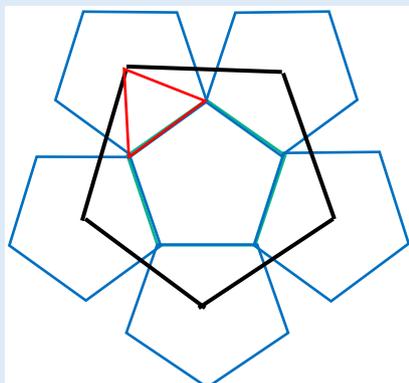


Phase3 正射影の利用

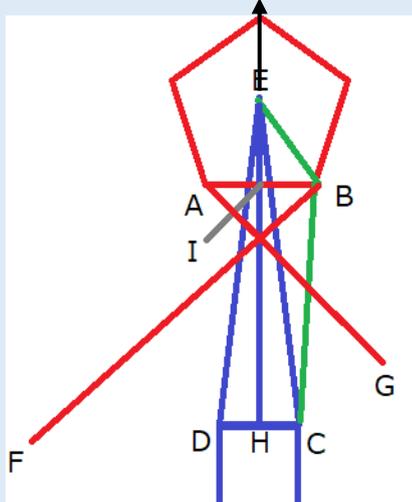
オレンジ色で描かれた正射影に着目↓



証明II 「ナポレオン図形が表現しえない図形が存在する」例として以下のような正五角形についてナポレオン図形を考える



図では黒がナポレオン図形である。ではナポレオン図形の1つの頂点を無限に遠ざけた場合、元の図形はどのようなになるだろうか



図では点Eを無限に遠ざけている

正射影がABの中点を越える

↓

AGとBFが交わる

↓

凸多面体でなくなるので、元の定義に反する

このような流れで証明を進める。

三角形EBCで正弦定理より

$$BC/\sin(90-\beta)=a/\sin(90-\beta)$$

$$BC=a \times \sin(90-\beta)/\sin(90-\gamma)$$

よってBFの正射影の長さは
 $2BC\cos N\cos\theta$ なので

$$=2a\sin(90-\beta)\cos N\cos\theta/\sin(90-\gamma)$$

となり、また $BI=a\cos N$ であるから

$$2a\sin(90-\beta)\cos N\cos\theta/\sin(90-\gamma) \geq a\cos N$$

を示せばよい。

また、 $a>0, \cos N>0$ より

$$2\sin(90-\beta)\cos\theta/\sin(90-\gamma) \geq 1,$$

式変形をして

$$2\cos\beta\cos\theta/\cos\gamma \geq 1$$

(i) $0<\gamma<90$ の時、 $\cos\gamma>0$ より

$$2\cos\beta\cos\theta \geq \cos\gamma$$

$$2\cos\beta\cos\theta - \cos\gamma$$

$$=2\cos(N+\alpha/2)\cos\theta - \cos\{(N-\alpha/2)+\theta\}$$

$$=(2\cos N\cos\theta\cos\alpha/2) -$$

$$(2\sin N\cos\theta\sin\alpha/2) - \cos(N-\alpha/2)\cos\theta$$

$$+ \sin(N-\alpha/2)\sin\theta$$

ここで $\alpha \rightarrow 0$ より $\alpha/2=0, \cos\alpha/2=1,$

$\sin\alpha/2=0$ と考えられるため

$$=2\cos N\cos\theta - \cos N\cos\theta + \sin N\sin\theta$$

$$=\cos N\cos\theta + \sin N\sin\theta$$

ここで加法定理の逆を用いると

$$=\cos(N-\theta)$$

ここで、 N は正 n 角形の重心から頂点へ線を引き一辺とのなす角をとっているため $45 \leq N < 90$ である。

また、 $180 > 2N + \theta$ であるため、上記より $0 < \theta < 90$ が言える。

よって $N - \theta$ の \max と \min はそれぞれ $\max = 90$ (但し完全に 90 ではなく限りなく近い値である)

