

# ドミノ倒しの伝播速度

## 1. 要旨・概要

実験からドミノ倒しの伝播速度には終端速度が存在することを明らかにし、モデルを用いた理論的考察を行った。

## 2. 問題提起・研究目的

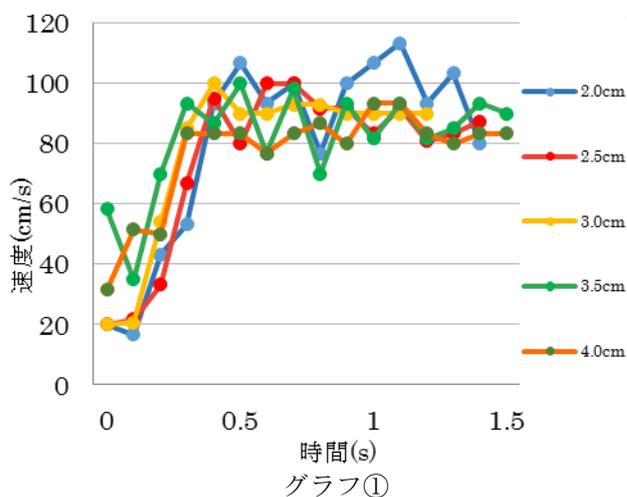
ドミノ倒しの伝播速度に終端速度は存在するのか、そしてなぜ伝播速度が収束するのかを解明する。

## 3. 仮説

- i. これまでのドミノ倒しの経験から、終端速度は存在すると考えられる。
- ii. 重力がした仕事による速度の増加量と、ドミノどうしの非弾性衝突による速度の減少量が一致することで伝播速度は収束する。

## 4. 研究方法

仮説 i を調べるために、ドミノの間隔を 2.0cm, 2.5cm, 3.0cm, 3.5cm, 4.0cm と並べて倒した。各ドミノを倒した様子をストップウォッチとスマートフォンを用いて撮影し、撮影した映像をもとに  $v-t$  グラフを作成した。なお、床とドミノの間の摩擦力はマットを用いて十分に大きくし、並進運動が生じない工夫を施した。また、一つ目のドミノに加える力は振り子を用いて一定となるように実験を行った。



## 5. 結果

グラフ①は、ドミノを倒し始めてからの伝播速度の時間変化 ( $v-t$  グラフ) を示している。グラフ①から、どの間隔でも約 0.5 秒までは伝播速度は増加し、その後は一定の値になっていることが分かる。よって、仮説 i は正しいことが確認できた。また、表①はドミノの間隔別の終端速度を示している。この実験では、ドミノ自身の厚みを含めて終端速度を求めたが、ドミノの伝播速度は、ドミノ間を伝わる速度のことである。ドミノの厚みを無視するために進んだ距離から厚みを差し引いて終端速度を求めなおすと、表②のようになった。

間隔(cm)	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
終端速度 (cm/s)	97.3	89.5	91.8	87.5	84.1

間隔(cm)	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
終端速度 (cm/s)	58.38	60.86	67.38	67.5	67.28

表① ドミノの間隔別の終端速度 (厚さを考慮) 表② ドミノの間隔別の終端速度 (厚さを考慮しない)

## 6. 考察

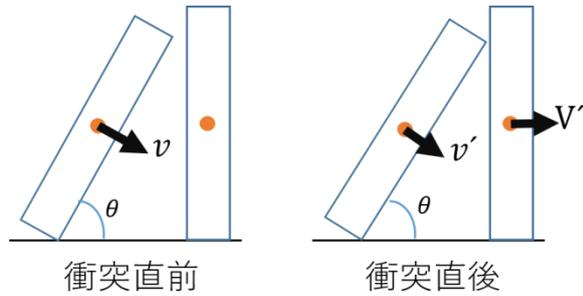
仮説 ii を用いて、終端速度を理論的に求めることを試みた。

終端速度を求める過程は、下記の通りである。

- イ) 衝突による速さの変化を調べる。
  - ロ) 重力による仕事を求める。
  - ハ) 重力の仕事による速さの増加量を求める。
- 二) 漸化式を立式し、それを解いて終端速度を求める。

イ) 衝突による速さの変化を調べる。

図①は 2 つのドミノの衝突前後のモデルである。前方のドミノに衝突する直前の重心の速さを  $v$ 、 $V$ とし、衝突直後の前方と後方のドミノの重心の速さをそれぞれ  $v'$ 、 $V'$ とする。



図① ドミノが衝突する前後の様子

実験映像から、ドミノが前方のドミノに衝突したときにはね返らないことから図②より、

$$2v' \sin \theta : V' = a \sin \theta : \frac{a}{2}$$

が成り立つ。よって、 $v' = V' \dots (i)$

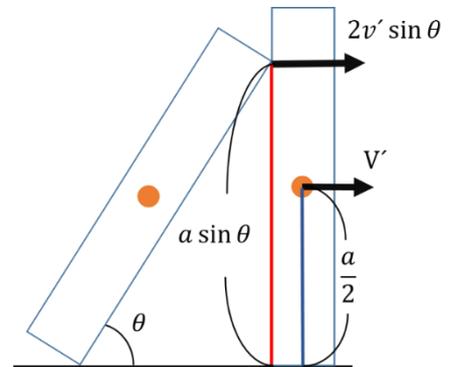
またドミノの衝突において、ドミノはマットから摩擦力を受けている。しかしながら摩擦力による力積に比べ、ドミノが衝突する際の撃力による力積の方が十分に大きいと仮定すると、水平方向の運動量保存則が成り立つ。

よって、

$$mv \sin \theta = mv' \sin \theta + mV' \text{ が成り立つ。} \dots (ii)$$

(i)、(ii) より、

$$V' = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 1} v$$



図② 衝突直後の様子

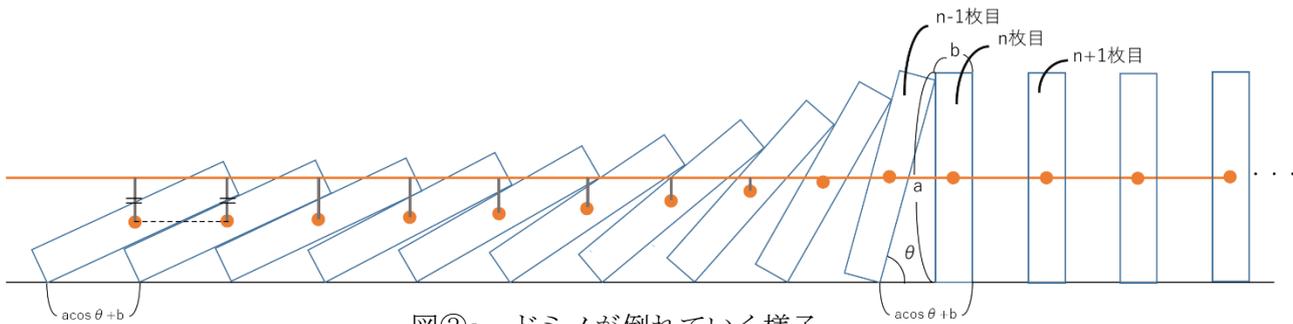
ロ) 重力による仕事を求める。

図③a は n-1 枚目のドミノが n 枚目のドミノに衝突している様子を示しており、

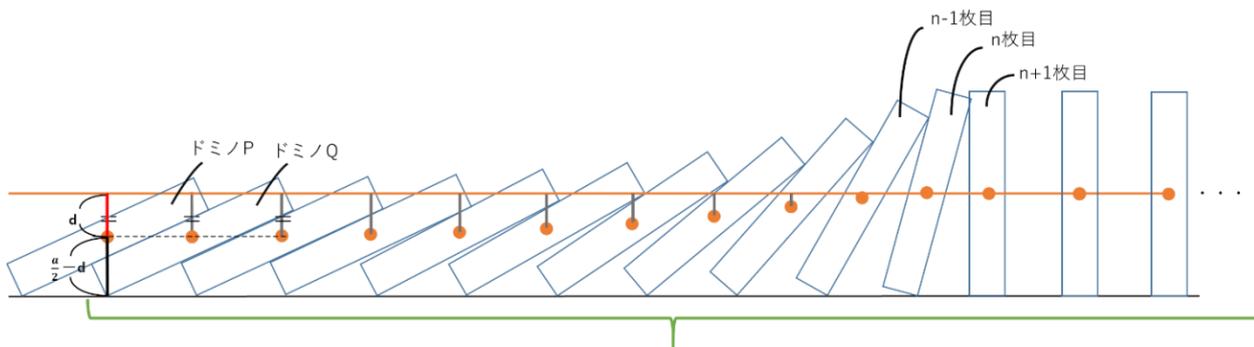
図③b は n 枚目のドミノが n+1 枚目のドミノに衝突している様子を表している。

図③b の緑色のかっこの部分は図③a と同じなので、ドミノが一つ倒れるごとに重力がドミノにする仕事の総和を  $W$  とすると、 $W$  は「図③b において重力がドミノにした仕事の総和」と「図③a において重力がドミノにした仕事の総和」の差に相当する。したがって、 $W$  は  $mgd$  である。

ここで  $d$  を求めるために、図③b 中のドミノ P、Q を図④のように直交座標系にとる。



図③a ドミノが倒れていく様子



図③a と同じ状態のドミノ

図③b ドミノが倒れていく様子

図④より、三角形 OAB において、三平方の定理を適用すると、

直線  $\ell$  の方程式は、 $\ell: \sqrt{a \cos \theta (a \cos \theta + 2b)} x - by = 0$

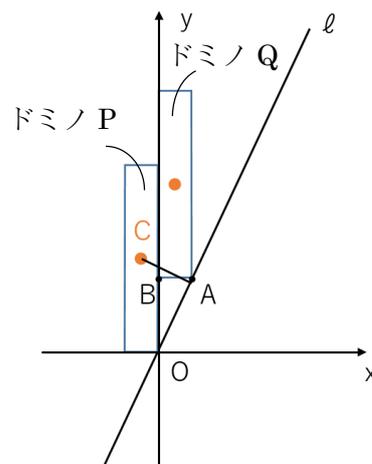
また点 C はドミノの重心であり、その座標は、 $C \left( -\frac{b}{2}, \frac{a}{2} \right)$

よって、点と直線の距離の公式より

$$d = \frac{a^2 \cos \theta - b \sqrt{a \cos \theta (a \cos \theta + 2b)}}{2(a \cos \theta + b)} \quad \dots \text{(iii)}$$

したがって、ドミノの衝突ごとに重力がした仕事  $W$  は、

$$W = mg \frac{a^2 \cos \theta - b \sqrt{a \cos \theta (a \cos \theta + 2b)}}{2(a \cos \theta + b)}$$



図④ ドミノ P、Q を座標上にとった図

ハ) 重力の仕事による速さの増加量を求める。

ドミノの運動エネルギーは、図⑤のようにドミノを  $N$  等分し、それぞれの運動エネルギーの総和から求めた。

一つの質量  $\Delta m$  は、 $\Delta m = \frac{m}{N}$

下から  $k$  番目の速度  $v_k$  は、 $v_k = 2v \frac{k}{N}$  であるから、

運動エネルギーの総和  $K$  は

$$\begin{aligned} K &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \Delta m v_k^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot 2mv^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{k}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

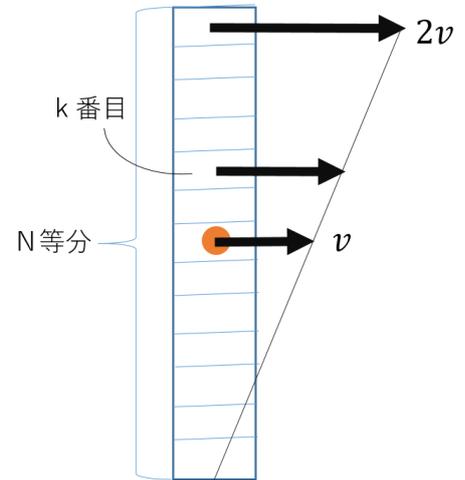
$$\begin{aligned}
 &= 2mv^2 \int_0^1 x^2 dx \\
 &= \frac{2}{3}mv^2 \\
 \therefore K &= \frac{2}{3}mv^2
 \end{aligned}$$

また図④より、ドミノが倒れ始めるときの速度は $V'$ 、衝突する直前のドミノの速度は $v$ であることから、運動エネルギーの変化と仕事の関係より、

$$\begin{aligned}
 mgd &= \frac{2}{3}mv^2 - \frac{2}{3}mV'^2 \\
 \therefore v &= \sqrt{V'^2 + \frac{3}{2}gd}
 \end{aligned}$$

よって重力の仕事によるドミノの速さの増加量 $\Delta v$ は

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= v - V' \text{ であるので} \\
 \Delta v &= \sqrt{V'^2 + \frac{3}{2}gd} - V' \quad \dots \text{(iv) と表される。}
 \end{aligned}$$



図⑤ ドミノをN等分した図

二) 漸化式を立式し、それを解いて終端速度を求める。

ここまでの内容から図⑥より、次の漸化式を立式することができる。

$$V'_{n+1} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1} (V'_n + \Delta v)$$

この漸化式は、n番目のドミノが倒れ始めるときの速度が $V'_n$ で、そのドミノに重力が仕事をすることによって速度が $\Delta v$ だけ増加し、さらにn+1番目のドミノと衝突することによって速度が $\frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1}$ 倍になることを意味している。

よって(iv)より、

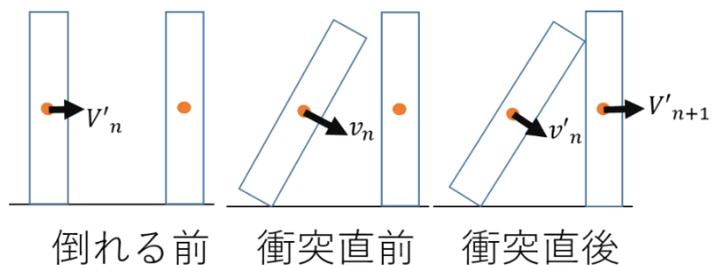
$$V'_{n+1} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1} \sqrt{V_n'^2 + \frac{3}{2}gd}$$

この漸化式を解くと、

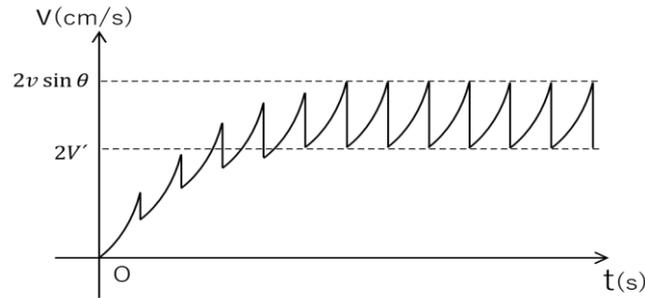
$$V'_n = \sqrt{\frac{3}{2}gd \frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta + 1} + \left(V'_0 - \frac{3}{2}gd \frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta + 1}\right) \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1}\right)^{2(n-1)}} \quad \dots \text{(v) (ただし、初項を} V'_0 \text{とした) したがって、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V'_n = \sin\theta \sqrt{\frac{3}{2}gd \frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta + 1}}$$

