大手前高校 75期 S探 理系 数学分野論文集

ある自然数ｎまでに現れる素数の個数
サイクロイドの拡張
一葉双曲面の性質
階〇数列の性質

ある自然数ｎまでに現れる素数の個数

1. はじめに

素数とは「1とその数以外に約数がない正の整数」である。私は素数の現れ方に規則性がないことに興味をもち、ある自然数nまでの素数の個数を近似することができないかと考えた。そこで、ベン図を用いてある自然数nまでの素数の個数を求める近似式を導出し、その計算結果をガウスの素数定理による計算結果と比較して、導出した近似式の正確さを調べることを目的とした。

2. ガウスの素数定理

◎ガウスの素数定理

十分に大きな自然数nが素数である確率$p(n)$は$p(n)=\frac{1}{\log(n)}$と近似できる。

この定理をもとにして、ある自然数nまでに現れる素数の個数$\pi(n)$について２つの異なる考え方から式を導いた。

<1>

ガウスの素数定理より、十分に大きな自然数kが素数である確率$p(k)$は$p(k)=\frac{1}{\log(k)}$と近似できる。

例えば、$k=10$のとき、10が素数である確率は$p(10)=\frac{1}{\log(10)}$となる。

同様に考えて、$k=2$の場合から$k=n$の場合までを考えてすべて足し合わせるから、

$\pi(n)=\sum_{2}^{n}\frac{1}{\log(n)}\cdots$(ｉ)

<2>

ガウスの素数定理より、十分に大きな自然数nが素数である確率$p(n)$が$p(n)=\frac{1}{\log(n)}$と近似できることから、ある自然数nまでに現れる素数の個数$\pi(n)$について、

$\pi(n)=\frac{n}{\log(n)}\cdots$(ⅱ)

(ｉ)(ⅱ)をそれぞれ素数定理①、素数定理②とした。

3. 式の導出

nまでの自然数の集合を全体集合Uとし、全体集合Uから素数以外の自然数nの個数を除くことで、ある自然数nまでに現れる素数の個数を求める。

例えば、全体集合Uの中に 2 つの部分集合があるとき、

それぞれの集合をA，B、それぞれの集合の要素の個数を $n(A)$,$n(B)$とすると、

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$…①

また、全体集合Uの中に 3 つの部分集合があるとき、

それぞれの集合をA，B，C、それぞれの集合の要素の個数を$n(A)$,$n(B)$,$n(C)$,とすると、

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$…②

n=$2^3 \times 3 = 24$のとき、

Aを 1 から 24 までの自然数のうちの 2 の倍数の集合、

Bを 1 から 24 までの自然数のうちの 3 の倍数の集合として、

$n(A \cup B)$=$\frac{24}{2} + \frac{24}{3} - \frac{24}{6}$ (∵①)

2,3 はそれぞれA，Bに含まれるが素数であり、1 はA，Bに含まれないが素数でない。

よって、1 から 24 までの素数の個数は、

$U - n(A \cap B)$+2-1=24-($\frac{24}{2} + \frac{24}{3} - \frac{24}{6}$)+2-1

=24(1-$\frac{1}{2}$)(1-$\frac{1}{3}$)+2-1…③

n =2×3×5=30 のとき、

Aを 1 から 30 までの自然数のうちの 2 の倍数の集合、

Bを 1 から 30 までの自然数のうちの 3 の倍数の集合、

Cを 1 から 30 までの自然数のうちの 5 の倍数の集合として、

$n(A \cup B \cup C)$=$\frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \frac{30}{5} - \frac{30}{6} - \frac{30}{10} - \frac{30}{15} + \frac{30}{30}$ (∵②)

2,3,5 はそれぞれA，B，Cに含まれるが素数であり、1 はA，Bに含まれないが素数でない。

よって、1 から 30 までの素数の個数は

$U - n(A \cup B \cup C)$+3-1=30-($\frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \frac{30}{5} - \frac{30}{6} - \frac{30}{10} - \frac{30}{15} + \frac{30}{30}$)+3-1

=30(1-$\frac{1}{2}$)(1-$\frac{1}{3}$)(1-$\frac{1}{5}$)+3-1…④

③④を一般化すると、ある自然数nまでの素数の個数は

$$\pi(n) \fallingdotseq (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{Q(n)}) + R(n) - 1$$

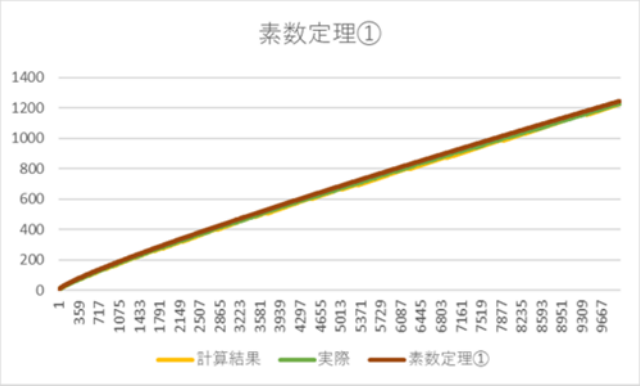
($Q(n)$は$\sqrt{n}$以下の最大の素数、$R(n)$は$\sqrt{n}$以下の素数の個数)と表せる。

この計算結果をガウスの素数定理の計算結果と実際の値と比較する。

4. 結果

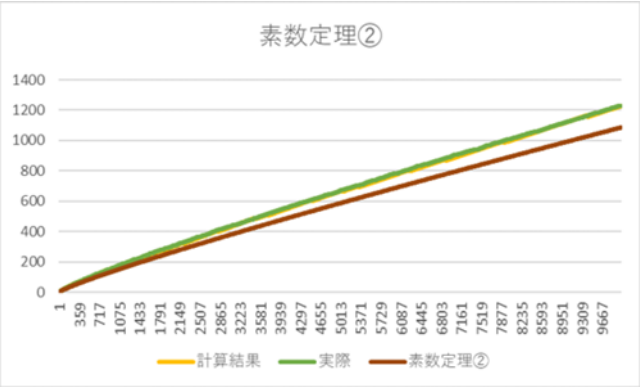
2.で導出した式の計算結果とガウスの素数定理①②の計算結果,実際のある自然数nまでの素数の個数を比較した。横軸はnの値、縦軸はある自然数nまでの素数の個数を表す。

(ⅰ)素数定理①



n	実際の値	導出した式	素数定理①
10	4	＋8.33%	＋53.34%
100	25	+3.43%	+20.00%
1000	168	-3.06%	+5.62%
10000	1229	-0.15%	+1.38%

(ⅱ)素数定理②



n	実際の値	導出した式	素数定理②
10	4	+8.33%	+14.7%
100	25	+3.43%	-13.1%
1000	168	-3.06%	-13.8%
10000	1229	-0.15%	-11.7%

n=10,100,1000,10000 の範囲ではガウスの素数定理の計算結果よりも導出した近似式の計算結果の方が実際の値とのずれが小さかった。

5.考察

上の結果より、n=10,100,1000,10000 ではガウスの素数定理の計算結果よりも導出した近似式の計算結果の方が実際のある自然数nまでに現れる素数の個数とのずれが小さいことが分かったが、素数定理の計算結果はnの値が大きくなるほど誤差が小さくなっていくという性質から、nをより大きくすると導出した近似式よりもガウスの素数定理の計算結果のほうが正確な近似となっているかもしれないと考えた。

6. 参考文献

・理数科課題研究「素数の分布」について
https://www.Shinkokeirin.co.jp/keirinkan/kou/math/jissen_arch/201305/data/file01.pdf（参照 2021-11-7)
・「素数定理」
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/tambara/docs/l4h20170722-3imai.pdf (参照 2022-7-15)

サイクロイドの拡張

1.緒言

一般に,直線上を滑ることなく転がる円の,周上の一点の軌跡をサイクロイドという.私達はそれを拡張し,任意の関数のグラフ,次に媒介変数表示されたグラフ上のサイクロイドの式の一般化を試みた.特に,その公式をサイクロイドに適用し,サイクロイドの上に円を転がした場合のサイクロイドの式を求めた.そこからn回目のサイクロイドの式と,それに囲まれた部分の面積について考察した.