$$\min = -45$$

であることがわかる。

よって $\cos(N - \theta)$ は、 $\cos(N - \theta) > 0$ を満たす。故に題意は示された。

(II) $\gamma = 90$ のとき

$$2\cos\beta\cos\theta/\cos\gamma \geq 1$$

$$\gamma = 90 \text{ より } \cos\gamma = 0$$

$$45 \leq N < 90 \text{ であり } \gamma = N + \theta - \alpha/2$$

であるため

$$0 < \theta \leq 45$$

よって $2\cos\beta\cos\theta$ は

$$2\cos\beta\cos\theta > 0$$

を満たす。よって

$$2\cos\beta\cos\theta/\cos\gamma$$

は正の無限大に発散するため $2\cos\beta\cos\theta/\cos\gamma \geq 1$ が示された。

(I), (II) より $2\cos\beta\cos\theta/\cos\gamma \geq 1$ が示されたため BF と AG が交わることが示された。よって EH を無限大まで延長した時、元の図形が定義 i に反するため、ナポレオン図形が先に与えられた場合に元の図形を考えたとき、元の図形が存在しない場合があることが示された。

展望

1つ目の証明について、六角形の場合は条件を制限することでナポレオン図形が正六角形になることが示せたが、これは十分条件であって必要条件とは言い切れないので、そこを明らかにしたい。

2つ目の証明について、今回は無限大まで延長した場合に成立しないことが示されたが、どれだけ延長したら成立しなくなるかは判明しなかったため、どれだけ延長すれば成立しなくなるかを判明させたい。

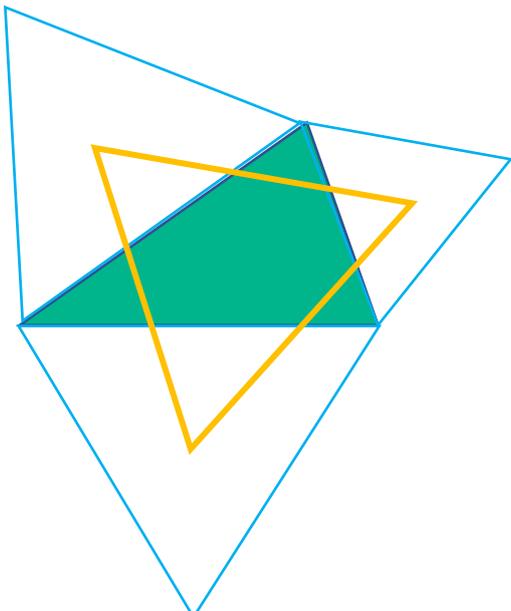
参考文献

Posters of Mathematics 数学科課題研究ポスター集 Since 2015 筑波大学付属駒場中・高等学校数学科2021 より「ナポレオン三角形の拡張」(筑波大学付属駒場高等学校2年 田中 泉生 氏)

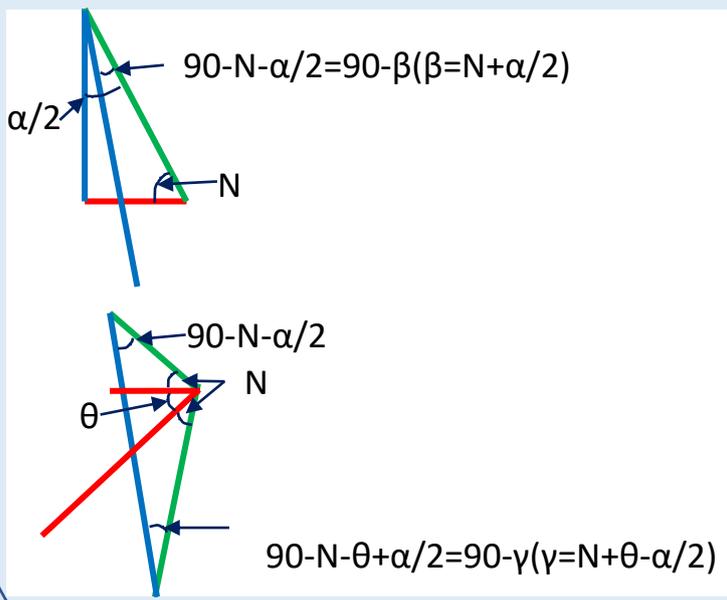
資料

例や参考となる図形を表した

ナポレオン三角形(黄色の三角形)