ここでドミノが倒れていく様子から、図⑦のように、重力の仕事によってドミノは加速し、次のドミノと非弾性衝突することによって減速するという運動が繰り返されるとわかる。



図⑥



図⑦ ドミノの速度変化のイメージ図

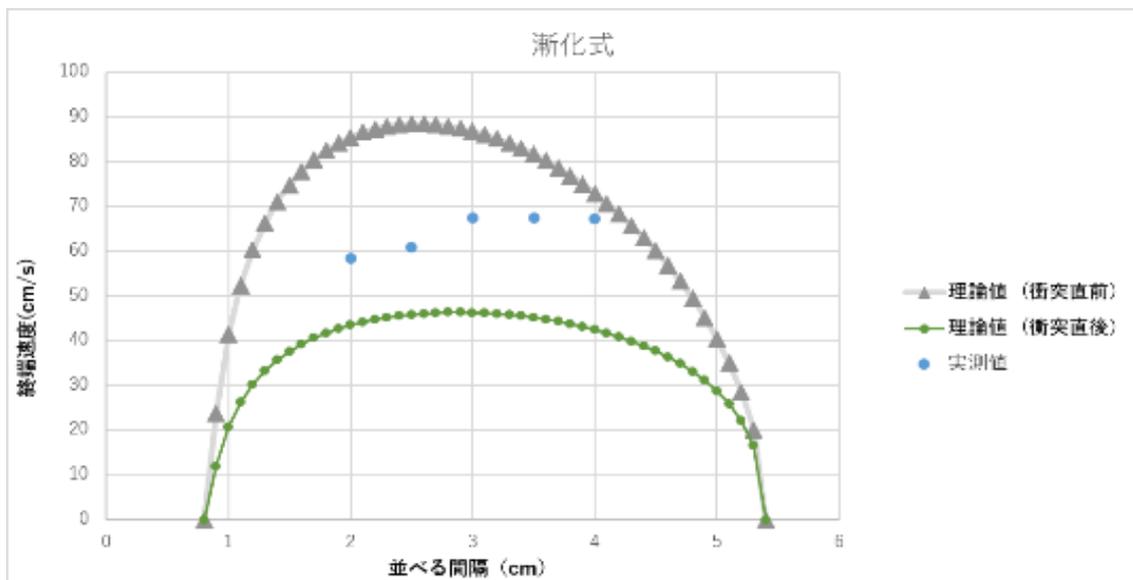
そして、倒し始めてから十分に時間が経過したとき図⑦のように、速度が周期的な増加と減少を繰り返す。また、ドミノが倒れ始めた直後の先端部の速度の水平成分は $2V'$ であり、ドミノが倒れて前方のドミノに衝突する直前のドミノの先端部の速度の水平成分は $2v \sin \theta$ である。これら2つの値を求める。

$$\begin{cases} 2v \sin \theta = 2 \sin \theta (\sin \theta + 1) \sqrt{\frac{\frac{3}{2}gd}{2 \sin \theta + 1}} \\ 2V' = 2 \sin \theta \sqrt{\frac{\frac{3}{2}gd}{2 \sin \theta + 1}} \end{cases}$$

これらに(iii)を代入して、

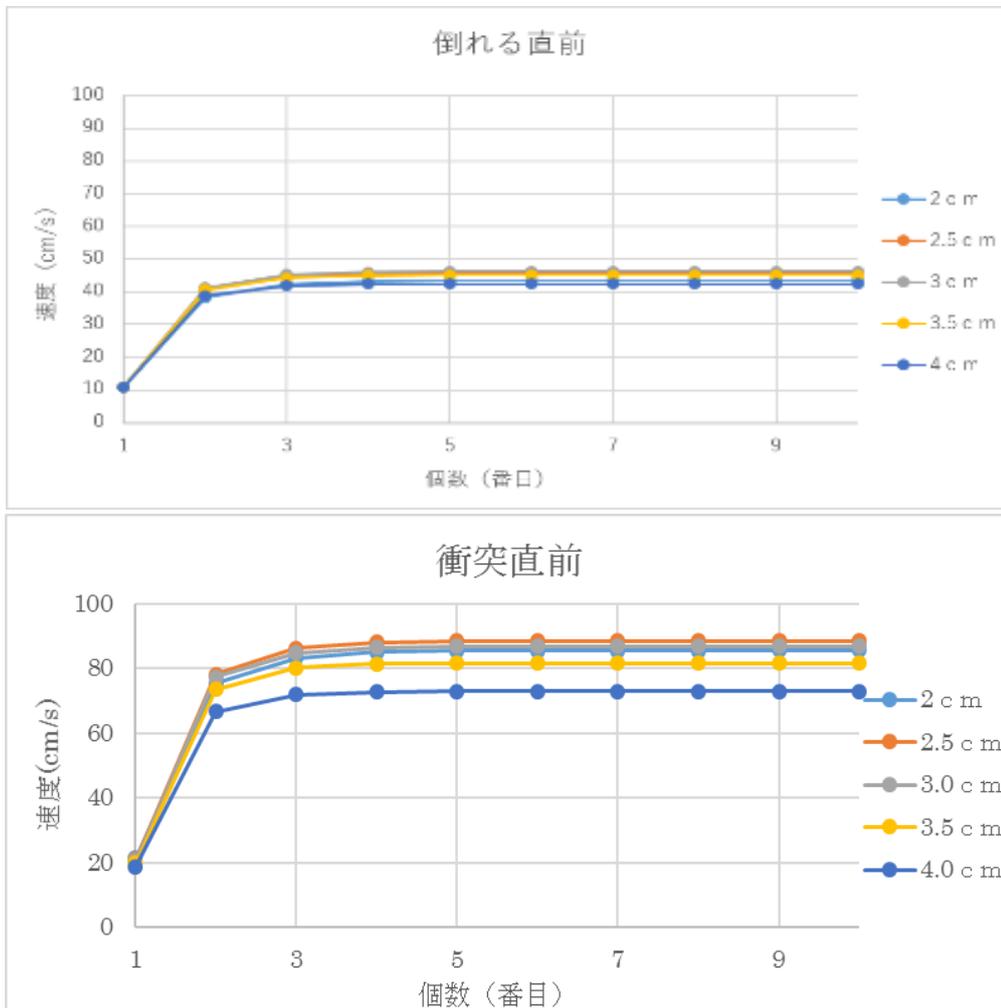
$$\begin{cases} 2v \sin \theta = \sqrt{3} \sin \theta (1 + \sin \theta) \sqrt{g \frac{a^2 \cos \theta - b \sqrt{a \cos \theta (a \cos \theta + 2b)}}{(2 \sin \theta + 1)(a \cos \theta + b)}} \\ 2V' = \sqrt{3} \sin \theta \sqrt{g \frac{a^2 \cos \theta - b \sqrt{a \cos \theta (a \cos \theta + 2b)}}{(2 \sin \theta + 1)(a \cos \theta + b)}} \end{cases}$$

上式に、 $g = 980 [\text{cm}/\text{s}^2]$ 、および実験で用いたドミノの長さである  $a = 4.6 [\text{cm}]$ 、 $b = 0.8 [\text{cm}]$  を代入すると、速度は グラフ②のようになる。



グラフ② 伝播速度の理論値と実測値の比較

グラフ②から、理論値の最大値 $2v \sin \theta$ と最小値 $2V'$ の間に実験から求めた終端速度があることがわかる。また、(v)から求められる伝播速度の一般項から、図⑦のイメージ図をグラフ③、④のように再現することができ、図⑦のイメージ図は正しかったと分かる。



グラフ③、④ 理論的考察から導いた伝播速度の変化

## 7. 結論 (課題)

実験から、ドミノの伝播速度は収束する、つまり終端速度が存在することを明らかにした。そして、重力がした仕事による速度の増加量と、ドミノどうしの非弾性衝突による速度の減少量が一致することで伝播速度は収束することが分かった。また、今後の課題は次の①、②である。

- ① 厚みを見捨てるほど十分に高いドミノを用いて実験を行うことで理論値と比較しやすくする。
- ② 階段上を運動するドミノの伝播速度を、本研究で導いた理論式から推定することができる。

## 8. 参考文献

数研出版 物理基礎「仕事と力学的エネルギー」 物理「運動量の保存」

## 9. 謝辞

本研究を進めるにあたり、大手前高等学校の物理科の先生方には、終始熱心なご指導をいただきました。心から感謝いたします。

# ばね振り子による連成振動

## 1. 緒言

固有振動数の等しい振り子を、水平に張った一本の糸につるし、片方の振り子を振動させると他方も共振する。やがて、初めに振動させた方が静止し、他方が最大の振幅となる。暫くすると初めの振り子が再び振動し始める。これらの一連の現象は、連成振動と呼ばれている。

わたしたちは、ばね振り子による連成振動について調べた。ばね振り子による連成振動の起こりやすさと、静止していたばね振り子が動き出してから、再び静止し、また動き出すまでの時間（これを「連成周期」と呼ぶことにする）に影響する条件について研究を行った。

## 2. 実験

一本の糸に2つのばね振り子を吊るし、片方のばね振り子を静止した高さから30cm下に引いたところで静かに手を離し、連成振動を発生させ、連成振動が起こるかどうかを確認し、連成周期を計測した。

使用したばねは自然長 300mm ばね定数 0.007N/mm である。

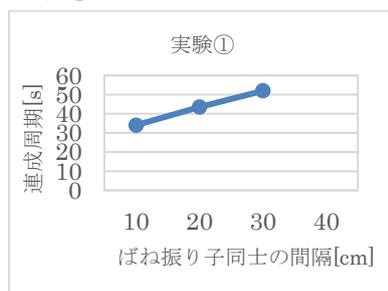
またばね振り子につけるおもりは 200 グラムとした。

- ①糸の張力を 2.0g[N]、糸の長さを 1.00[m]に固定しばね振り子同士の間隔を変化させた。
- ②糸の長さ 2.00[m]、ばね振り子同士の間隔を 20[cm]に固定し、糸の張力の大きさを変化させた。
- ③糸の張力を 2.0g[N]、ばね振り子同士の間隔を 20[cm]に固定し、ばね振り子を吊るす糸の長さを変化させた。

g を重力加速度 ( $g=9.8\text{m/s}^2$ ) とする。

## 3. 結果

### 実験①



グラフ 1 実験①の結果

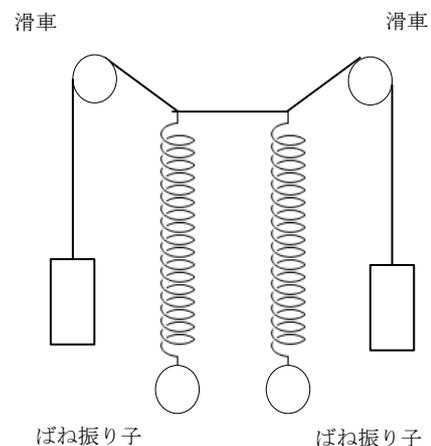
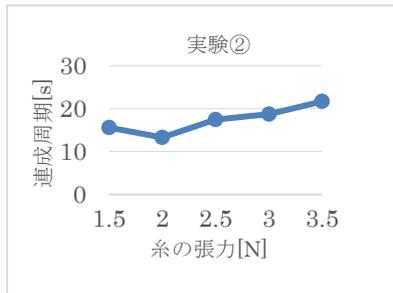


図 1 実験装置

ばね振り子同士の間隔が狭いほど連成周期は短くなった。ばね振り子同士の間隔が 40[cm]のときは連成振動が起こらなかった。

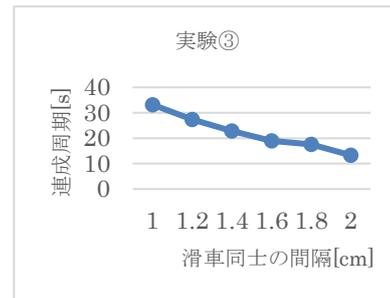
## 実験②



グラフ 2 実験②の結果

糸の張力が小さいほど連成周期が短くなった。

## 実験③



グラフ 3 実験③の結果

滑車同士の間隔が大きいほど連成周期が短くなった。

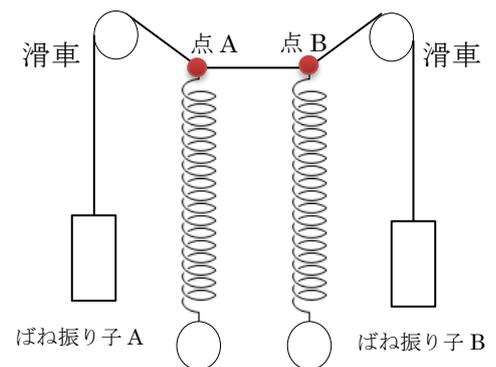
## 4. 考察

連成振動において振動しているばね振り子をばね振り子 A、静止しているばね振り子をばね振り子 B とする。また、ばね振り子 A、ばね振り子 B と糸のつなぎ目をそれぞれ点 A、点 B とする。

実験①と実験③については、点 A の滑車からの距離が遠いほど糸が大きく振れた。よって点 A における糸の振幅が大きくなるため、ばね振り子の振動は増幅しやすくなる。実験②では、糸の張力が小さいほど糸は大きく振れ、糸の振幅が大きくなり、ばね振り子は増幅しやすくなる。

よって、ばね振り子同士の間隔が狭いほど、糸の張力が小さいほど、滑車同士の間隔が広いほど、連成周期は短くなったと考えた。

また、ばね振り子の位相が連成振動の起こりやすさに影響していると考えた。ばね振り子 A が最も大きく振動しているときの点 A の振幅（以下点 A の最大振幅と呼ぶ）が大きいとき、2つのばね振り子は逆位相になり安定するため、連成振動は起こらない。点 A の最大振幅が小さくなると、位相の差が小さくなり、連成振動が起こる。点 A の最大振幅がさらに小さくなると、2つのばね振り子が同位相となり安定するため、連成振動は起こらない。



## 5. 結論

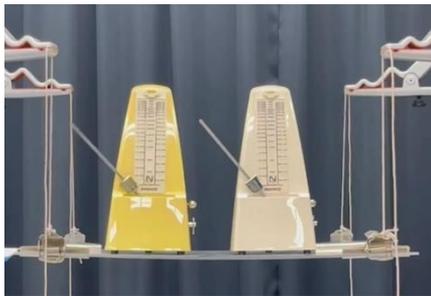
振り子の滑車からの距離が遠いほど、また張力が小さいほど、ばね振り子の連成周期が短くなる。また2つのばね振り子が同位相の場合と逆位相の場合は、連成振動は起こらない。

# メトロノームの同期現象 ～同相同期と逆相同期の条件とメカニズム～

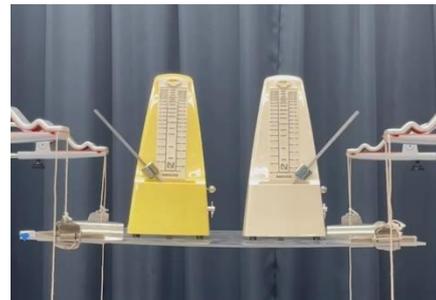
## 1. はじめに

自然界には、複数のもの同士が相互作用して、お互いのリズムを変化させ合うことで動きが揃う現象がある。これを同期現象という。その中でも特に、私たちはメトロノームを用いた同期現象について研究した。