2.〈$y=f(x)$上のサイクロイド〉

図形L:$y=f(x)$と半径1の円によるサイクロイドを考える.

ただし,$[0,t]$または$[t,0]$において微分可能かつ$f(x)$は連続で,$f(0)=0$

直線 CA とx軸の正方向からの回転角を$\theta(-\pi<\theta<0)$とする.

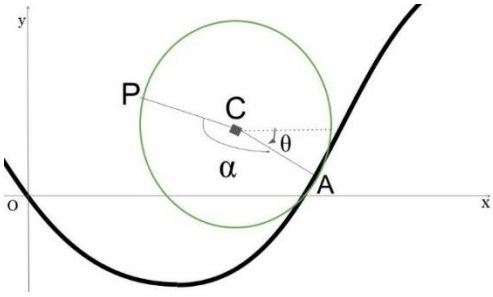


図1:$y=f(x)$を転がる円

[1]$-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<\theta<0$のとき

$$tan\theta=-\frac{1}{f'(t)}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-cos\theta,-sin\theta)$

線分 CA の,線分 CP からの回転角をαとすると、

$(弧AP)+2\pi\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]=(図形LのOからAの長さ)$より,

$$\alpha=\begin{cases}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx & (t\leq 0)\\ \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx & (t\geq 0)\end{cases}$$

$\overrightarrow{CP}=(\cos\{2\pi-(\alpha-\theta)\},\sin\{2\pi-(\alpha-\theta)\})$

$\quad=(\cos(\alpha-\theta),-\sin(\alpha-\theta))$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$より,

$P(t-cos\theta+\cos(\alpha-\theta),f(t)-sin\theta-\sin(\alpha-\theta))$ …①

[2]$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき

サイクロイド曲線は連続かつ原点を通るから,「常に$f'(t)=0$」となるような開区間が存在しない.$\theta=\frac{\pi}{2}$となるようなt でも対応するサイクロイド上の点が得られる.

ここで,$C\big(g(t),h(t)\big)$ とおくと,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$より,

$g(t)=t-cos\theta, h(t)=f(t)+sin\theta$

$\therefore\ y=f(x)$ のグラフと,転がる単位円が交わらない.

$\Leftrightarrow\forall(p,q)\in\mathbb{R},\sqrt{\{g(p)-q\}^2+\{h(p)-f(q)\}^2}\geq 1$

例)$f(x)=\frac{1}{2}x^2$におけるサイクロイドを求め図示する。

$$\alpha=\frac{\arcsin\{h(t)\}+t\sqrt{t^2+1}}{2}$$

$$tan\theta=-\frac{1}{t},\ \therefore\ \theta=\arctan\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$P(t-cos\theta+\cos(\alpha-\theta),f(t)+sin\theta+\sin(\alpha-\theta))$$

$$\therefore x=t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}cos\alpha-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}cos\alpha$$

$$y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}cos\alpha$$

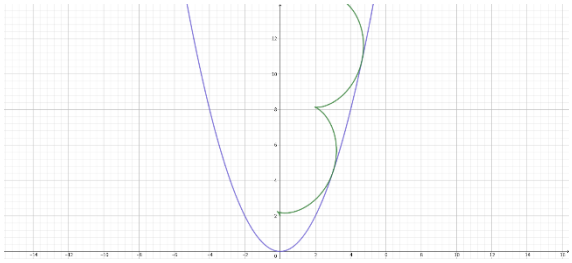


図2:$y=\frac{1}{2}x^2$上のサイクロイド

3.〈媒介変数で表されたグラフ上のサイクロイド〉

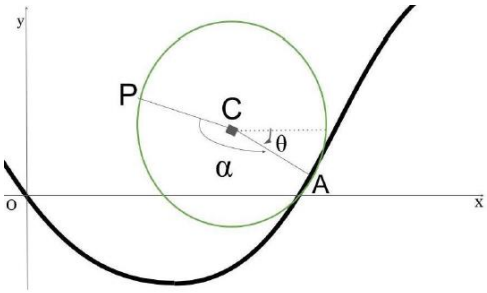


図3:媒介変数された関数上のサイクロイド

グラフ L$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ 上に,半径rの円を転がしたときにできるサイクロイドを求める.

ただし、$f(t)$, $g(t)$は二階微分可能で,

$f(0)=\ g(0)=0$

$A\big(f(t),g(t)\big)$として,直径CA とx 軸の正方向からの回転角をθ $(-\pi<\theta<\pi)$とする.

$tan\theta \cdot \frac{dy}{dx} = -1$ ・・・①

$\frac{dy}{dx} \neq 0$ のとき、$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$より,

$tan\theta = -\frac{f'(t)}{g'(t)}$ ・・・②

これは, $\frac{dy}{dx} = 0$,すなわち $f'(t) = 0$のときも成り立つ.

$\overrightarrow{AC} = (-rcos\theta, -rsin\theta)$
線分CA の、線分CP からの回転角をα とすると,

弧$AP + 2\pi\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]$ =(グラフ L の O から A の長さ)より

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt & (t \geq 0) \\ \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt & (t > 0) \end{cases}$$

$\overrightarrow{CP} = (r\cos\{\cos(\alpha - \theta)\}, r\sin\{\sin(\alpha - \theta)\})$
$P(f(t) - rcos\theta + r\cos\{\cos(\alpha - \theta)\}, g(t) - rsin\theta + r\sin\{\sin(\alpha - \theta)\})$

4.〈サイクロイド上のサイクロイド〉
半径r の円が直線を転がるサイクロイドの式
$x = rt - rt\sin(\sin t)$, $y = r - r\cos(\cos t)$
このサイクロイド上に半径Rの円を原点から転がす.上と同様にして,下図のように求める.