証明 II の補足

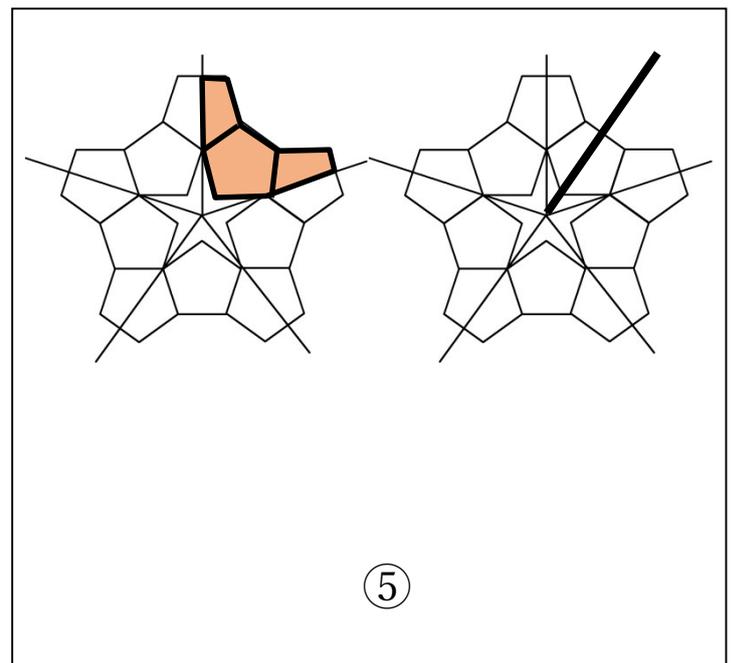
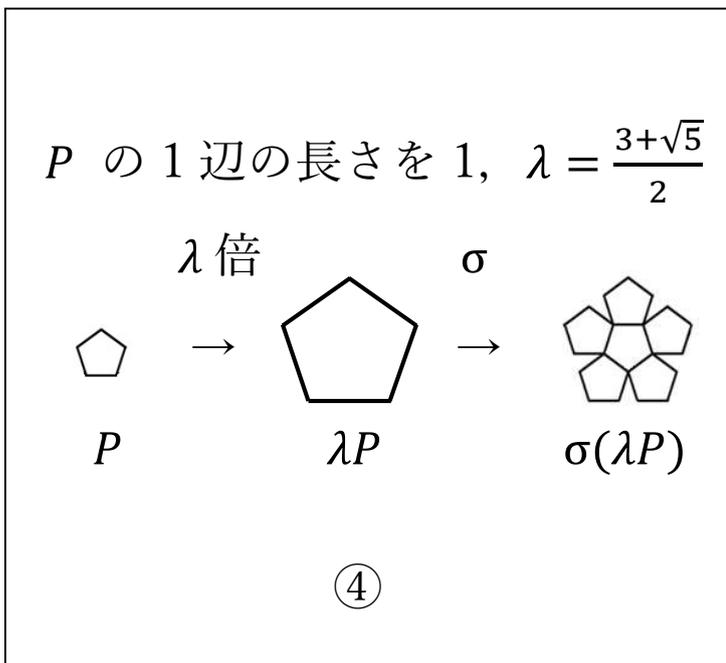