メトロノームの同期現象には「同相同期」と「逆相同期」の二種類がある。同相同期とは、図1のようにメトロノームの針が同位相で同期する現象で、逆相同期とは、図2のようにメトロノームの針が逆位相で同期する現象のことである。



【図1】同相同期



【図2】逆相同期

ではなぜメトロノームの同期現象には二種類存在するのだろうか？またどのような条件で同期の種類が決まるのだろうか？このことに私たちは興味を持ち、それぞれの同期現象が起こる条件とメカニズムを解明するとともに、現象を説明する数理モデルの作成を試みた。

本校の先輩が行った研究では、図3のように板を吊るす糸が鉛直方向となす角を $\theta$ とすると、 $\theta$ が小さい時は同相同期、 $\theta$ が大きい時は逆相同期が起こりやすいことが示されている。一方で、他の先行研究では $\theta=0$ で実験を行っているものがあった。私たちは、 $\theta=0$ に設定し、糸の長さを変えると同じような現象が見られるのではないかと考え、図4の実験装置を用いて研究を行うことにした。



【図3】大手前高校 75 期  
「メトロノームの同期現象」から一部修正



【図4】実験装置

## 2. 方法

図4のように、糸を通した目玉クリップを木製板の四隅に取り付けて、クリップ付き鉄製スタンドを用いてこれを吊り下げ、板が左右に揺れる状態にする。この時板は水平であり、糸は地面に対して垂直である。吊り下げられた板の上に、テンポを同じ値に設定したメトロノーム「NIKKO MODEL:221」を二つ乗せて起動させる。

## 3. 実験・結果

### 【実験 1-1】

板を吊るしている糸の長さに注目し、糸の長さを変えることでどちらの同期現象が生じるか調べた。本来メトロノームの同期現象では、二つの針がどんな状態から始めたとしても同期が起こると考えられる。しかし今回の実験では、実験を効率的に進めるために、針が同位相、逆位相の二つの状態から始めて、どちらの状態から始めても最終的に同じ位相差になった場合に同期が生じたとした。また、一分以上経過しても同期が起こらない場合は同期せずとした。

### 【結果 1-1】

結果は表1のようになった。

メトロノームの振動数 [Hz]	糸の長さ [cm]											
	最終的な同期の種類											
	24.8	25	26	27	27.3	27.5	28					
1.00	逆相同期				同期せず	同相同期						
	20	21	21.2	21.5	21.6	21.7	21.8	21.9	22	22.1	22.3	
1.14	逆相同期				同期せず			同相同期				
	10	14	16	16.8	17	17.2	17.3	17.5	17.6	17.7	17.8	18
1.33	逆相同期						同期せず				同相同期	
	14	14.3	14.5	15	16							
1.53	逆相同期	同期せず	同相同期									
	10	10.5	10.8	11.3	11.5	11.7	12.5	12.8	13.2	13.5	13.7	
1.67	逆相同期		同期せず		逆相同期	同期せず		同相同期				

【表 1】 糸の長さで生じた同期の種類

メトロノームの振動数がいずれのときでも、糸の長さが長い時同相同期が生じ、短い時逆相同期が生じることが分かった。

この時、装置全体を大きな振り子のようにみなすと、糸の長さが増えることで、それに伴って装置の固有振動数も変化していると考えられる。私たちは、この装置の固有振動数が同期の種類に関係していると考え、次の実験を行った。

### 【実験 1-2】

【結果 1】における、同期の種類が切り替わる付近での装置の固有振動数を調べ、その時のメトロノームの振動数の値と比較した。装置の固有振動数は、針を止めた二つのメトロノームを板上に置き、装置を振り子運動させて、一定時間内に装

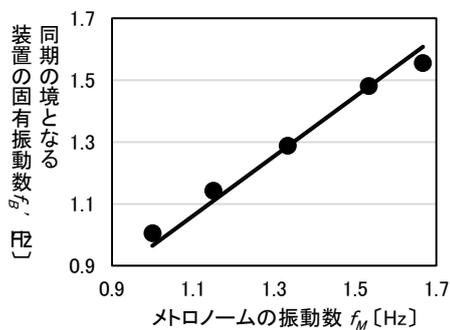
置が振動した回数を計測することによって求めた。

### 【結果 1-2】

メトロノームの振動数を  $f_M$ 、装置の固有振動数を  $f_B$ 、同期の種類が切り替わる  
ときの (=同期の境となる) 装置の固有振動数を特に  $f_B'$  とする。

$f_M$ [Hz]	1.00	1.14	1.33	1.53	1.67
(同期の境となる糸の長さ[cm])	(27.3)	(21.7)	(17.5)	(14.3)	(12.5)
同期の境となる $f_B'$ [Hz]	1.01	1.14	1.29	1.48	1.56

【表 2】メトロノームの振動数  $f_M$  と  
同期の境となる装置の固有振動数  $f_B'$  の関係



【図 5】  $f_M$  と  $f_B'$  の関係

直線の上側では逆相同期、  
下側では同相同期が生じたことを表す

表 2 から、 $f_M \approx f_B'$  であることが分かる。このことから  $f_B > f_M$  のとき同相同期が生じ、 $f_B < f_M$  のとき逆相同期が生じることが分かった。

私たちは、以上の結果を踏まえて、板の振動が同期の種類に関係していると考え、次の実験を行った。

### 【実験 2】

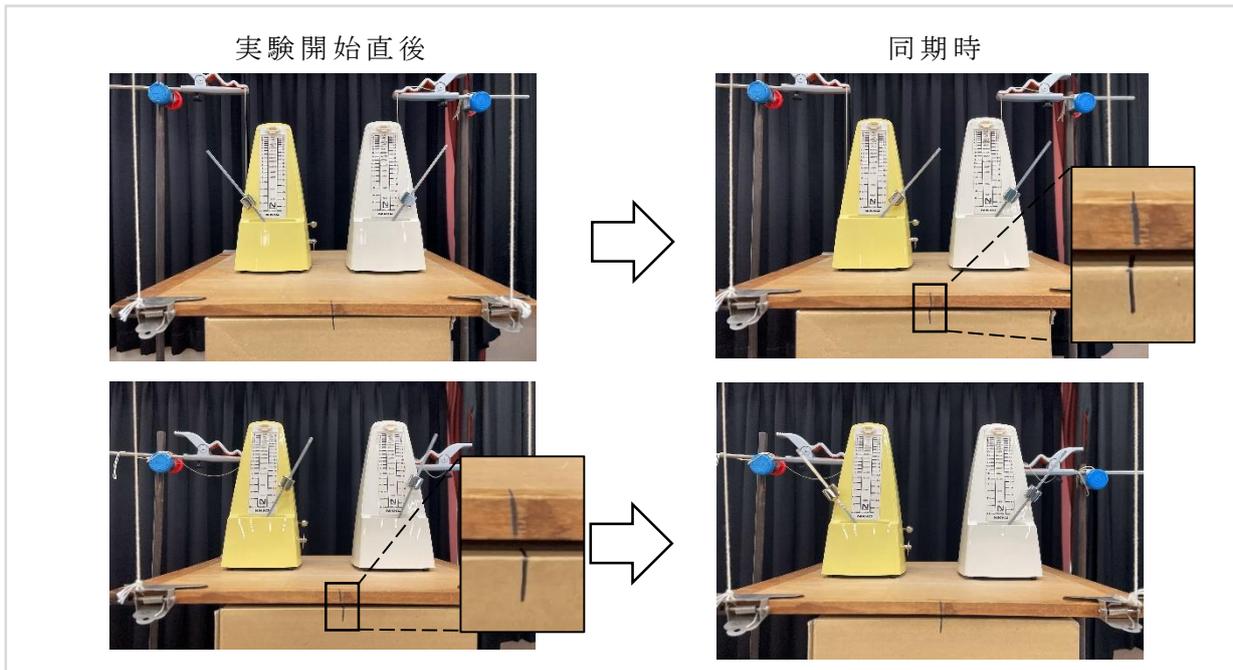
図 6 のように、同期が起こる過程でのメトロノームの運動と板の水平方向の運動を、2 台のスマートフォンを使って同時にスロー撮影し観察した。(→図 7)

また、映像をコマ送りにしてメトロノームと板が左右に最も振りきれた時刻をそれぞれ記録し、メトロノームと板の変位の時間変化をグラフにした。(→図 8) なお、メトロノームと板の振幅はどちらも測定できなかったため正確ではない。



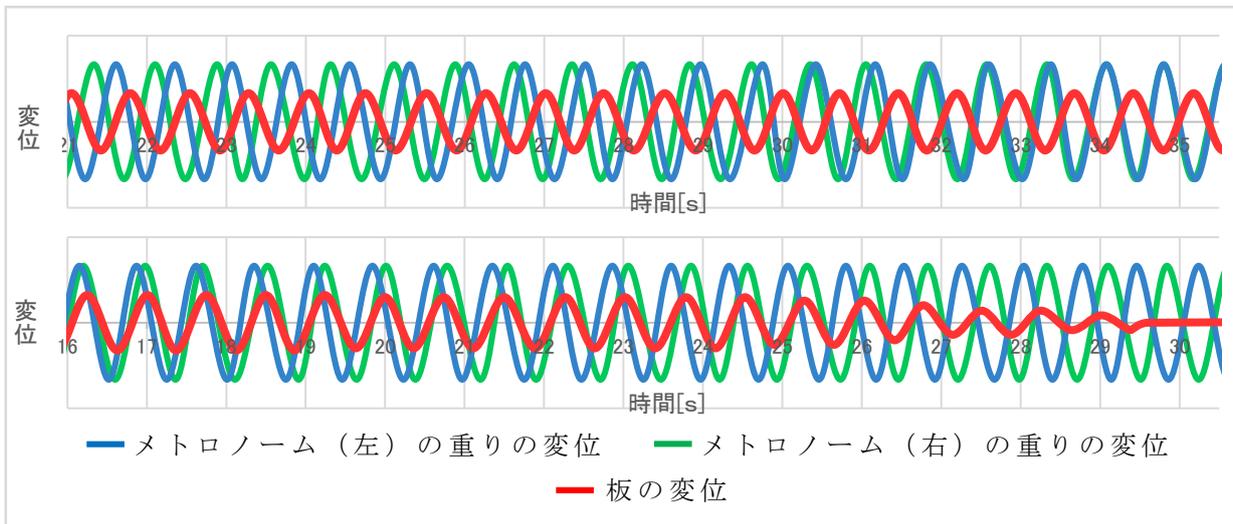
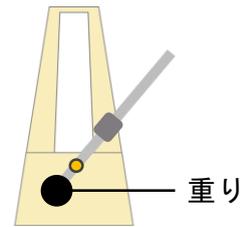
【図 6】 実験の様子

【結果 2】



【図 7】同期する過程でのメトロノームと板の運動の様子  
上：同相同期 下：逆相同期

右図のように、メトロノームの針の下部には重りがついている。  
図 8 ではこの重りと板の運動に着目して結果をまとめた。



【図 8】同期の過程でのメトロノームと板の変位  
上：同相同期 下：逆相同期

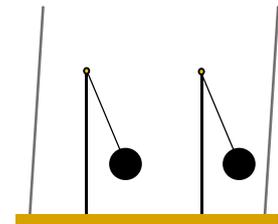
同相同期が生じる場合、板は実験開始直後には静止していたが、時間経過とともに振動を始め、メトロノームが同期した時には大きく振動していた。その時メトロノームの重りと板は逆の向きで振動していた。

それに対して、逆相同期が生じる場合、板は実験開始直後から振動していたが、時間経過とともに振幅が小さくなっていき、メトロノームが同期した時には静止していた。その時メトロノームの重りと板は同じ向きで振動していた。

以上のことから、同相同期が生じる場合と逆相同期が生じる場合を比較すると、同位相で振動している重りに対する、板の振動の向きが逆になっていることが分かる。

#### 4. 考察

メトロノームの状態で考察を行うのは難しいため、これ以降は図9のようにメトロノームの代わりに振り子を用いて考察を行っていく。

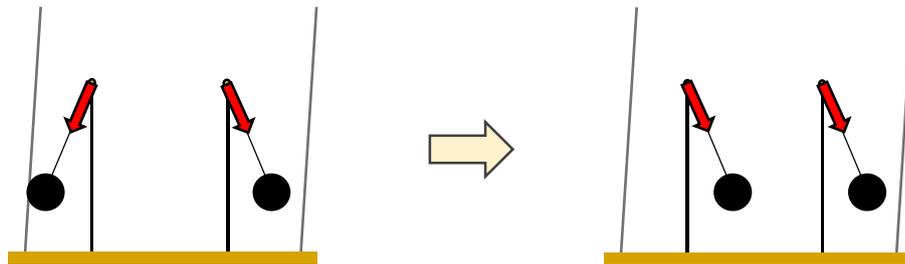


【図9】装置のモデル

①板が【結果2】のように振動する理由について考察する。

重りが振動すると板に水平方向に力が加わる。

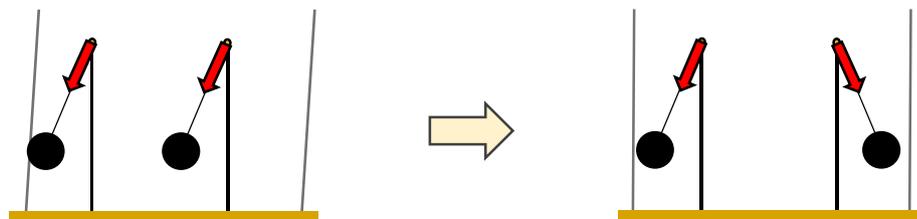
$f_B < f_M$  のとき（同相同期が生じるとき）



【図10】同相同期が生じる過程

板の方が重りよりも周期が長いため、時間経過とともに板は二つの重りと同じ位相でついていくことが出来なくなる。そのため最終的に重りと板は逆の向きに振動する。

$f_B > f_M$  のとき（逆相同期が生じるとき）



【図11】逆相同期が生じる過程

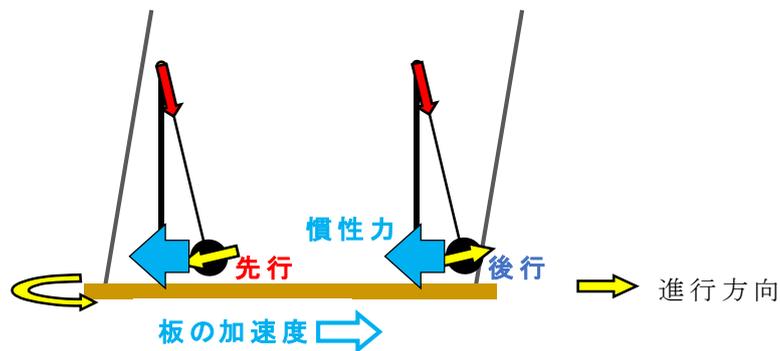
板の方が重りよりも周期が短いため、板は重りと同じ位相でついていくことが出来る。そのため実験開始後しばらくは重りと板は同じ向きに振動する。