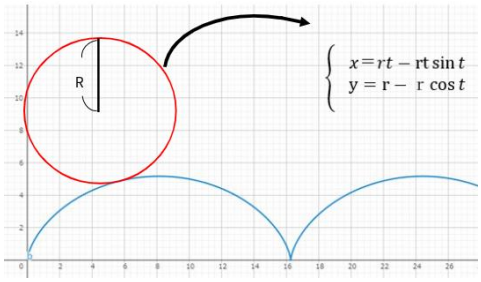


図4:サイクロイドの上を転がる円

$$\therefore x = r(t - \sin t) + R\cos\frac{t}{2}\left\{\cos\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right) - 1\right\} - R\sin\frac{t}{2}\sin\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$y = r(t - \cos t) - R\sin\frac{t}{2}\left\{\cos\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right) - 1\right\} - R\cos\frac{t}{2}\sin\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right)$$

これをxy平面上に図示する.

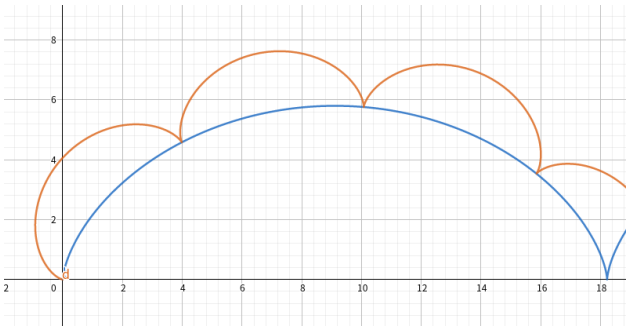


図5:サイクロイド上のサイクロイド（R=1,r=3 の場合）

点$(\pi r, 0)$を原点とするXY 座標系をとると、

$$X = r(t - \sin t) + R\cos\frac{t}{2}\left\{\cos\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right) - 1\right\} - R\sin\frac{t}{2}\sin\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right) - \pi r$$

$$Y = r(1 - \cos t) - R\sin\frac{t}{2}\left\{\cos\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right) - 1\right\} - R\cos\frac{t}{2}\sin\left(4r - 4r\cos\frac{t}{2}\right)$$

ガウス･グリーンの定理より

下図着色部の面積は

$$S = \int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2}\left\{X\frac{dY}{dt} + Y\frac{dX}{dt}\right\}dt$$

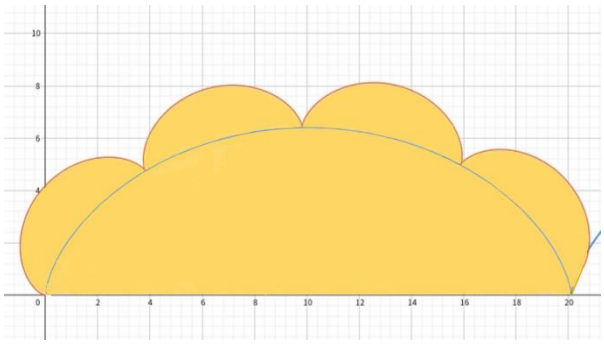


図6:サイクロイドで囲まれた面積

5.考察

n 回目のサイクロイドの式については,関数の漸化式を解くことは難しい.そこで,漸化式を微分することで解けるのではないかと考えた.また,そのサイクロイドに囲まれた部分の面積を求める際に基準点を適宜定める必要があるが,「ガウスグリーンの定理」が有効ではないかと考えている.n 回目の関数や面積が求められた場合,$n \to \infty$ つまり無限回の操作後のサイクロイドの式やそれに囲まれた部分の面積が求められるだろう.

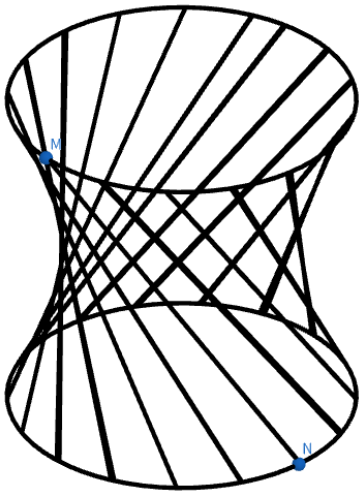
一葉双曲面の性質

1.はじめに

線織面である一葉双曲面を美術の授業で知り、興味をもったことから研究を始めた。
離心率との関係・体積・表面積を中心に研究を行った。

2.実験

一葉双曲面を空間上に表示したい。xy 平面に円を作り、これをz 軸方向に平行移動した円を作る。2 つの円上にある点をそれぞれM, N とする。点M と点N を少しずらしそれぞれ同じ速さで円運動させる。このとき線分MN の軌跡を図示すると、一葉双曲面になる(図 1)。直線の長さを変えて実験していくと、2点のずれ（$= \theta$）が大きいほど、中心の円が小さくなることから、離心率とずれの大きさには、なにか関係があるのではないかと推測した。またの時に、円錐になることからずれの大きさにかかわらず、うまく平面　で切ることで、全ての2次曲線があらわれるのではないかと考えた。

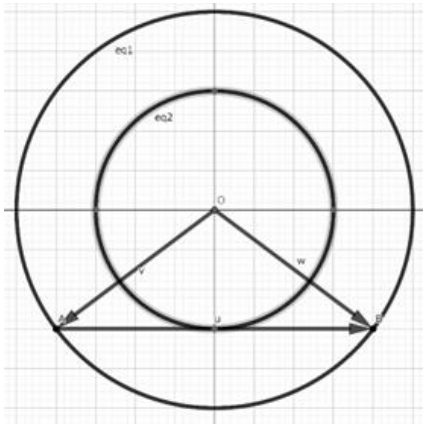


（図 1）

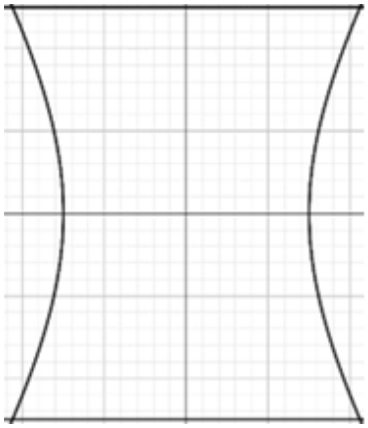
3.方法

・一葉双曲面の最も大きい半径をr、高さをh、2 点のずれθをとして一葉双曲面の一般式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$の$a, b, c$をそれぞれ求める(今回は$a=b$の場合のみ考える)。
一葉双曲面を真上から見ると、図 2 のようになり、xz 平面で切ると、図 3 のように双曲線になる。

図 2 より最も小さい円の半径は$r\cos\frac{\theta}{2}$の平面上にあるとわかる。また図3より$y=0$ におけるとの交点は双曲線の性質から$x=\pm a$なので$a=b=r\cos\frac{\theta}{2}$さらにこの一葉双曲面は$(r, 0, h)$を通るので一般式に代入して計算すると$c=\frac{h}{2\tan\frac{\theta}{2}}$ これより一葉双曲面の一般式$\frac{x^2}{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{y^2}{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4z^2\tan^2\frac{\theta}{2}}{h^2}=1$・・・①が得られた。