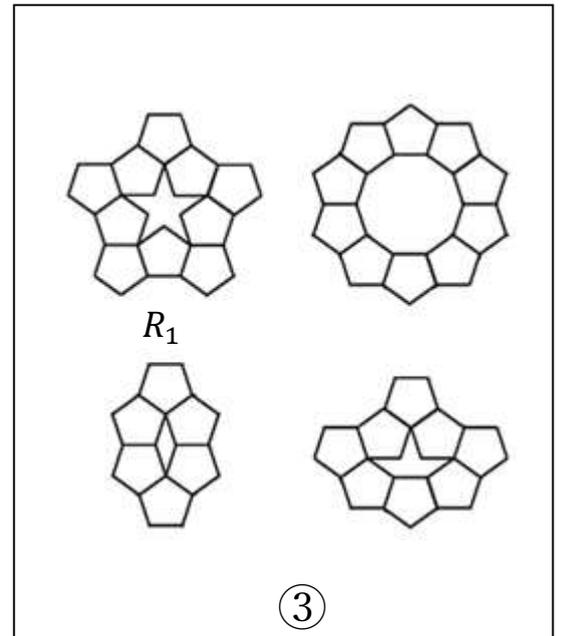
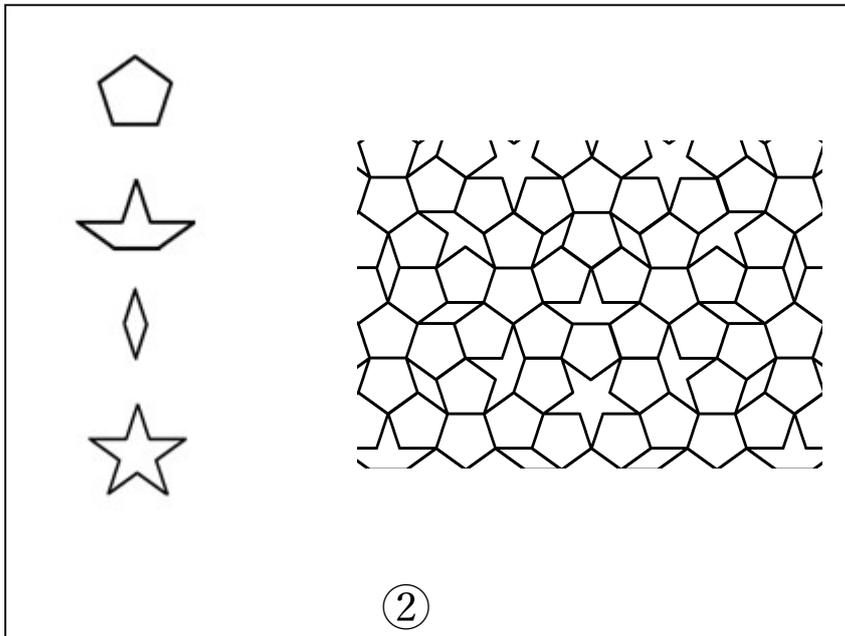