②【結果2】のように板が運動すると、それぞれの同期がどのようにして生じるかについて考察する。

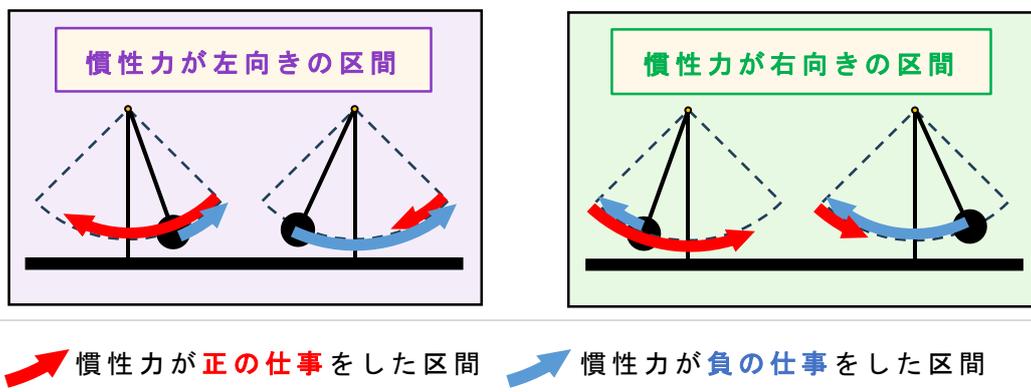
重りに対する板の振動の仕方が異なると、重りにかかる慣性力の向きも異なる。そこで、慣性力が重りにする仕事について考えることによって、生じる同期の種類が異なることを示す。

図12, 図14では、二つの重りに位相差が生じ、片方の振り子が先行し先に折り返していき、もう一方の重りはまだ折り返していない時刻での状態を表している。

### I. 同相同期



【図12】同相同期が生じる場合のある時刻における慣性力の向き



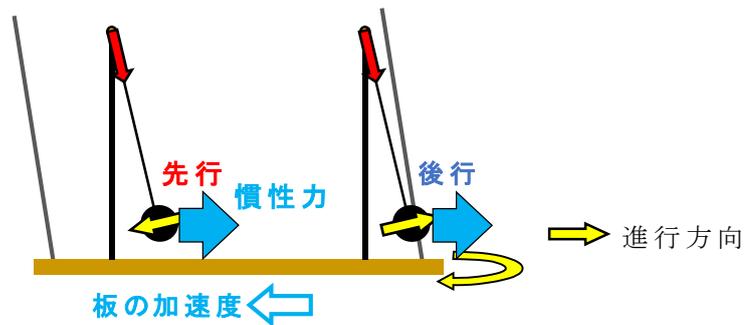
【図13】同相同期が生じる場合の慣性力がする仕事の正負

重りの進行方向を正として、重りが一周だけ運動する間に慣性力にされる仕事を、図13のように慣性力の向きによって二区間に分けて考える。先行している重りには正の仕事がされる時間が長くなり、後行している重りには負の仕事がされる時間が長くなると考えられる。

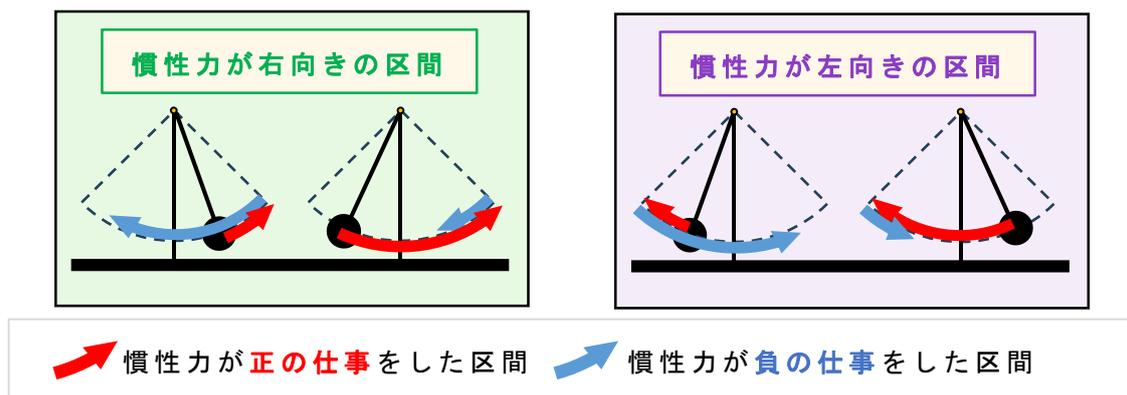
重りがされる仕事の和が正のときには重りの振幅は増加し、逆に仕事の和が負のときは重りの振幅は減少すると考えられる。また、振り子の振幅が増加すると、振り子の周期は僅かに長くなり、反対に振幅が減少すると、周期は短くなること分かっている。

そのためこの場合、先行する振り子は遅れていき、後行する振り子は進んでいく。この作用が累積することで振り子の位相差が縮小していき、位相が一致する。そして、それ以降は再び振り子に少しの位相差が生じた場合でも、同様の働きによって、位相差は常に小さくならうとするため、振り子は半永久的に同位相の状態に安定すると考えられる。

## II. 逆相同期



【図 1 4】逆相同期が生じる場合のある時刻における慣性力の向き



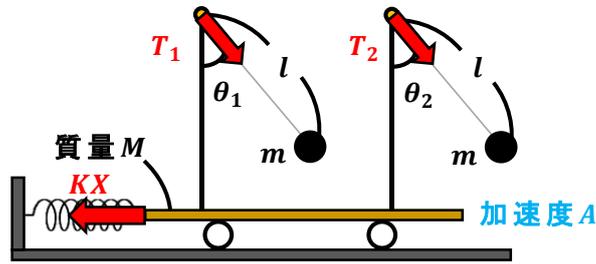
【図 1 5】逆相同期が生じる場合の慣性力がする仕事の正負

同相同期の場合と同様に、重りが一周期だけ運動する間に慣性力にされる仕事を考えると、先行している重りには負の仕事がされる時間が長くなり、後行している重りには正の仕事がされる時間が長くなると分かる。

そのため、逆相同期の時には先行する振り子は進み、後行する振り子は遅れる。この作用が累積することで振り子の位相差が拡大していき、逆位相の状態に安定すると考えられる。

③Excel 上でメトロノームの同期現象についての慣性力を含めたシミュレーションを行う。

板が振り子のような状態のまま考察するのは難しいため、ここでは図 1 4 のように板の振り子運動を生み出している力をばねの弾性力を用いた数理モデルを考える。二つの振り子と板について慣性力を用いた運動方程式をたてる。



【図 1 6】シミュレーションに用いた数理モデル

振り子 1, 2 についての運動方程式 ( $\omega$  は角振動数)

$$ml\omega_1^2 = T_1 + mAsin\theta_1 - mgcos\theta_1 \quad \cdots \textcircled{1} \quad ml\omega_2^2 = T_2 + mAsin\theta_2 - mgcos\theta_2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

板についての運動方程式

$$MA = T_1sin\theta_1 + T_2sin\theta_2 - KX \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②を  $T$  について解き、③に代入して

$$MA = (ml\omega_1^2 + mgcos\theta_1 - mAsin\theta_1)sin\theta_1 + (ml\omega_2^2 + mgcos\theta_2 - mAsin\theta_2)sin\theta_2 - KX$$

$$\{M + m(sin^2\theta_1 + sin^2\theta_2)\}A = m\{sin\theta_1(l\omega_1^2 + gcos\theta_1) + sin\theta_2(l\omega_2^2 + gcos\theta_2)\} - KX$$

$$A = \frac{m\{sin\theta_1(l\omega_1^2 + gcos\theta_1) + sin\theta_2(l\omega_2^2 + gcos\theta_2)\} - KX}{M + m(sin^2\theta_1 + sin^2\theta_2)}$$

図 1 7 において重り 1, 2 についての接線方向の運動方程式 ( $\alpha$  は角加速度)

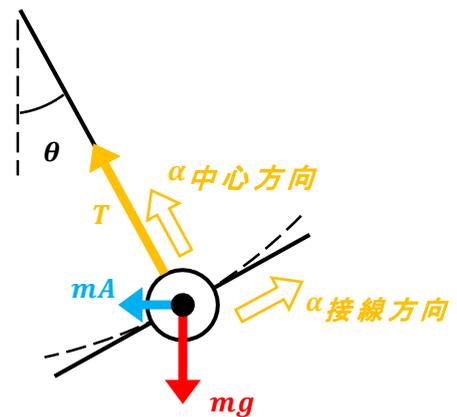
$$ml\alpha_1 = -mgsin\theta_1 - mAcos\theta_1$$

$$ml\alpha_2 = -mgsin\theta_2 - mAcos\theta_2$$

$\alpha$  について整理して

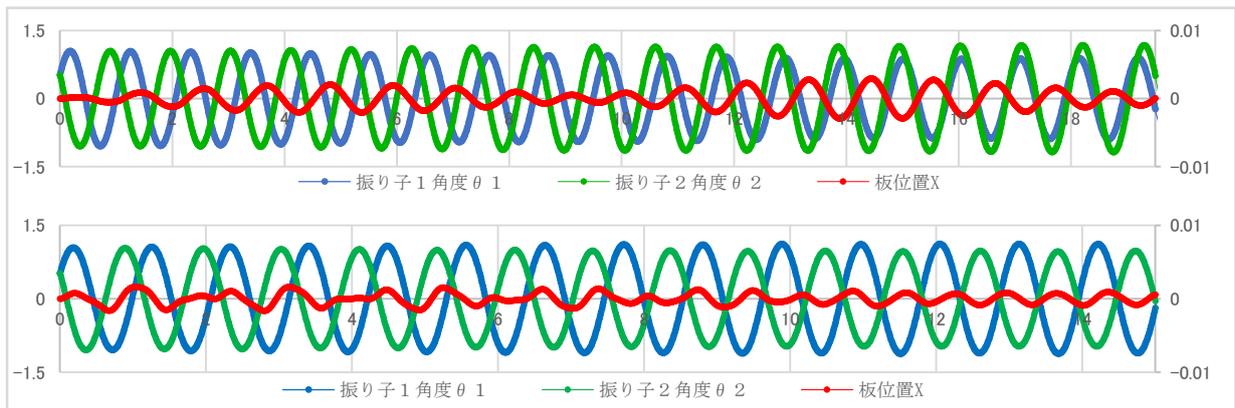
$$\alpha_1 = -\frac{gsin\theta_1 + Acos\theta_1}{l}$$

$$\alpha_2 = -\frac{gsin\theta_2 + Acos\theta_2}{l}$$



【図 1 7】重りにかかる力の図示

以上の式を用いてシミュレーションを行い、次の図 1 8 のグラフを得た。



【図 1 8】同期現象のシミュレーション結果

上： $f_B < f_M$  のとき 下： $f_B > f_M$  のとき

シミュレーション結果を見ると、 $f_B < f_M$  のときには板が重りと逆向きで振動して同相同期が生じることが再現されていることが分かる。また、 $f_B > f_M$  のときには逆相同期が生じること示されている。

考察①, ②から、二種類の同期現象が生じるのは、板の運動が異なることによって、重りにかかる慣性力の作用の仕方に違いが生じるためだと考えられる。

## 5. 今後の課題

今回行ったシミュレーションでは、逆相同期が生じる場合において、板の動きが

**【結果 2】** 図 8 の様には安定せず不規則な運動をしてしまい、再現することができなかつた。また、板と振り子の重りの質量の条件が現実とは異なる値でなければ同期現象を再現することができなかつた。

今後の課題としてはこのシミュレーションを現実的な範囲で成り立つように改良することが挙げられる。

また今回の研究では、二つのメトロノーム間で生じる同期現象を取り扱ってきたが、更に多くのメトロノームを用いても同じように同期が起こることが知られている。こういった場合にも応用できる理論やシミュレーションを構築することも考えていきたい。

## 5. 結論

メトロノームの振動数  $f_M$ 、装置の固有振動数  $f_B$  の間に  $f_B < f_M$  が成り立つときには同相同期が、 $f_B > f_M$  が成り立つときには逆相同期が実現することが分かった。

慣性力がメトロノームの重りにする仕事の正負について考えることにより、同期現象のメカニズムを説明することができた。

メトロノームの重りと板の運動を数理モデル化したシミュレーションにおいても、慣性力によって同期が引き起されることが確かめられた。

# ブラジルナッツ効果

## 1. 緒言

ブラジルナッツ効果とは、密度の大きい粒子（ビー玉など）を大量の密度の小さい粒子（BB弾など）の中に沈めて振動を与えると、上昇するはずのない密度の大きい粒子が上昇してくるという現象である。私たちはブラジルナッツ効果が生じる原因を研究した。

## 2. 実験手順

ブラジルナッツ効果がどのような条件下で起こるのか調べるために、容器の振動のさせ方、容器に入れる粒子の量などを変えて以下の実験を行った。

<実験道具>

- ・四角柱の容器（底面 9.7cm×9.7cm 高さ 8.1cm）（図1）
- ・BB弾（直径 0.6 cm 密度 1.08g/cm<sup>3</sup>）・ビー玉（直径 1.7cm 密度 2.46g/cm<sup>3</sup>）・鉄球（直径 2.0cm 密度 7.874g/cm<sup>3</sup>）・ガラスビーズ（図2）



（図1）



（図2）

<実験①>

BB弾とビー玉、鉄球を容器に入れて水平方向に振動を加える。BB弾の量を変えて、同様の実験を行う。

<実験②>

BB弾とビー玉、鉄球を容器に入れて鉛直方向に振動を加える。BB弾の量を変えて、同様の実験を行う。

<実験③>

ガラスビーズを入れた容器にビー玉を左端、真ん中、右端に置いて容器の片側を叩く。

ビー玉をBB弾、鉄球に変えて、同様の実験を行う。

## 3. 実験結果

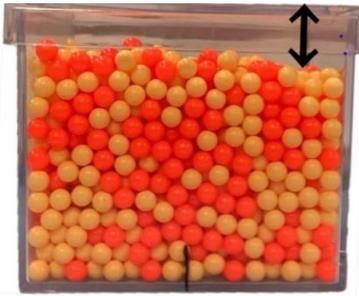
結果①

振動の振幅を小さくしたときビー玉は上昇しなかった。また、容器をBB弾で完全に満たしたとき、ビー玉は上昇しなかったが、完全には満たしていないとき、ビー玉は上昇した。鉄球はどの場合においても上昇しなかった。

結果②

結果①と同様にビー玉は上昇したが鉄球は上昇しなかった。また図3のように容器をBB弾

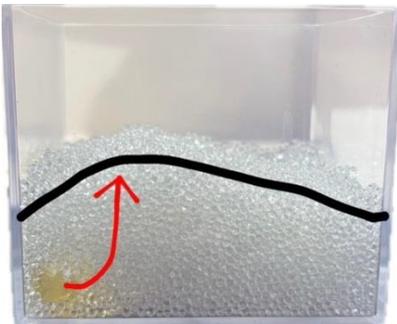
でほぼ完全に満たしたときでもビー玉は上昇した。このことから粒子全体が上下僅かに動いていればビー玉は上昇する。



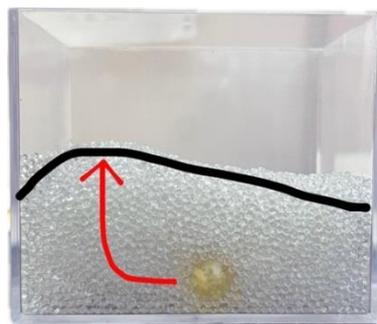
(図 3)