（図 2）



（図 3）

この式を用いて体積の一般式を求める。

今回は計算が正しいか確認するために２通りの方法で計算した。

(i) 円を積み上げて求める。 (ii)媒介変数表示を用いて計算する。

(i)円を積み上げて求める

$V=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\pi x^2\,dz$(①に$y=0$を代入し、$x^2$についてとく)

$$=\pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{4z^2\tan^2\frac{\theta}{2}}{h^2}\right)dz$$

$$=\pi r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left[z+\frac{4z^3\tan^2\frac{\theta}{2}}{3h^2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$=\pi r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left\{\left(\frac{h}{2}+\frac{h\tan^2\frac{\theta}{2}}{6}\right)-\left(-\frac{h}{2}-\frac{h\tan^2\frac{\theta}{2}}{6}\right)\right\}$$

$$=\pi r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(h+\frac{1}{3}h\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h(\cos\theta+2)$$

(ii)媒介変数を用いて求める。

１． 一葉双曲面の媒介変数表示は次のように表される。

$x=a\cosh u\cos v$, $y=a\cosh u\sin v$, $z=c\sinh u$ (a,cは①で求めたもの)

$-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}$のとき$u$の動く範囲は$u=t(\alpha\le t\le\beta)$ $\left(sinh\alpha=-\tan\frac{\theta}{2}, sinh\beta=\tan\frac{\theta}{2}\right)$となる。

このとき円の半径$r(u)$は$r(u)=\sqrt{x^2+y^2}=a\cosh u$なので体積$V$は

$V=\pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{r(u)\}^2\,dz=\pi\int_{\alpha}^{\beta}a^2\,b\cosh^3 u\,du$

$\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$より

$$V=\pi a^2 b\int_{\alpha}^{\beta}(1+\sinh^2 u)(\sinh u)'\,du$$

t		α
	$\to$ β	
		θ

$t=\sinh u$と置くと$\frac{dt}{du}=\cosh u$なので

$$V=\pi a^2 b\int_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\tan\frac{\theta}{2}}(1+t^2)dt=2\pi a^2 b\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\pi a^2 b\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\pi(r\cos\frac{\theta}{2})^2 \cdot \frac{h}{2\tan\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{3}\tan\frac{\theta}{2}(2 + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}})$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h(\cos\theta + 2)$$

となり結果が一致した。

同様にして表面積も求める。

$$S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2\pi r(u)dz = 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1 + \frac{4z^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{h^2}}dz$$

$$= \frac{4\pi r\sin\frac{\theta}{2}}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sqrt{z^2 + \frac{h^2}{4\tan^2\frac{\theta}{2}}}dz$$

$$= \frac{8\pi r\sin\frac{\theta}{2}}{h}\left[\frac{1}{2}\left\{z\sqrt{z^2 + \left(\frac{h}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2} + \left(\frac{h}{2\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\log\left(z + \sqrt{z^2 + \left(\frac{h}{2\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2}\right)\right\}\right]_0^{\frac{h}{2}}$$

$$= \pi r h\left\{1 + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\log\left(\frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}\right)\right\}$$

・離心率を求める

x 軸で切ったときに現れる双曲線を用いて、定義から計算すると、

$e = \frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{a^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} - 1$となり、これを用いて体積を表すと、

$V = \pi r^2 h\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{\pi h^3}{12e(e-2)}$となった。

・一葉双曲面がもつ2次曲線について考える。一般化は難しいため、

今回は$x^2 + y^2 - z^2 = 1$・・・②について考えた。求め方は、平面の式を作り、

一葉双曲面の式に代入して geogebra で図示することで求めた。

今回は次の 3 つの平面について考えた。

(i)$2x + y + z = 0$　　(ii)$-y + z + 2 = 0$　　(iii)$x + y + 2z + 1 = 0$

(i)$2x + y + z = 0$ のとき②に代入して

$x^2 + y^2 - (-2x - y)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4xy + 1 = 0$

これを図示すると、双曲線となった（図 4）。

(ii)$-y + z + 2 = 0$ のとき②に代入して

$x^2 + y^2 - (y - 2)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y - 5 = 0$

これを図示すると、放物線となった（図 5）。

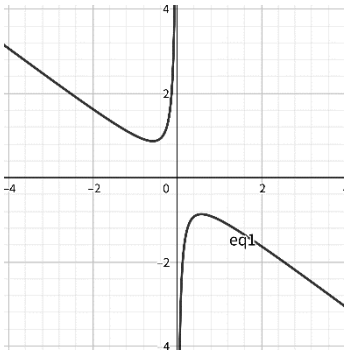
(iii)$x + y + 2z + 1 = 0$ のとき②に代入して、

$x^2 + y^2 - \frac{1}{4}(-x - y - 1)^2 - 1 = 0$

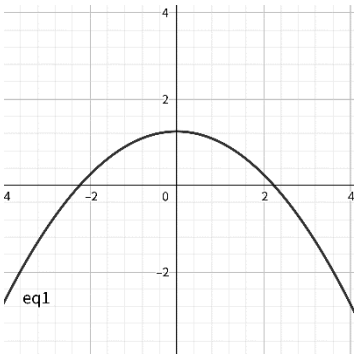
$\Leftrightarrow 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

これを図示すると、楕円となった（図 6）。

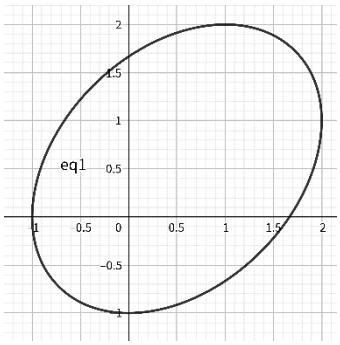
(i)～(iii)より、少なくとも１つは、すべての二次曲線を持つ一葉双曲面をもつことが分かった。



（図 4）



（図 5）



（図 6）

4.考察

体積の式が、円錐の式$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$と、円柱の式$V = \pi r^2 h$の中間の式になったため、

一葉双曲面がすべての円錐曲線を持つだろうと考えることができた。

5.今後の展望

・一葉双曲面の体積の式が球の体積の式に似ているため、関連性を調べたい

・離心率との関連性を求めることができなかったため、明らかにしたい

・直交座標だけでなく斜交座標でも2次曲線になるか調べたい(行列でできると予想)

6.参考文献

マスペディア 1000 線織面のページ(288 番)

詳説数学Ⅲ改訂版 46,52,53 ページ

高校数学の美しい物語 斜めの楕円の方程式 https://manabitimes.jp/math/1124

フリー百科事典ウィキペディア(Wikipedia) 一葉双曲面

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E9%9D%A2

可展面-微分幾何 http://sshmathgeom.private.coocan.jp/diffgeom/ruledsurface/ruled2.html

Geogebra(関数ソフト) https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja

階〇数列の性質

1.緒言

数学 B の階差数列の章で階和,階商,階積は学修しないことに疑念を抱いた。これらを研究することによる,それらの応用と数列で扱える範囲の拡張を目的とする。最終的にはギルブレス予想という素数列に関する現代における未解決問題への利用を目的とする。本研究では階〇数列b_nにおける一般項a_nを導出し,その結果を応用する形で進めた。

2.方法

階〇数列とその一般項の関係を調べるにあたっては基本的にそれぞれの定義を行った後,次の 4 つの段階を踏んで進めた。

① 階〇数列b_nが様々な場合において具体例を挙げ,それぞれの一般項a_nを導出する。なお,その一般項が一定の条件下で常に成立することを数学的帰納法によって確認する。