Substitution rule による大きな平面的正 5 角形リングの構成

沖縄県立球陽高等学校

はじめに

- ① 長さ n の平面的正 5 角形リング
- ② ペンローズタイリング
- ③ ペンローズタイリングの平面的正 5 角形リング
- ④ ペンローズタイリングの正 5 角形の Substitution rule
- ⑤ 5 回回転対称性をもつ平面的正 5 角形リング



定理

- (1) いくらでも長い平面的正5角形リングが存在する。
- (2) 任意の半径の円に対して、それを内側の領域に含む平面的正5角形リングが存在する。
- (3) (1), (2)を満たす5回回転対称性をもつ平面的正5角形リングで、ペンローズタイリングに含まれるものが存在する。

定理(1)の証明

長さ 10 の R_1

| | | | | | |
|-------------------------|----|----|-----|-----|----------------|
| Substitution rule の適用回数 | 1 | 2 | 3 | ... | n |
| リングの長さ | 30 | 90 | 270 | ... | $10 \cdot 3^n$ |

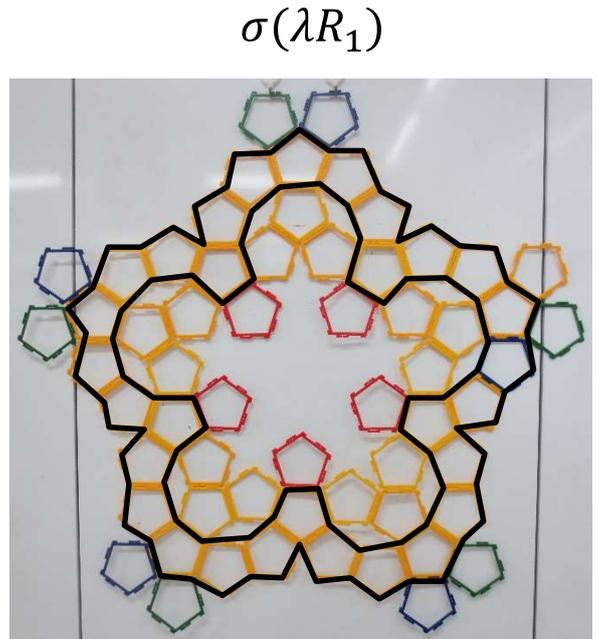
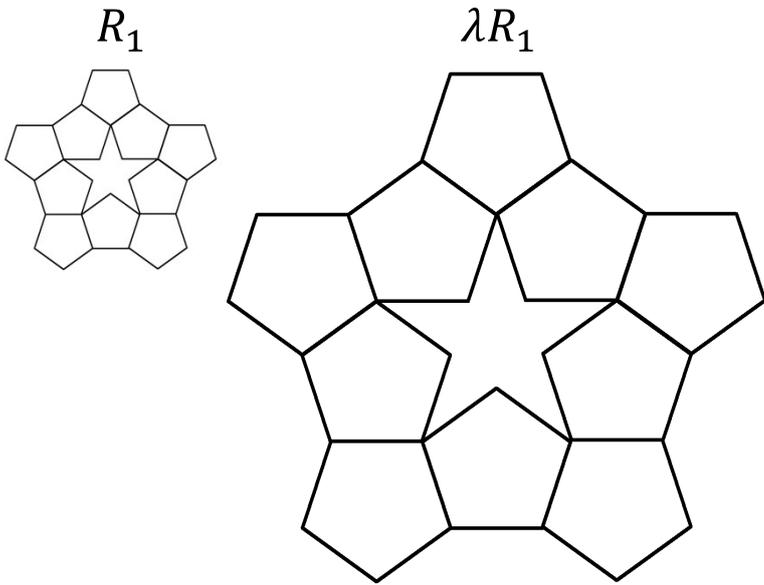
$n \rightarrow \infty$ のとき, リングの長さ $10 \cdot 3^n \rightarrow \infty$