### 結果③

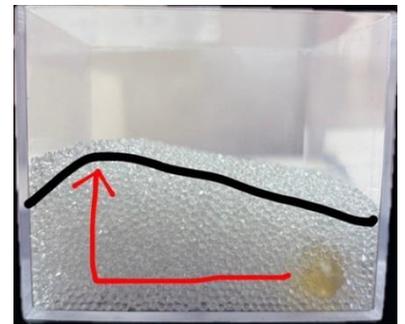
容器を叩いたとき、左端、真ん中、右端のどの位置においても BB 弾とビー玉は図 4~6 のような経路を辿って上昇した。また、鉄球はどの場合においても上昇しなかった。



(図 4)



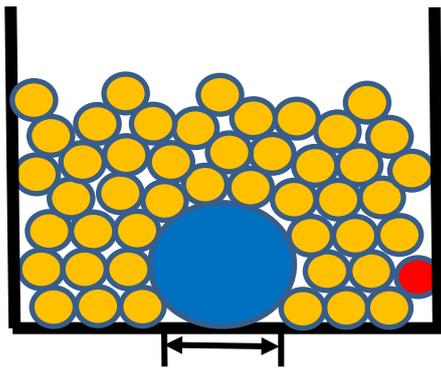
(図 5)



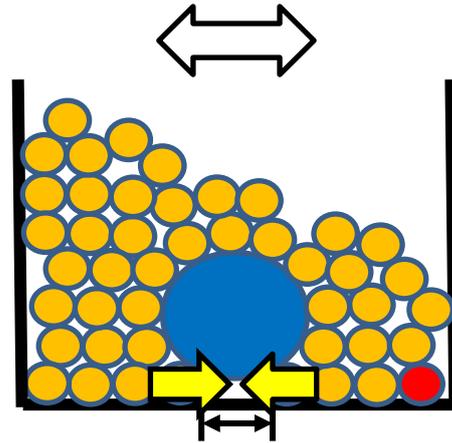
(図 6)

## 4. 考察

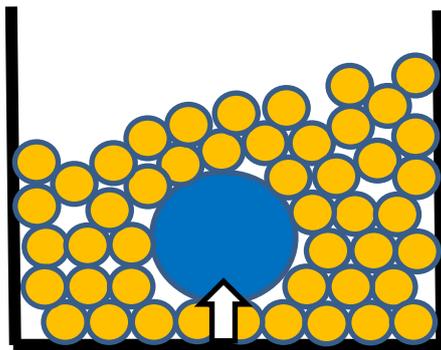
実験①②より、粒子全体がわずかにでも上下運動していれば、ビー玉は上昇すると考えた。そこで、実験①においてビー玉が上昇する様子を以下のように考察した。BB 弾全体が上下方向に動くと、上方にあった BB 弾 (図 7 で示した赤色の BB 弾) が下方へと移動する。移動を繰り返すことにより、下方の BB 弾の数が増加する。増加したことによってビー玉は両脇にある BB 弾から力を加えられ (図 8)、押し出されるような形で上昇する (図 9)。押し出されるような形で上昇した後は、水平振動の動きに合わせて動いている BB 弾によって、ビー玉も周りの BB 弾に乗り上がるような形で上昇していく (図 10) のではないかと考えた。



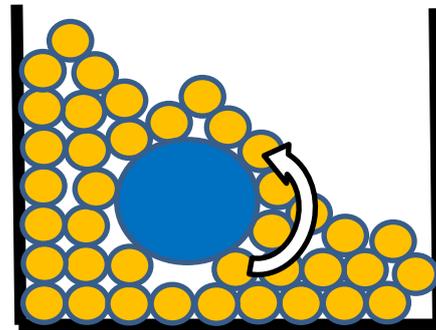
(図 7)



(図 8)

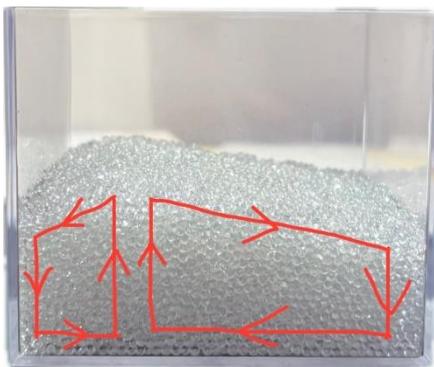


(図 9)



(図 10)

実験③では、上下方向に動かないように振動を加えたが、ブラジルナッツ効果は起こった。しかし、この原因はBB弾の動きから明らかなように容器内に粒子の対流(図11)が起こったことにある。容器内に対流が起こらない実験①②では、依然として上下運動が重要となると考えられる。



(図 11)

## 6. 結論

ブラジルナッツ効果が起こる原因は次の2通りのパターンがあると考えられる。

1. 容器に振動を加えたときに、粒子に鉛直方向の力が働く
2. 容器に振動を加えたときに、容器内で小さい粒子による対流が生じる

## 7. 謝辞

京都大学の村上章先生には、お忙しい中私たちの質問にお答えいただき、参考文献の紹介、実験・シミュレーションの提示などご協力を賜りました。ありがとうございました。

# 開口端での音の反射の原理

## 1. 緒言

音は反射する性質をもつ。山に向かって大きな声を出す行為は、音が返ってくる所謂山びこを期待しているからするもので、そのことから音が山や壁などで反射することは我々の常識として根付いている。

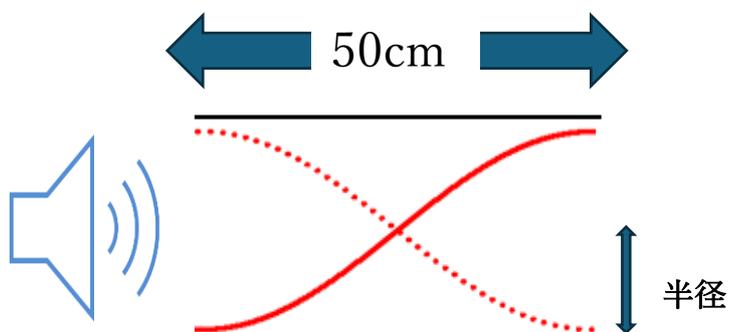
ここで、音の反射を筒の中で考える。片側がふさがっている筒（そこには壁があると考えられる）があり、そこに音を入射する。当然、常識通りに音は壁で反射する。ではその壁を取り除いてみてはどうか。なんと壁がないのにも関わらず、音は反射する。私たちは、筒において壁となるものがない開口端（以下、壁がない状態の筒の端側のことを開口端と呼ぶ）で、なぜ音が反射するのかを調べた。

共鳴という現象は、いくつかの音が影響しあってより大きな音となることである。

私たちが考えた仮説は、「もし両側が開口端である筒の中で共鳴が起こっているのを確認することが出来たら、筒の中には入射する以外の音が存在することになる。その存在する音とはつまり、他でもない反射音であり、ゆえに筒の中で反射が起こっているといえる。」というものである。

もう一つ、私たちの考えた仮説は、「仮に、ある筒 A で共鳴を観測したとする。ここで、ある筒には半径が無限大の筒がかぶさっていると考える。その半径無限大の筒の半径を徐々に小さくしていくと、やがてある筒 A の半径と等しくなる。等しくなった時、音は反射しない。このことからある筒 A の外側の筒の半径を徐々に小さくしていくと、反射もしにくくなり、共鳴も起こりにくくなる。」というものである。

反射音は微弱であり、直接測定するのは難しいので、共鳴を測定する方法を採用した。共鳴が起こるのはある振動数（固有振動数）のときのみである。固有振動数は  $v=f\lambda$ （今回の場合  $v$  は波の速さ、 $f$  は振動数、 $\lambda$  は波長）という式と開口端補正より、約 320 Hz となる。



## 2. 実験手順

<実験器具>

- ・筒①～⑤（全て全長50.0cm）の5本

	筒①	筒②	筒③	筒④	筒⑤
半径(cm)	2.05	3.5	5.35	6.25	10.0

- ・スタンド2台、椅子2脚
- ・音計測、音源用アプリ (Analyzer)

<実験方法>筒の開口端で音が反射する原理を調べるために、次の2つの実験を行った。

【実験1】筒①に振動数260～350Hz（固有振動数付近）の音を流し、反対側からその音圧を計測した。

【実験2】筒①の外側に筒②～⑤を被せて筒①に音を流す。



## 3. 実験結果

【実験1】【実験2】から得られたデータを、横軸を振動数[Hz]、縦軸を音圧[dB]のグラフにプロットした。固有振動数である320Hz付近の音圧に注目する。

【実験1の結果】

図1



【実験2の結果】

図2

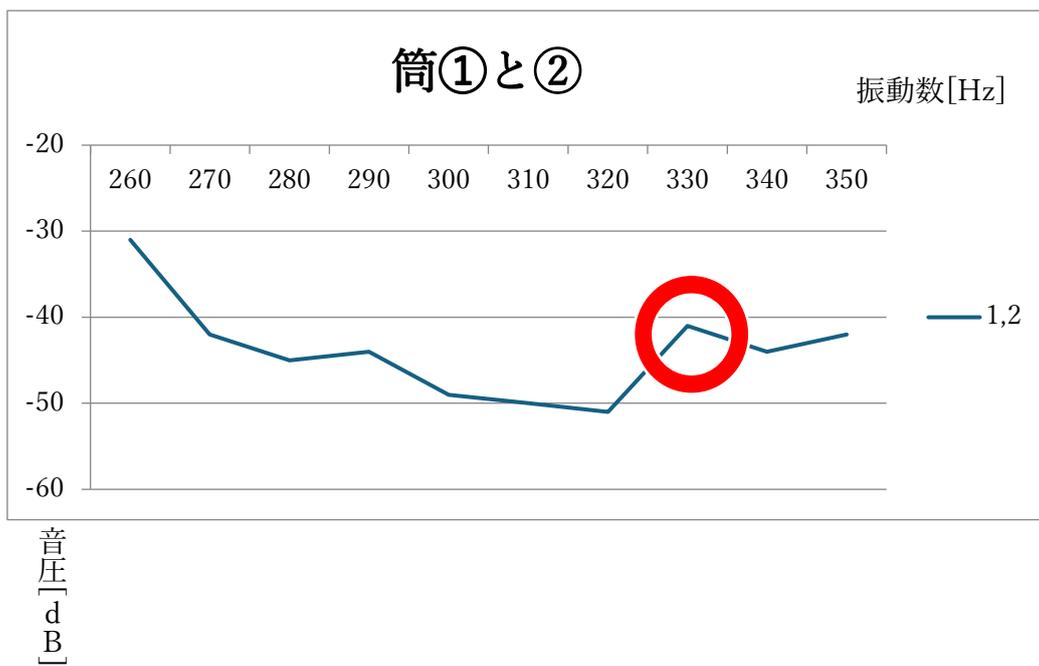


図3



図4

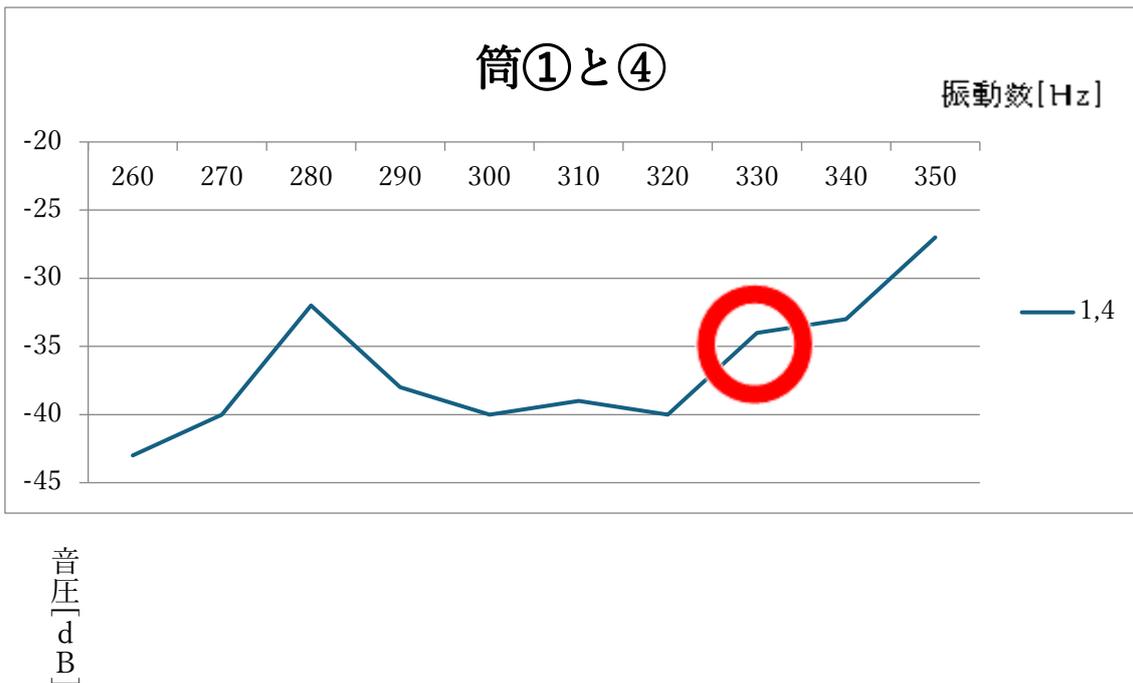


図5



音  
圧  
[  
d  
B  
]

#### 4. 考察

私たちの仮説は「外側の筒の半径を徐々に小さくしていくと、反射は起こりにくくなる。」というものであった。

実験結果を見てみると、2本の筒の半径の差は、図2, 3, 4, 5の順に大きくなっている。

ここで、筒①のみで共鳴が起こる振動数[Hz]は、330～340 [Hz] である。

実験結果より、筒①を覆う筒②～⑤の半径が小さくなるほど、図2～5の330～340 [Hz]の固有振動数のピークの音圧は小さくなっており、共鳴が起こりにくいといえる。

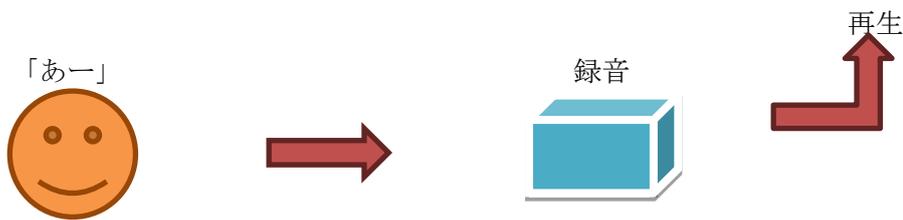
#### 5. 結論

筒の開口端では反射が起こり、その反射はある筒Aを覆う大きな筒の半径が小さくなればなるほど反射が起こりにくくなる。

# 声を作ろう

## 1. 諸言

Z 人の声は各個人によって音色が異なるが、同じ言葉を聞き取ることができることを疑問に思った。実際に録音した声から振動数成分を分析し、「あ」「い」「う」「え」「お」の母音の特徴を明らかにしてパソコンで正弦派を合成してこれらの母音の音声を実現することを研究した。