② ①の結果から階和,階商,階積数列それぞれの一般項の式を推測する。

③ ②の結果を利用して階和,階商,階積数列それぞれの定義の式の変形によって一般項の導出を試みる。

④ 階差数列における一般項の式と③を比較し,評価する。

こののち,階〇数列の特徴を探ると共にギルブレス予想への利用とその他の応用方法を考察する。

３．結果

この研究において，$n \in \mathbb{N}$ とする。

階〇数列の定義を次のように定める

階和数列$\{b_n\}$： $b_n = a_n + a_{n+1}$

階商数列$\{b_n\}$： $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} (a_n \neq 0)$

階積数列$\{b_n\}$： $b_n = a_n \times a_{n+1}$

例）階和数列　$b_n = n,\ a_1 = 1$のとき

$$a_n:\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6,\ 5,\ 7,\ 6,\ 8\cdots$$

$$b_n:\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,10,11,12,13,14\cdots$$

階商数列　$b_n = n,\ a_1 = 1$のとき

$$a_n:\ 1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ 40320,\ 362880\cdots b_n:\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\cdots$$

階積数列　$b_n = n,\ a_1 = 1$のとき

$$a_n:\ 1,\ 1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{15}{8},\ \frac{16}{5},\ \frac{35}{16},\ \frac{128}{35}\cdots$$

$$b_n:\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\cdots$$

〇階商数列

① 具体例の列挙（ここでは一部だけ掲載）：$t \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}$ とする

$b_n = p$のとき$a_n = a_1 \times p^{n-1}$

$b_n = n$のとき$a_n = a_1 \times \frac{(n+t-1)!}{t!}$

$b_n = n + t$のとき$a_n = a_1 \times \frac{(n+t-1)!}{t!}$

$b_n = pn$のとき　　$a_n = a_1 \times p^{n-1} \times (n-1)!$

$b_n = pn + q$のとき　　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1}(pk + t)\ (n \geqq 2)$

$b_n = n^2$のとき　　$a_n = \{(n-1)!\}^2$

$b_n = pn^2$のとき　　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} k^2\ (n \geqq 2)$

$b_n = n^2 + t$のとき　　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1}(k^2 + t)\ (n \geqq 2)$

$b_n = pn^2 + t$のとき　　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1}(pk^2 + t)\ (n \geqq 2)$

$b_n = n^3$のとき　　$a_n = \{(n-1)!\}^3$

$b_n = n^q$のとき　　$a_n = \{(n-1)!\}^q \cdots$※

・数学的帰納法を用いた, 上の具体例における一般項が成立することの証明

例 1）$b_n = n$　のとき

$a_n = a_1 \times (n-1)!\ \cdots (A)$

定義の式$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$より，$a_{n+1} = n \times a_n$

1）$n = 1$ のとき　$a_1 = a_1 \times (1-1)! = a_1$　より(A)は成立する

2）$n = k$ のとき　(A)の成立を仮定する

$n = k + 1$ のとき

$a_{k+1} = k \times a_k$

$= k \times \{a_1 \times (k-1)!\}$

$= a_1 \times k(k-1)!$

$= a_1 \times k!$

$= a_1 \times \{(k+1) - 1\}!$

$\therefore n = k + 1$ のときも(A)は成立する

1）, 2）よりすべての自然数n において(A)は成り立つ

例 2）$b_n = pn + q$のとき

$$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1}(pk + t)\ (n \geqq 2) \cdots (B)$$

定義の式$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$より, $a_{n+1} = (pn + t) \times a_n$

1）$n = 2$ のとき　$a_2 = (p + t) \times a_1 = a_1 \times \prod_{k=1}^{2-1}(pk + t)$　より(B)は成立する

2）$n = i$ のとき　(B)の成立を仮定する

$n = i + 1$ のとき

$a_{i+1} = (pi + t) \times a_i$

$= (pi + t) \times \left\{ a_1 \times \prod_{k=1}^{i-1} (pk + t) \right\}$

$= a_1 \times (pi + t) \prod_{k=1}^{i-1} (pk + t)$

$= a_1 \times \prod_{k=1}^{i} (pk + t)$

$= a_1 \times \prod_{k=1}^{(i+1)-1} (pk + t)$

$\therefore\ n = i + 1$ のとき(B)は成立する

1),2)よりすべての自然数nにおいて(B)は成り立つ

他の具体例(ただし$b_n = n^q$を除く)においても同様の証明を行った。

② 一般項の推測：①より，$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k \ \ (n \geqq 2, a_n \neq 0)$と推測できる。

③ 一般項の導出：定義の式より$b_n = \frac{1}{a_n} \times a_{n+1} \cdots (C)$

(C)のnに1から$n-1$まで代入したものを列挙し辺々を掛け合わせると，

$$\frac{1}{a_1} \times a_2 = b_1$$

$$\frac{1}{a_2} \times a_3 = b_2$$

$$\frac{1}{a_3} \times a_4 = b_3$$

$\vdots \qquad \vdots$

×) $\frac{1}{a_{n-1}} \times a_n = b_{n-1}$

$$\frac{1}{a_1} \times a_n = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k \ \ (n \geqq 2, a_n \neq 0)$$

この式は②で推測した式と同じく，②の式が正しかったと言える

階商数列とその一般項

$$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k \ \ (n \geqq 2, a_n \neq 0)$$

※$b_n = n^q$の場合は階商数列の一般項を示した後に求めたため、ここに証明を載せる

$b_n = n^q$のとき$a_n = a_1 \times \{(n-1)!\}^q$においてが成り立つ証明
階商数列の一般項の式$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2, a_n \neq 0)$より
$b_n = n^q, n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} k^q \quad (a_n \neq 0)$
ここで，$\prod_{k=1}^{n-1} k^q = 1^q \times 2^q \times 3^q \times \cdots \times (n-1)^q$
$= \{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)\}^q$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right)^q$$

$= (n-1!)^q$
$\therefore a_n = a_1 \times \{(n-1)!\}^q \quad (n \geqq 2)$
$n = 1$ のとき　$a_1 = a_1 \times \{(1-1)!\}^q = a_1$となり,等式が成立するので,
$b_n = n^q$のとき，$a_n = a_1 \times \{(n-1)!\}^q$　(q は実数)

〇階和数列
① 具体例の列挙(一部)：$p, q \in \mathbb{R}$ とする。
$b_n = p$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + p$
$b_n = n$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{n}-1)$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + \frac{1}{2}n$
$b_n = n + q$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + \frac{1}{2}n + q$
$b_n = pn$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + p\{\frac{1}{2}(n-1)\}$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + p\left(\frac{1}{2}n\right)$
$b_n = \mathrm{pn} + \mathrm{q}$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + p\{\frac{1}{2}(n-1)\}$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + p\left(\frac{1}{2}n\right) + q$
$b_n = n^2$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + \frac{1}{2}n(n-1)$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + \frac{1}{2}n(n-1)$
$b_n = n^2 + q$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + \frac{1}{2}n(n-1)$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + \frac{1}{2}n(n-1) + q$
$b_n = n^3$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 + \frac{1}{4}\{n^2(2n-3) + 1\}$
n が偶数のとき　$a_n = -a_1 + \frac{1}{4}n^2(2n-3)$
(・ここでは，数学的帰納法による確認は省略する)