定理(2)の証明

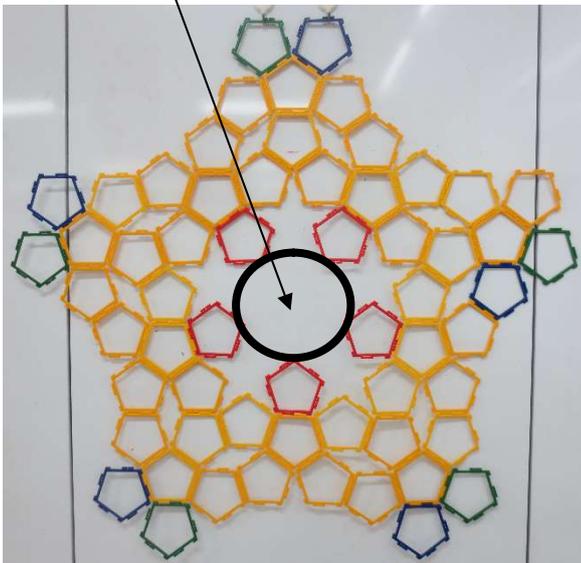
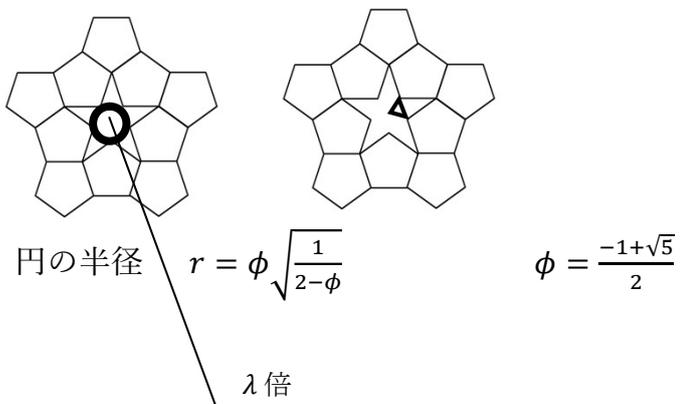
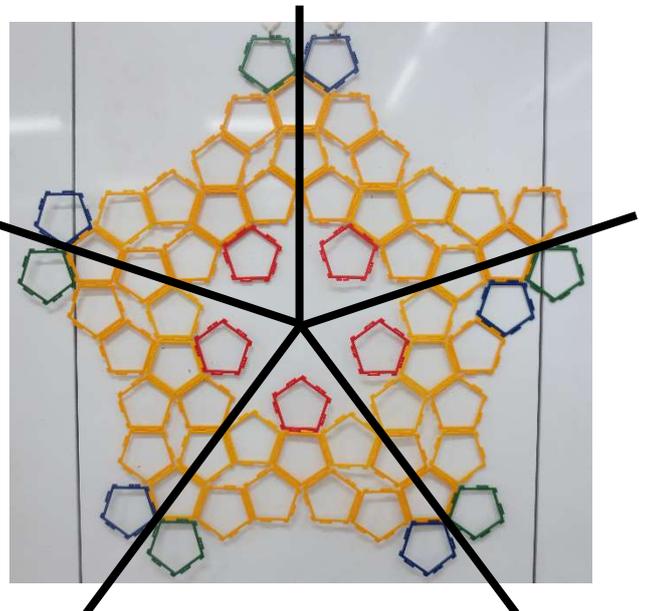
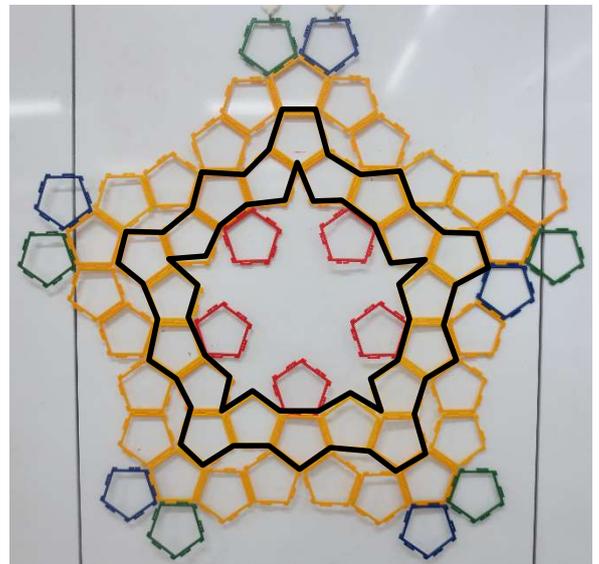
$\phi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと, $0 < \phi < 1$ より, 円の半径 $r = \phi \sqrt{\frac{1}{2-\phi}}$

| | | | | | |
|-------------------------|-------------|---------------|---------------|-----|---------------|
| Substitution rule の適用回数 | 1 | 2 | 3 | ... | n |
| 円の半径 | λr | $\lambda^2 r$ | $\lambda^3 r$ | ... | $\lambda^n r$ |

$n \rightarrow \infty$ のとき, $r > 0$, $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ より, 円の半径 $\lambda^n r \rightarrow \infty$



$\sigma(\lambda R_1)$ には色々な平面的正五角形リングが存在する。↓↑



円の半径 λr