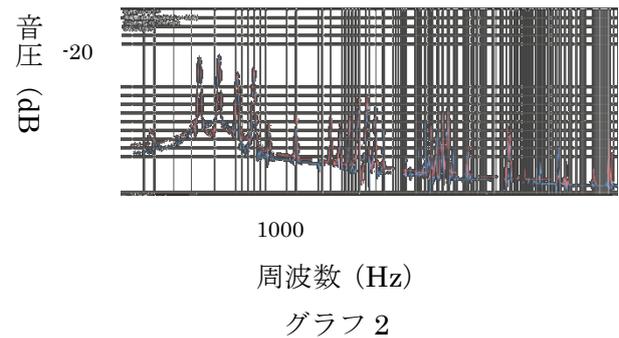
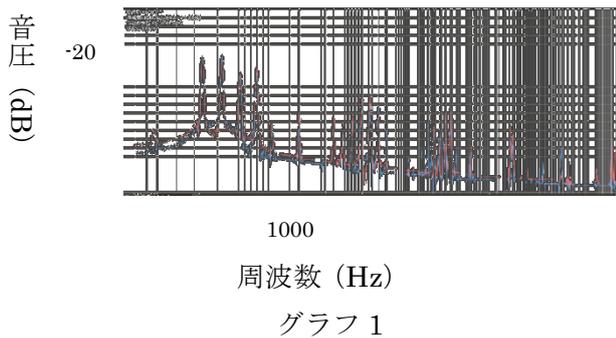
## 2. 実験手順

<実験道具>

パソコン アプリケーション 記録用紙

<実験方法>

「あ」～「お」について、複数人の男子と女子の声をピアノのド(C5)523Hz に合わせて録音した。波形を波の重ね合わせの原理をもちいて再現するために、録音により得られた音をフーリエ変換（単位時間あたりにどの周波数がどれだけ含まれているのかを示すグラフ）（グラフ 1, 2）し、振動数と振動数成分の比を求めた。下のグラフは「あ」の場合である。



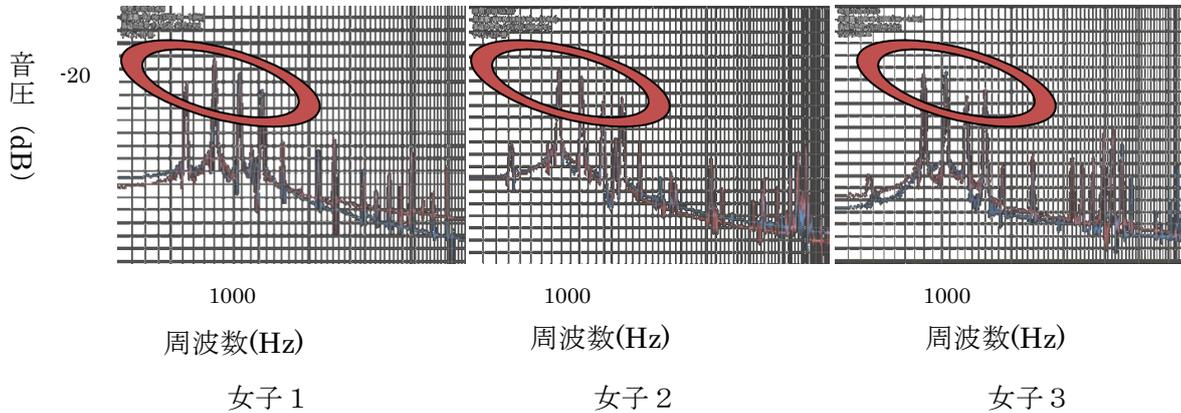
### 3. 実験結果

女子の「あ」

図 1

図 2

図 3



男子の「い」

図 4

図 5

図 6

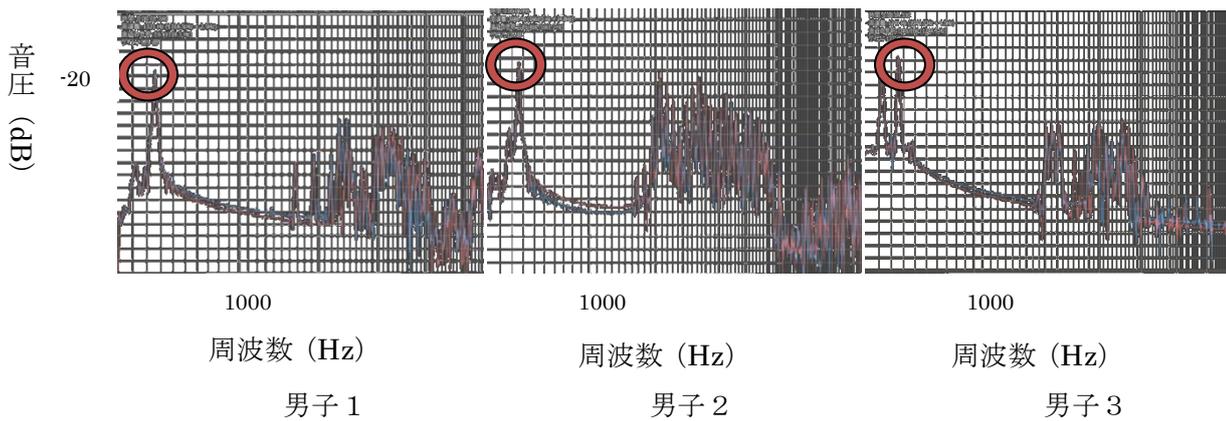


図 1～図 3 の女子の声の「あ」の音圧レベルの高い振動数及びその振動数成分の比は、共通点が見られる。一方、図 4～図 6 の男子の声の「い」の音圧レベルの高い振動数及びその振動数成分については共通点が分からなかった。

男女別に共通した音圧レベルの高かった振動数 (Hz) の値の平均と振動数成分の比 (dB) をまとめると表のようになる。

	女子			男子				
あHz	781	1038	1303	507	633	882	1008	1138
あ比	17	28	8	31	79	19	22	12
うHz	270	527	1872					
う比	7	31	8					
おHz	535	804	1072	383	513	639	770	
お比	5	15	22	1	44	39	14	

表1 男女における母音の周波数と比の関係

#### 4. 考察

男子には男子の共通点、女子には女子の共通点があることが分かる。しかし、女子の「い」男子の「う」に関してはフーリエ変換した際に現れる共通点が少なく、正確なピークの周波数を示せなかった。また、男子と女子には共通する部分を見出すことはできなかった。男子と女子の母音はそもそも違うのではないか。共通点以外の部分で個人の独特さ（個人差）が出ているのではないかと考えられる。

#### 5. 結論

女子の「あ」「う」「お」に関しては、フーリエ変換の周波数特性の共通点が多く、正弦波を合成して「あ」「う」「お」の声を再現できた。男子の「あ」「お」に関しても再現できた。一方、女子の「い」、「え」及び、男子の「い」、「う」、「え」においてはその共通点の少なから、正弦波の合成から、声を再現できなかった。

# 光条のメカニズム

## 1. 概要

カメラで光源の写真を撮ると数本の放射状の光の線が見えることがある(図1)。この光の線ができる現象は「光条」と呼ばれている。我々はこの現象がどのようにして発生しているのかに興味を持った。



図1  
光条と呼ばれる現象

## 2. 研究目的

カメラの構造のどの部分が光条に関係しているかを見つけ、そのメカニズムを明らかにすることを目的にする。

## 3. 研究方法と結果

カメラの構造や機能と光条の関係を明らかにするために実験を行った。

### 【実験1】

基本的なカメラの3つの設定に着目した。この3つの設定は「シャッタースピード」「ISO感度」「f値」という設定である。これらのカメラの設定を変更して光源の写真を撮り光条の発生の方を調べた。

### 【結果1】

図2, 3から「シャッタースピード」「ISO感度」の設定では光条の変化は確認できなかった。また図4から「f値」を変更すると明らかに見えやすく変化していることがわかる。



図2  
シャッタースピード  
の変化

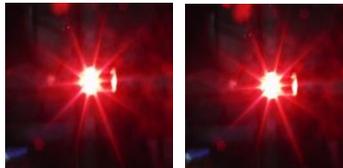


図3  
ISO感度の変化

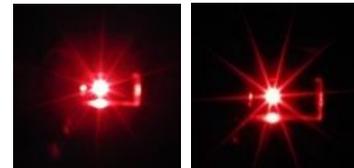


図4  
f値の変化

実験1の結果から「f値」を変更したときの影響が最も大きいことが分かる。つまりカメラの構造や機能が影響を及ぼすという考えは間違っていないことが分かる。「f値」とは、絞りを図5のように回転させ写真のぼやけ具合と明るさを調整するというものである。このことから絞りと光の線が何かしらの関係があると考えられる。そこで【実験2】を行った。



図5  
f値を変える仕組み

## 【実験2】

絞りの形と光条の関係を調べるために図6のような実験装置を使い実験を行った。これはスタンドでカッターの刃を固定し、多角形を作りレーザー光を当て光の出方を調べるという装置である。これを使用し光をカッターの刃で作成した絞りに当てた時の光の変化を調べた。

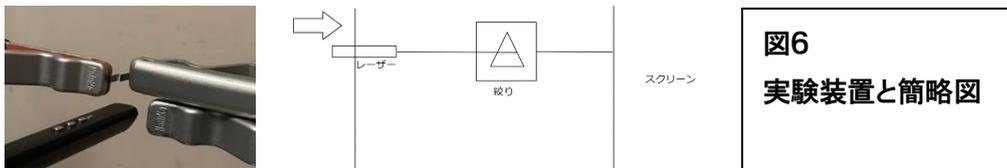


図6  
実験装置と簡略図

## 【結果2】

図7のような絞りに光を当てると図8のような光を確認できた。

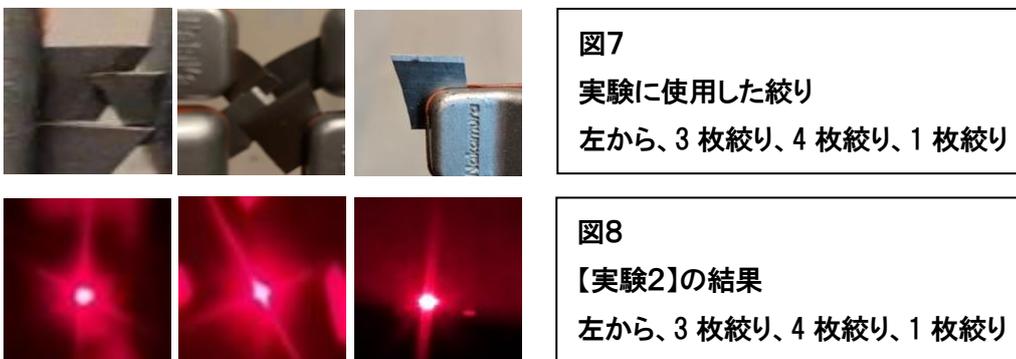


図7  
実験に使用した絞り  
左から、3枚絞り、4枚絞り、1枚絞り

図8  
【実験2】の結果  
左から、3枚絞り、4枚絞り、1枚絞り

## 4. 考察

図8の結果を分かりやすいように絞りの形と光の線だけに着目した図が図9である。黒い線が絞りの形を、赤い線が光の線を表す。

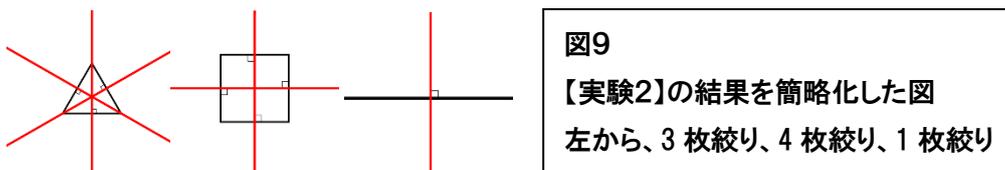
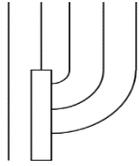


図9  
【実験2】の結果を簡略化した図  
左から、3枚絞り、4枚絞り、1枚絞り

図9の1枚絞りの結果に着目するとカッターの刃に対して垂直に光が出ていることが分かる。この結果と3枚絞り、4枚絞りの結果を比べると、1枚絞りの結果をそれぞれの絞りの形に合わせたときの光の線、つまり3枚絞りなら三角形に合わせ、4枚絞りなら四角形に合わせたときの光の線がそれぞれの結果に一致する。つまり2枚以上の絞りである場合、1枚絞りの光の線の組み合わせで説明できることが分かる。

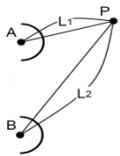
次に、1枚絞りの結果に注目すると上下に光の筋が広がっていることが分かる。カッターの刃という障害物の裏にレーザーの光が回り込んでいるので、ホイヘンスの原理を使って考えてみる。すると図10のようになるが、1枚絞りの結果で確認される、上に伸びている光

の筋が説明できないため、波の重ね合わせをこの考え方に組み合わせて考える。

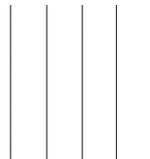


**図10**  
1枚絞りをホイヘンスで表した図

波の重ね合わせでは図11のように点Aと点Bから出た点Pに到達する時間の異なる波が点Pに影響を与える。この考え方を応用する。直進波をホイヘンスの原理を使って表した図12において波の重ね合わせを考えると図13のようになる。この図から1つ前の波面にある全ての波源が次の波面に存在するそれぞれの波源に影響を与え、直進波を形成していることが分かる。

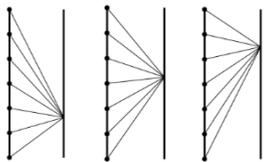


**図11**  
波の重ね合わせ

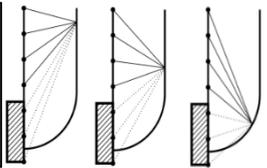


**図12**  
直進波をホイヘンスで表した図

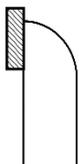
更に図10でも同じように波の重ね合わせを考えると図14のように表すことができる。図13と図14を見比べると障害物がある分、次の波面に影響を及ぼす波源が減っていることが分かる。この減っている影響分を考えるために図14を上下反転させた図15を作り障害物に防がれていない波源の影響の和を考える。図13の直進波と図14、図15を見比べた時、障害物に防がれていない波源の影響の和は図16のようになる。図10の障害物により減っている波源の影響分は図16の青い矢印であることが分かるが青い矢印は障害物に回り込む円形波の影響も持っている。つまり図14では、障害物によって円形波の影響もなくなっている。つまり図16の式より直進波に見えている部分、つまり障害物に遮られていない部分から円形波の影響がなくなっていることが考えられる。つまり図17のように逆位相の円形波が存在しているはずである。



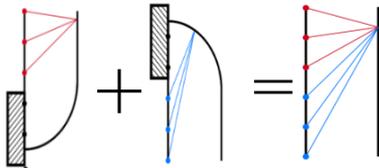
**図13**  
直進波と波の重ね合わせの図



**図14**  
図10と波の重ね合わせの図



**図15**  
図10を反転させた図



**図16**  
影響の和

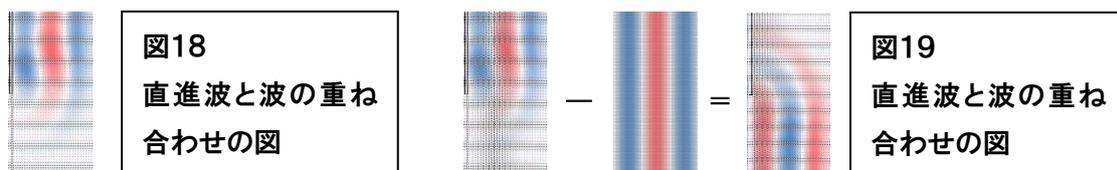


**図17**  
逆位相を付け足した図

### 【シミュレーション】

この考察を確かめるために物理の教員が作成した波動方程式のシミュレーションで回折の図を作成した。(図18)ここでは赤と青は山と谷をあらわす。

このままでは図16の青い矢印の影響を考えられないので、直進波を引くと図19の結果が得られた。この結果から逆位相の円形波が出ているので図17は正しかったことが分かる。