② 一般項の推測：①から階和数列とその一般項の関係を見出すことは難しかったが、項数の偶奇で関係式を 2 つに分ければ立式できると推測した。

③ 一般項の導出：

定義の式$b_n = a_n + a_{n+1}$より，$a_{n-2} - a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) - (a_n + a_{n-1}) = b_{n-2} - b_{n-1} \cdots (D)$

mを正の整数とする

$n = 2m - 1$ のとき

(D)のn に3 から$2m - 1$　まで代入したものを列挙し，辺々を足し合わせると

$$a_1 - a_3 = b_1 - b_2$$
$$a_3 - a_5 = b_3 - b_4$$
$$a_5 - a_7 = b_5 - b_6$$

⋮　　⋮

$$+）\ a_{2m-3} - a_{2m-1} = b_{2m-3} - b_{2m-2}$$
$$a_1 - a_{2m-1} = (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2m-3}) - (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2m-2})$$
$$= \sum_{k=1}^{2m-2} b_k \times (-1)^{k+1} \quad (2m - 1 \geqq 2)$$
$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \times (-1)^k \ \ (n \geqq 2)$$

$n = 2m$ のとき

(D)のn に4 から$2m$ までを代入したものを列挙し，辺々を足し合わせると

$$a_2 - a_4 = b_2 - b_3$$
$$a_4 - a_6 = b_4 - b_5$$
$$a_6 - a_8 = b_6 - b_7$$

⋮　　⋮

$$+）\ a_{2m-2} - a_{2m} = b_{2m-2} - b_{2m-1}$$
$$a_2 - a_{2m} = (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2m-2}) - (b_3 + b_5 + b_7 + \cdots + b_{2m-1})$$
$$= \sum_{k=2}^{2m-1} b_k \times (-1)^k \quad (2m \geqq 2)$$
$$= -\{b_1 \times (-1)^1\} + \sum_{k=1}^{2m-1} b_k \times (-1)^k \quad (2m \geqq 2)$$
$$a_{2m} = a_2 - \left\{b_1 + \sum_{k=1}^{2m-1} b_k \times (-1)^k\right\} \quad (2m \geqq 2)$$
$$= (b_1 - a_1) - \left\{b_1 + \sum_{k=1}^{2m-1} b_k \times (-1)^k\right\} \quad (2m \geqq 2)$$
$$= -\left\{a_1 + \sum_{k=1}^{2m-1} b_k \times (-1)^k\right\} \quad (2m \geqq 2)$$
$$\therefore a_n = -\left\{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \times (-1)^k\right\} \ (n \geqq 2)$$

階和数列とその一般項

$$a_n = \left\{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \times (-1)^k\right\} \times (-1)^{n-1} \ (n \geqq 2)$$

〇階積数列

① 具体例の列挙(一部)：$p \in \mathbb{R}$ とする

$b_n = p$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1$

n が偶数のとき　$a_n = \frac{1}{a_1} \times p \quad (a_n \neq 0)$

$b_n = n$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} k^{(-1)^k} \quad (n \geqq 2)$

n が偶数のとき　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} k^{(-1)^{k+1}} \quad (n \geqq 2)$

$b_n = n^2$のとき　　n が奇数のとき　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} (k^2)^{(-1)^k} \quad (n \geqq 2)$

n が偶数のとき　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} (k^2)^{(-1)^{k+1}} \ (n \geqq 2)$

(・数学的帰納法による確認は省略する)

一般項の推測：　n が奇数のとき$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k} \ (n \geqq 2)$

n が偶数のとき$a_n = \left\{a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k}\right\}^{-1} \ (n \geqq 2)$　と推測。

③ 一般項の導出：

定義の式$b_n = a_n \times a_{n+1}$より，$a_n \times \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{a_n \times a_{n+1}}{a_{n+1} \times a_{n+2}} = b_n \times \frac{1}{b_{n+1}} \ (a_n \neq 0) \ \cdots (E)$

mを正の整数とする

$n = 2m - 1$ のとき

(E)のn に1 から$2m - 3$ まで代入したものを列挙し，辺々を掛け合わせると

$$a_1 \times \frac{1}{a_3} = b_1 \times \frac{1}{b_2}$$

$$a_3 \times \frac{1}{a_5} = b_3 \times \frac{1}{b_4}$$

$$a_5 \times \frac{1}{a_7} = b_5 \times \frac{1}{b_6}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\times) \ a_{2m-3} \times \frac{1}{a_{2m-1}} = b_{2m-3} \times \frac{1}{b_{2m-2}}$$

$$a_1 \times \frac{1}{a_{2m-1}} = (b_1 \times b_3 \times b_5 \times \cdots \times b_{2m-3}) \times (b_2 \times b_4 \times b_6 \times \cdots \times b_{2m-2})^{-1} = \prod_{k=1}^{2m-2} b_k^{(-1)^{k+1}} \ (n \geqq 2)$$

$$a_{2m-1} = a_1 \times \left\{\prod_{k=1}^{2m-2} b_k^{(-1)^{k+1}}\right\}^{-1} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k} \ (n \geqq 2), (a_n \neq 0)$$

$n = 2m$ のとき

(E)のn に2 から$2m - 2$ まで代入したものを列挙し，辺々を掛け合わせると

$$a_2 \times \frac{1}{a_4} = b_2 \times \frac{1}{b_3}$$

$$a_4 \times \frac{1}{a_6} = b_4 \times \frac{1}{b_5}$$

$$a_6 \times \frac{1}{a_8} = b_6 \times \frac{1}{b_7}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\times)\ \ a_{2m-2} \times \frac{1}{a_{2m}} = b_{2m-2} \times \frac{1}{b_{2m-1}}$$

$$a_2 \times \frac{1}{a_{2m}} = (b_2 \times b_4 \times b_6 \times \cdots \times b_{2m-2}) \times (b_3 \times b_5 \times b_7 \times \cdots \times b_{2m-1})^{-1}$$

$$= \prod_{k=2}^{2m-1} b_k^{(-1)^k} \quad (n \geqq 2)$$

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \times \frac{1}{a_{2m}} = \left\{\frac{1}{b_1^{(-1)^1}} \times \prod_{k=1}^{2m-1} b_k^{(-1)^k}\right\} \quad (n \geqq 2)$$

$$\frac{1}{a_{2m}} = \frac{a_1}{b_1} \times b_1 \times \prod_{k=1}^{2m-1} b_k^{(-1)^k}\ (n \geqq 2)$$

$$a_{2m} = \left\{a_1 \times \prod_{k=1}^{2m-1} b_k^{(-1)^k}\right\}^{-1} \quad (n \geqq 2)$$

$$\therefore a_n = \left\{a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k}\right\}^{-1} \quad (n \geqq 2), (a_n \neq 0)$$

階積数列とその一般項

$$a_n = \left\{a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k}\right\}^{(-1)^{n-1}} \quad (n \geqq 2, a_n \neq 0)$$

○ 階差数列と階○数列の比較

階差数列とその一般項　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　$(n \geqq 2)$

階和数列とその一般項　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \times (-1)^k$　$(n = 2m-1 \geqq 2)$