## 5. 結論、今後の展望

光条現象の光の線は図17のように障害物と反対側に逆位相の波が出ることで上下に光が伸びることで生じている。また図4の1枚絞りの結果を様々な絞りの形にあわせて組み合わせることにより絞りがどんな形をしていても光条現象は説明できる。逆に、あるカメラで写真を撮った時に光条現象による光の線の出方が分かれば絞りの形が分かる。

またこの実験をする中で2つの疑問が浮かんだ。

実験ではレーザー光を使用したが高これは点光源であるほうが光条の確認しやすいからであり、例えば蛍光灯では光条現象は確認できない。この理由が分からないというのが1つ目の疑問である。

もう1つは仮に正円の絞りがあったとすればどうなるのだろうかという疑問である。

1つ目の疑問はおそらく光条現象で生じる光の線が弱いため、1点からだけ光が出る点光源のような強い光を出すものでないと観測できないと考えられる。

2つ目は結論から考察するに円形の光が生じるであろうが確かめてみないとわからない。

この2つの疑問について今後は考えていこうと思う。

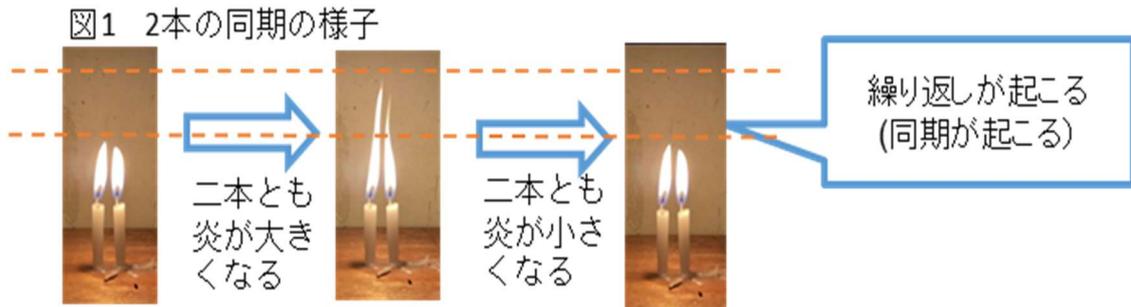
## 7. 謝辞

研究の指導助言をしてくださった物理教員の皆様、大学の教授の皆様ご援助していただきありがとうございました。

# ろうそくの炎の同期のメカニズム

## 1. 緒言

ろうそくの炎が上下に周期的に揺れることがよく見られる。複数のろうそくを並べると、これらの炎が同じリズムで上下に振動することがある。これをろうそくの炎の同期という。なぜ、ろうそくの炎は同期するのだろうか。私たちは、ろうそくの炎が同期するメカニズムの解明を目標に、空気の揺れが同期に影響しているという仮説を立て、仮説の検証を試みた。



## 2. 実験手順

実験①ろうそく（φ6mm）を2本用意し、ろうそくの間隔（ろうそくの芯と芯との距離）を変化させ同期が起きるのかを調べた。

ろうそくの間隔は10mm, 11mm, 12mm, 13mm, 14mm, 15mm, 16mm で実験を行った。

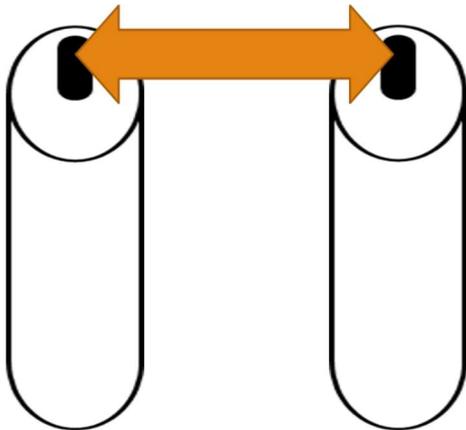


図2 実験①のイメージ図

実験②シュリーレン法を使ってろうそく（φ6mm）1本が燃えているときの周りの空気の様子と同期しているろうそく（φ6mm）2本の周りの空気の様子をカメラで撮影した。シュリーレン法とは、透明体の中に屈折率の異なる部分があるとき、光の進行方向の変化を利用してその部分が明確に見えるようにする光学的手法である。

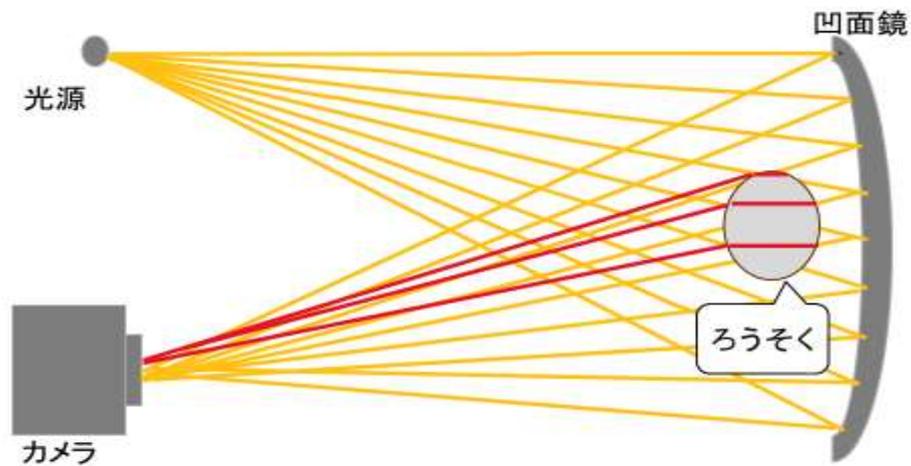


図3 シュリーレン法を用いた撮影のイメージ図

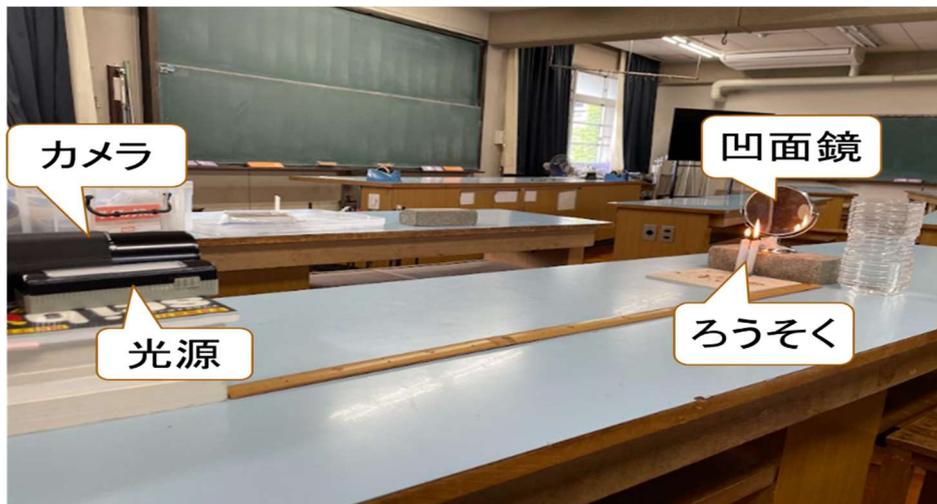


図4 実験②の様子

### 3. 実験結果

実験①2本のろうそく（φ6mm）の間隔が14mm以内であれば同期した。

ろうそくの間隔	10mm	11mm	12mm	13mm	14mm	15mm	16mm
○…同期した							
×…同期しなかった	○	○	○	○	○	×	×

実験②シュリーレン法によって同期中の2本のろうそくと1本のろうそくが燃えているときの周りの空気を撮影すると、どちらも空気の揺れが見られたが、1本より同期中の方が空気の揺れが明らかに大きかった。

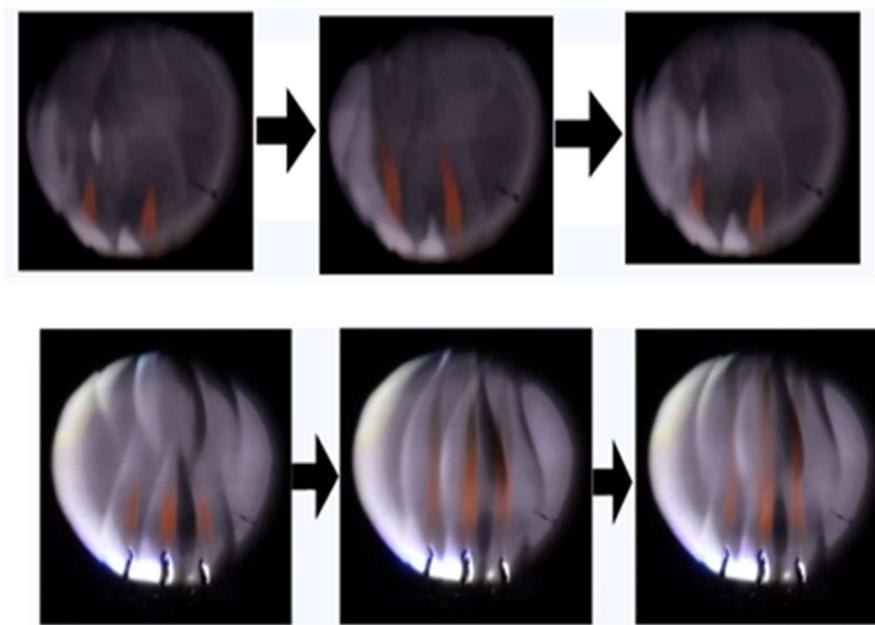


図5 シュリーレン法で撮影したろうそくの様子（上は1本、下は2本）

\*ろうそくが上では2本、下では3本燃えているように見えるのは凹面鏡に映された像も撮影してしまっているため

#### 4. 考察

ろうそくは1本で燃えている時も周りの空気が揺れていることから、ろうそく2本のそれぞれの周りの空気の揺れのタイミングが一致することで、同期が起こると考えられる。このことから、実験①においてろうそくの間隔が15 mm以上離れると、空気の揺れが減衰することでもう一方のろうそくに揺れが伝わらず、同期しなかったと考えられる。

#### 5. 結論

ろうそくの炎の同期現象を、シュリーレン法による空気の様子を観察し、空気の揺れがろうそくの同期に影響していることが明らかになった。

# ガウス加速器

## 1. 緒言

ガウス加速器とは、磁石と鉄球を使い、加速器に衝突する鉄球(衝突球)よりも速い速度で鉄球(発射球)を射出させる装置である。これは、衝突球が加速器の磁石に引き付けられて加速し、大きくなった運動エネルギーが発射球に伝えられる仕組みである。



中学生の頃に、ガウス加速器を扱い、磁石の個数を増やすと速度が速くなっているように感じられた。しかしあくまで感覚でしかなかったので、この研究で実際に確かめてみようと考えた。

本報告ではガウス加速器自体の個数や、加速器を構成する磁石の個数を変えて発射球の速度を測定した。

## 2. 実験手順

ネオジム磁石球と鉄球(それぞれ直径 1.5cm)とプラスチック製のレール(幅)、速度計(ナリカ製ビースピV)を用意した。

なお、この研究では、衝突球に初速度は与えず、磁石によって自然に加速される。衝突球とガウス加速器までの距離は 10cm、加速器から速度計までの距離は 10cm に固定する(図 I)。また、磁石 1 個、鉄球 3 個で作成したガウス加速器を基準の加速器とする。

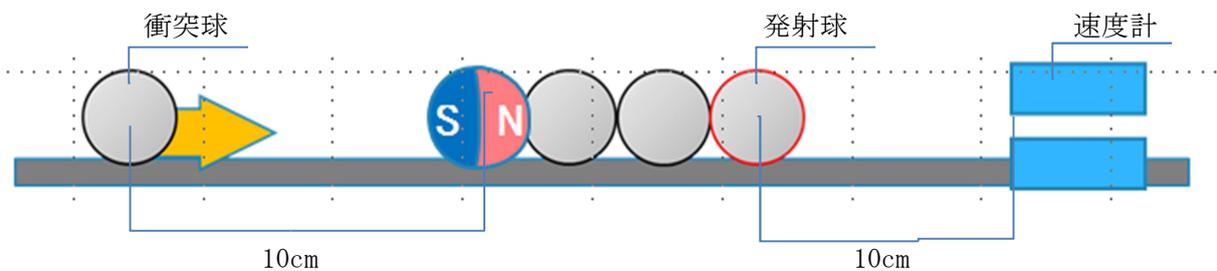


図 I

**実験①** この実験では、加速器自体の個数と発射球の速度の相関を調べるために、加速器の個数が 1 個～7 個の場合でそれぞれ 25 回ずつ速度を測定した。なお、加速器同士の間隔は 10cm とした。

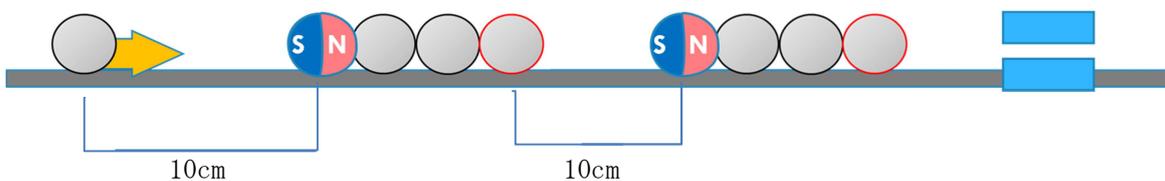


図 II 例 加速器 2 個

実験② この実験では、加速器 1 個あたりの磁石の個数と発射球の速度の相関を調べるために、加速器 1 個あたりの磁石の個数が 1 個～7 個の場合でそれぞれ 25 回ずつ速度を測定した。