$a_n = -\{a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \times (-1)^k\}\ (n = 2m \geqq 2)$

階商数列とその一般項　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k$　$(n \geqq 2, a_n \neq 0)$

階積数列とその一般項　$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k}$　$(n = 2m-1 \geqq 2, a_n \neq 0)$

$$a_n = \left\{a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{(-1)^k}\right\}^{-1} \quad (n = 2m \geqq 2, a_n \neq 0)$$

●階○数列の追究

ここでは，階○数列の以下の事象について研究を深めた

1.階商数列の定義を元の逆数の形にした場合

2.積の記号Πを用いずに表す

3.階和数列における階差数列

4.階○数列それぞれの意義

1.定義を逆数にした階商数列

階商数列の定義を$\square_{\square} = \frac{\square_{\square}}{\square_{\square+1}}$　$(\square_{\square} \neq 0)$とする

階商数列の③と同様の操作を施すと，

$$\square_1 \times \frac{1}{\square_{\square}} = (\square_1 \times \square_2 \times \square_3 \times \cdots \times \square_{\square-1}) = \prod_{\square=1}^{\square-1} \square_{\square} \quad (\square \geqq 2)$$

$$\therefore \square_{\square} = \square_1 \times \frac{1}{\prod_{\square=1}^{\square-1} \square_{\square}} \quad (\square \geqq 2, \square_{\square} \neq 0)$$

このことから，定義を逆数に設定して得られる一般項の関係式は，元の定義で得られる式の積の記号Πの部分を逆数にしたものである。

2.積の記号Πを用いない表現

階商数列の ①：具体例の列挙 において，この研究では，$\square_{\square}$の形に応じて，積の記号Πを用いずに簡単に表現できない一般項と，そうでない一般項が存在することが分かった。そこで，積の記号Πの性質から前者を積の記号Πを用いず表現することを試みた。

積の記号Πの以下の 2 つの性質について考えた。

・$\prod_{\square=1}^{\square} \square = \square!$ ，$\prod_{\square=1}^{\square} \square = \square^{\square}$　$\cdots(\square)$

・$\square_{\square} > 0$のとき，$\log \prod_{\square=1}^{\square} \square_{\square} = \sum_{\square=1}^{\square} \log \square_{\square}$ $\cdots(\square)$

$(\square)$について，

階商数列の①の$\square_{\square} = \square, \square + \square, \square^{\square}$はこの性質によってΠが除かれていると分かった。したがって，Πを取り除くことは可能である。が，利用できる範囲はごく一部であると言える。

$(\square)$について，

階商数列とその一般項の式：$\log \square_{\square} = \log \square_1 + \sum_{\square=1}^{\square-1} \log \square_{\square}$　$(\square_{\square} > 0)$

階積数列とその一般項の式：$\log \square_{\square} = \log \square_1 + \sum_{\square=1}^{\square-1} \log \square_{\square}^{(-1)^{\square}}$　$(\square = 2\square - 1 \geqq 2, \square_{\square} > 0)$

$$\log \square_{\square} = -\left\{ \log \square_1 + \sum_{\square=1}^{\square-1} \log \square_{\square}^{(-1)^{\square}} \right\} \quad (\square = 2\square \geqq 2, \square_{\square} > 0)$$

と表すことができる。$\square_{\square} > 0$という条件が付くだけなので，$(\square)$よより利用できる範囲はかなり広いと言えるが，log が式に含まれるため，式が利用しにくい形になる。

以上のことから，Πを用いず式を表現することは可能だが広い範囲においてΠを取り除いても有用な形にまとめることは難しいと分かった。

3.階和数列における階差数列

　階和数列の ①：具体例の列挙 において，一般項を導出する際，階和数列を項の偶奇で分けたとき出現する数列の一般項がnのs次式で表されるとき，s－1回階差をとると等差数列が出現することが分かった。今回の研究では s=0 から s=5 までこの事象が成立することが分かっている。なお，s が 0 以上の全ての整数の範囲で成立することの証明や，原因究明には至っていない。

4.階○数列の意義

ここでは，項数と関係のない階○数列(□□＝(n の式)で表されない，ただし□□＝□⁰＋□を除く)については考慮しないものとする。

　階差数列□□＝□における一般項は□□＝□₁＋□(□－1)であり，これは初項□₁，公差□の等差数列である。つまり，階差数列□□＝(n の式)はこの公差□を□(＝項数)の関数に置き換えたものであり，この点から階差数列は等差数列が基となっていると言える。

これを他の階○数列についても考える。

　階和数列について，階和数列の①より，階和数列□□＝□のとき□□＝□₁　(□＝2□－1)，□□＝－□₁＋□　(□＝2□)であり，これは定数数列(全ての項が 1 つの定数からなる数列)が 2 種類複合したものである。

つまり，階和数列□□＝(n の式)はこの定数を□(＝項数)の関数に置き換えたものであり，この点から階和数列は 2 つの定数数列が基となっていると言える。

　階商数列について，階商数列の①より，階商数列□□＝□のとき□□＝□₁×□^(□－1)であり，これは初項□₁，公比□の等比数列である。つまり，階商数列□□＝(n の式)はこの公比□を□の関数に置き換えたものであり，この点から階商数列は等比数列が基になっていると言える。

　階積数列について，階積数列の①より，階積数列□□＝□のとき□□＝□₁　(□＝2□－1)，□□＝□₁^(－1)×□ (□＝2□)であり，これは定数数列が 2 種類複合したものである。

つまり，階積数列□□＝(n の式)はこの定数を□の関数に置き換えたものであり，この点から階積数列は 2 つの定数数列が基になっていると言える。

　また，ここで□□＝□が階和数列のときと階積数列のとき，それぞれの元の数列の一般項を比較すると，□＝2□－1のときは□□＝□₁と全く同じ形で，□＝2□のときは－1倍するか－1乗するか，または+□するか×

□するかだけの違いであり，奇数項は初項であるとき偶数項の操作を変えると階和数列と階積数列の差が生じるということである。つまり，ここから階和数列と階積数列の根本は非常に近しい所にあると言える。

ギルブレス予想への利用

・ギルブレス予想とは

　ギルブレス予想とは素数列の階差の絶対値をとり続けたとき，できる階差数列の初項はすべて１になるという予想。現代における未解決問題である。

$\{P_n\}$: 2　3　5　7　11　13　17　19　23　29　31　37　41　43　47　53　59　…

1　2　2　4　2　4　2　4　6　2　6　4　2　4　6　6　…

1　0　2　2　2　2　2　2　4　4　2　2　2　2　0　…

1　2　0　0　0　0　0　2　0　2　0　0　0　2　…

1　2　0　0　0　0　2　2　2　2　0　0　2　…

1　2　0　0　0　2　0　0　0　2　0　2　…

1　2　0　0　2　2　0　0　2　2　2　…

⋮　⋮　⋮

・ギルブレス予想への階〇数列の応用

階〇数列を応用するにあたって次の手順でギルブレス予想に迫ろうとした。

1. x 回階差をとって絶対値をとる操作を繰り返した時の数列を$|D(x)|_n$とし，一般項を求める
2. x と$|D(x)|_n$の初項に関する式を立てる
3. 階〇数列を使って 2. の式の性質を探る

1.$|D(x)|_n$の一般項の立式

$$|D(x)|_n = ||D(x-1)|_{n+1} - |D(x-1)|_n| \text{が成り立つ}$$

$x = 1$ のとき，

$$|D(x-1)|_{n+1} - |D(x-1)|_n > 0 \text{は常に成り立つので絶対値は無視できる}$$

$$\therefore |D(x)|_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} |D(1)|_k$$

$x \geqq 2$ のとき，

両辺を二乗して式の変形を試みたが$|D(x)|_n$の各項を消しきることができなかったため断念

・ギルブレス予想への別アプローチ

ギルブレス予想の操作を 10000 までの素数の範囲において行った表を作成し，性質を探る

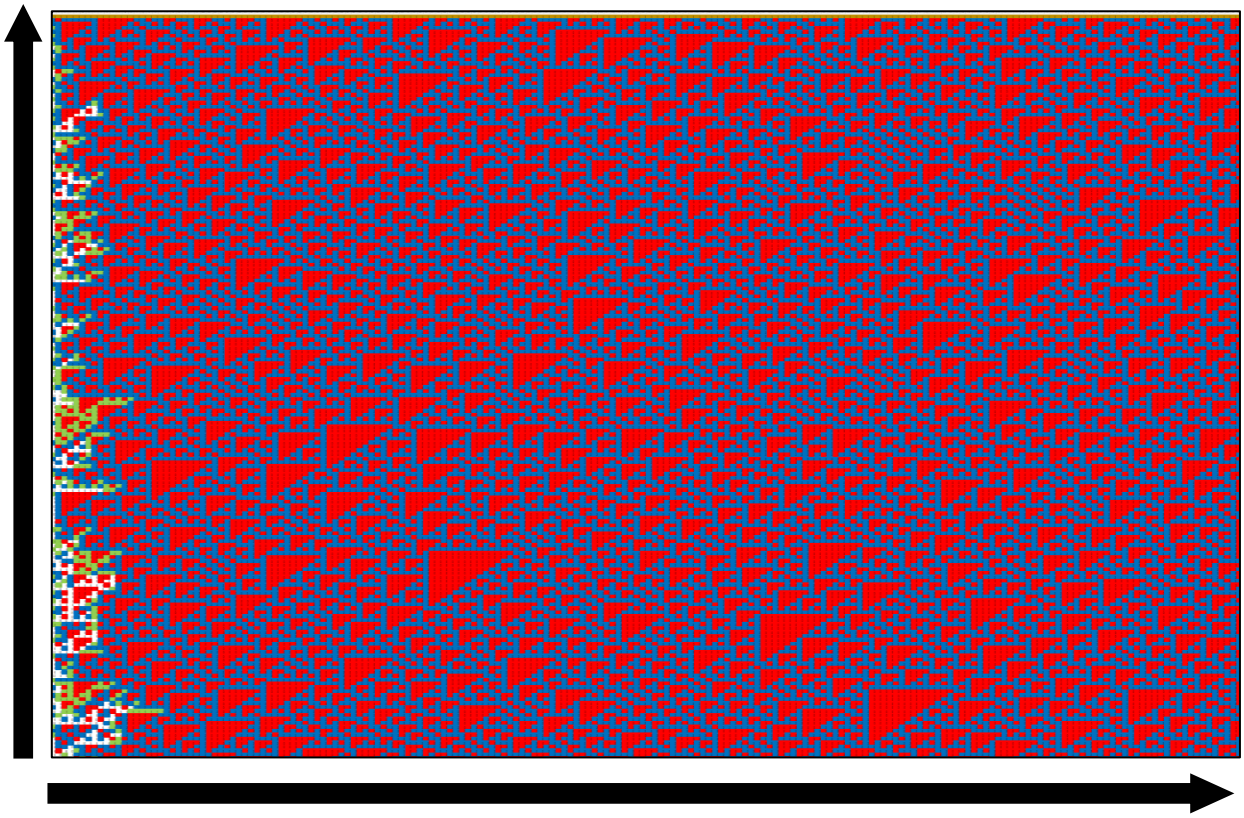
「常に操作を繰り返してできた数列の第 2 項で値が 0 もしくは 2⇔ギルブレス予想は真である」

が成立するので，「深度」を独自に設定し，階差の絶対値が4となる場所の深度を調べる。

「深度」…素数列のある 1 項がギルブレス予想の操作を繰り返してある一定の値になるときの

”(元の素数の項数−1)と操作を繰り返した回数の比”

表１　1-10000 の素数における素数階差絶対値表(一部抜粋)



縦軸：素数 小→大

横軸：操作回数 少→多

0→赤，1→茶，2→青，4→緑

表２　項数と深度の値の増減

n	35	70	112	190	196	312	764	901
深度	0.26	0.14	0.13	0.079	0.10	0.070	0.030	0.037
大小		↓	↓	↓	↑	↓	↓	↑

(今回の研究では，ギルブレス予想の操作を繰り返して４が初めて出現する位置に至るまでの操作回数の多さを更新した□(=項数)についてのみ調べ，表に纏めた。)

n(=項数)の値が大きくなるにつれて，おおよそ深度の値も減少しており，
10000 までの素数全体でみても深度の値は減少傾向にあると言える。

●階○数列の暗号への活用

RSA 暗号のような実用的な暗号システムを階○数列を用いて作成できないか考えた。1.階○数列を複数組み合わせる，2.数列の階差に絶対値をつける操作自体は簡単だが，その逆(絶対値を外して元の数列を導く)ことが困難であることを利用する，の２つの方向で取り組んだが，どちらもまだ思考段階である。

4. 考察

階和数列・階商数列・階積数列における元の一般項について，階差数列における元の一般項の形と比較すると，階和数列と階積数列に関しては項の偶奇によって式を分ける点，階商数列と階積数列に関しては積の記号 Π を用いる点等で異なるが，階差数列における元の一般項の形に近い形で纏まっていると言える。また，階和数列の偶数項のときの形と奇数項のときの形の違いは -1 倍しているかどうか，階積数列においては -1 乗しているかどうかであり，項の偶奇ので式を分けたが，その 2 式間の違いも小さく纏まっていると言える。

ギルブレス予想に対して階和数列・階商数列・階積数列を応用することは難しいと言える。表と深度を用いたアプローチでは，深度の値は減少傾向にあると言え，ギルブレス予想が真であると断定こそできないものの，真である可能性は非常に高いと言える。

5. 結論

階〇数列における元の一般項を，それぞれ近い形に纏めることができた。また，階〇数列のギルブレス予想への応用は難しいことが分かったが，深度を用いた方法によって，この予想が真である可能性は非常に高いことが示された。

階〇数列の実用性は数学 B で扱う階差数列の設問への利用もしくは設問の拡張に活かせる可能性がある，もしくは，RSA 暗号のような実用的な暗号に活用できる可能性があるという点以外に見出だせていない。

6. 参考文献

啓林館.詳説 数学 B 改訂版 平成 29 年 2 月 23 日検定済 高等学校数学科用 p.25-26