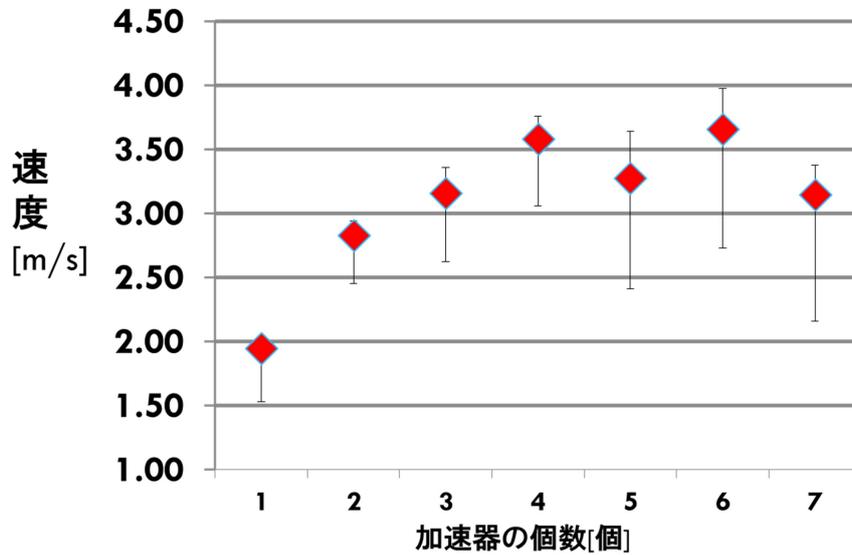
図Ⅲ 例 磁石 2 個

### 3. 実験結果

結果① 実験①の結果は、以下の表①、図①の通りである。

加速器の個数[個]	1	2	3	4	5	6	7
速度平均[m/s]	1.94	2.83	3.15	3.58	3.27	3.65	3.14

表① 実験①の結果



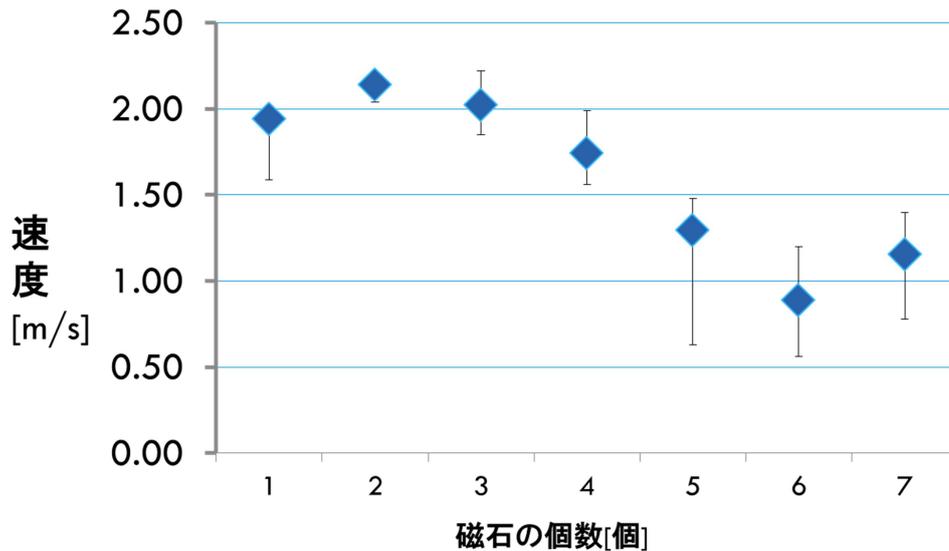
図① 実験①の結果

実験①から、加速器の個数が 1 個～4 個の時は個数が多くなるほど、発射球の速度が大きくなり 6 個の時に最速となった。

結果② 実験②の結果は、以下の表②、図②の通りである。

磁石の個数[個]	1	2	3	4	5	6	7
速度平均[m/s]	1.94	2.14	2.02	1.74	1.30	0.89	1.15

表② 実験②の結果



図② 実験②の結果

実験②から、磁石の個数が2個の時に、最速となった。

#### 4. 考察

実験①で、ガウス加速器を6個より多くしても発射球の速度が大きくならなかったのは、ガウス加速器による加速と摩擦による減速が打消しあったためと考えられる。

実験②で、磁石の個数を2個より多くしても発射球の速度が大きくならなかったのは、磁石や鉄球の接触面のわずかな隙間で衝突が起き、運動エネルギーが失われたためと考えられる。

#### 5. 結論

実験①、②より、磁石の個数を2個にした加速器を6個並べたときに、発射球の速度が最大になる。

## 6. 参考文献

西村浩隆、加藤徹也 科学教育における「工学設計の過程」を導入したものづくりに関する研究  
—ガウス加速器を題材とした小学校教員養成課程学生対象の教育試行実践—

日本科学教育学会研究会研究報告 Vol. 30 No. 5 (2016)

牧原義一・杉本佳隆、ガウス加速器における仕事とエネルギーの測定、三重大学教育学部研究機  
構 第 63 卷 自然科学 (2012) 1 - 5 頁

# 広角 VR をつくる

## 1. 緒言

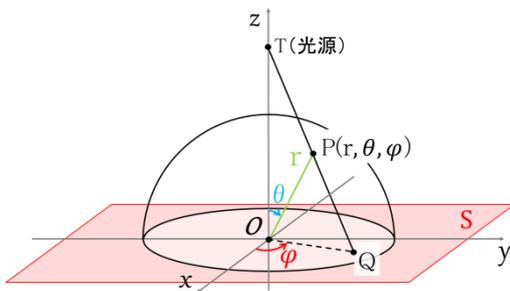
今ある VR(バーチャルリアリティ) の視野角の小ささに不満を感じ、より視野角の広い VR を作ろうと考えた。そのために半球スクリーンに映像を映し出すことで現実に近い視覚を再現しようと考えたため、魚眼レンズの写真を投影したときのスクリーンでの歪みの補正について考えた。

## 2. 実験手段

- ①どのように歪んでいるのかを調べるために歪みを幾何学的計算で関数化する
- ②その関数が正しいかを、その関数を基に作った図形を実際に投影することで調べる
- ③その関数をもとに画像を編集するプログラムを考えた

## 3. 実験結果

①



$r$  (m) : 半球の半径  
 $k$  : 半球の半径と点  $O$  から光源までの距離の率  
 $\theta$  (rad) : 点  $P$  の  $z$  軸に対する偏角

図 1. 球面座標系内の点  $P$  について

3次元空間における直交座標系  $(x, y, z)$  について考える

ここで原点を中心とする半径  $r$  の球面(\*)

(\*球面上の点  $P$  の位置ベクトル  $\vec{p}$  について  $|\vec{p}| = r$  を満たす)

の  $z \geq 0$  の部分を半球型のスクリーンに見立てる

また、 $z$  軸上に光源に見立てた点  $T$  を  $z > r$  とする

直線  $TP$  の  $x$ - $y$  平面と交わる点を点  $Q$  と定め、この点の位置ベクトル  $\vec{q}$  について  $|\vec{q}|$  を求める

$z$  軸及び点  $P$ 、点  $Q$  を含む原点を基準とする座標平面  $\alpha$  ( $d, z$ ) について考えると、

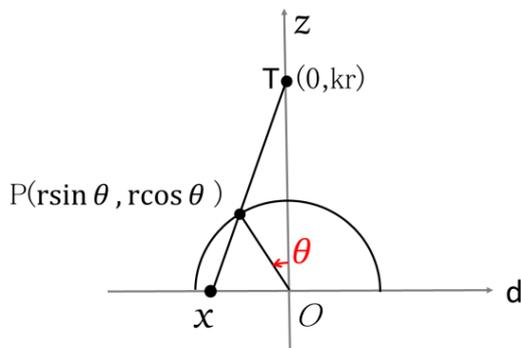


図 2 のように表せる

このとき、平面  $\alpha$  において直線  $TP$  の式は

$$z = \frac{-kr + r \cos \theta}{-0 + r \sin \theta} d + kr = -\frac{k - \cos \theta}{\sin \theta} d + kr$$

と表せる

$Q(|\vec{q}|, 0)$  を代入して

$$0 = -\frac{k - \cos \theta}{\sin \theta} |\vec{q}| + kr$$

図 2. 平面  $\alpha$  の様子

これを整理して、 $|\vec{q}| = \frac{kr \sin \theta}{k - \cos \theta}$

歪みを表す関数はこのような角度の関数になることが分かった

②

Excel を使用し、①で求めた関数に  $\theta = 5, 10, 15, \dots$  を代入する

X=の列が $|\vec{q}|$ の値を表している

定数	r=	l=	$\theta(1)=$		
値	15	55	5		
関数	k=	$\Delta d=$	rad $\theta(1)=$	Max(n)	Max(x)
結果	4.6666667	1.3073361	0.0872665	15	15.339643
n=	$\theta(n)=$	rad $\theta(n)=$	x=		
1	5	0.0872665	1.6621574		
2	10	0.1745329	3.3014227		
3	15	0.2617994	4.8959963		
4	20	0.3490659	6.4238199		
5	25	0.4363323	7.8671423		
6	30	0.5235988	9.2089723		
7	35	0.6108652	10.435399		
8	40	0.6981317	11.535373		
9	45	0.7853982	12.500752		
10	50	0.8726646	13.326223		
11	55	0.9599311	14.009132		
12	60	1.0471976	14.549227		
13	65	1.134464	14.948356		
14	70	1.2217305	15.210141		
15	75	1.3089969	15.339643		
16	80	1.3962634	15.343036		
17	85	1.4835299	15.227309		
18	90	1.5707963	15		

図 3. Excel の様子

その値を半径とした円の集合の図形 (図 4) を作り、半球型のスクリーンに投影した

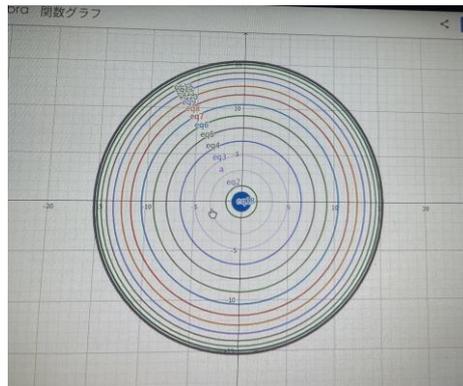


図 4

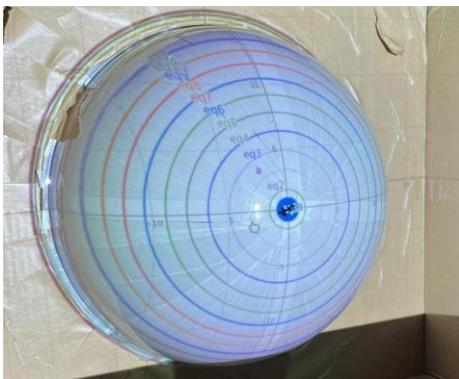


図 5. 投影した様子

図 5 を見ると、半球型のスクリーン上に等間隔に円が並んでいるため、関数が正しかったといえる

③

本研究の都合 (後で記述) 上、魚眼レンズで撮影した画像の性質について考える

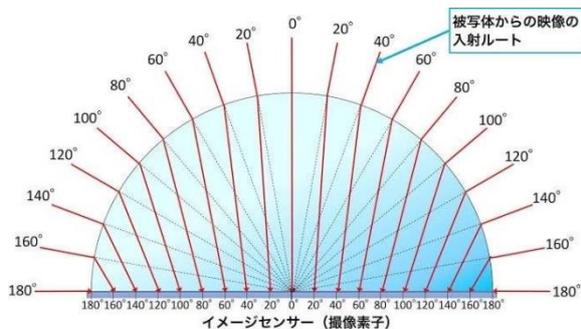


図 6 のように魚眼レンズで撮影した画像平面において、入射角に中心からの距離が比例する性質がある

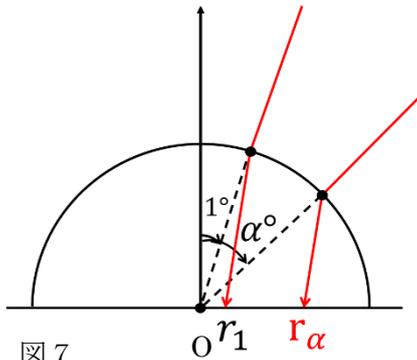


図 7

以下、赤い線が光路を表している

$\theta = 1^\circ$ における中心  $O$  から距離を  $r_1$  とすると、

$\theta = \alpha^\circ$ における中心  $O$  からの距離  $r_\alpha$  は、

魚眼レンズの性質より  $\alpha$  に比例するため、

$$r_\alpha = \alpha r_1$$

したがって

$$\alpha = \frac{r_\alpha}{r_1} \dots 1$$

求めたい移動後の点を  $r'_\alpha$  とすると、①で求めた式より、

$$r'_\alpha = \frac{kr \sin \alpha^\circ}{k - \cos \alpha^\circ}$$

これに 1 を代入して

$$r'_\alpha = \frac{kr \sin \frac{r_\alpha}{r_1}}{k - \cos \frac{r_\alpha}{r_1}}$$

この内容をプログラムに書き起こす

opencv を用いて以下のプログラムを書いた

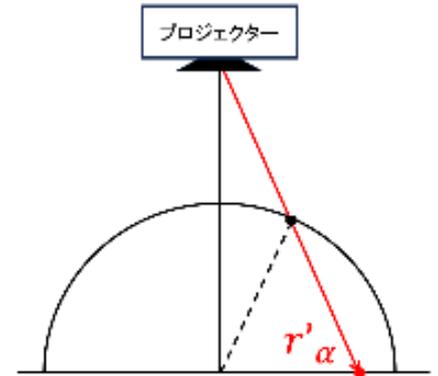


図 8

```

# 画像の読み込み
pass0 = '/content/drive/MyDrive/510685029174083843.jpg'
img = cv2.imread(pass0)
size = img.shape
# [0, 偶数]の正方形にトリミング
if (size[0] % 2 == 1):
    adjustment = 1 # 奇数なら1引く
else:
    adjustment = 0 # 偶数なら0引く
if (size[0] <= size[1]):
    img1 = img[0 : size[0] - adjustment, math.ceil(size[1]/2 - size[0]/2) : math.ceil(size[1]/2 + size[0]/2) - adjustment]
else:
    img1 = img[math.ceil(size[0]/2 - size[1]/2) : math.ceil(size[0]/2 + size[1]/2) - adjustment, 0 : size[1] - adjustment]
# 正方形にできなかった時
if (img1.shape[0] != img1.shape[1]):
    print("正方形でないerror")

# 画像の長さを取得
len = img1.shape[0]
# 画像の画素を保存
pixel = [[0 for i in range(len)] for j in range(len)]
for i in range(len):
    for j in range(len):

```

```

# 画像の長さを取得
len = img1.shape[0]
# 画像の画素を保存
pixel = [[0 for i in range(len)] for j in range(len)]
for i in range(len):
    for j in range(len):
        pixel[i][j] = img1[i, j]
# 新たなキャンパスの作成
img2 = img1.copy()
img2[:, :, 0] = 255
img2[:, :, 1] = 255
img2[:, :, 2] = 255

# 定数の設定
k = 4.66
l = (len/2)/70
R = (l * (k - np.cos(np.pi / 180))) / (k * np.sin(np.pi / 180))
center = int(len/2)
# 新しいrを計算する関数
def calculate_new_r(n, k, R):
    return k * R * np.sin(n * np.pi / 180) / (k - np.cos(n * np.pi / 180))

for i in (range(0, int(len/2))):

```

```

[] for i in (range (0, int(len/2))):
    for j in range (len):
        if ((j - center)**2 + (i - center)**2) <= (center)**2:
            # 中心からの距離と偏角を計算
            dx = j - center
            dy = i - center
            r = np.sqrt(dx**2 + dy**2)
            theta = np.degrees(np.arctan2(dy, dx))

            # 元のrをlで割ってnを計算
            n = r / l

            # 新しいrを計算
            new_r = calculate_new_r(n, k, R)
            # 新しい極座標から直交座標に変換
            x = int(center + new_r * np.cos(np.radians(theta)))
            y = int(center + new_r * np.sin(np.radians(theta)))
            img2[x][y]=pixel[j][i]

max_y=0#移動後の円の最も低い位置
for i in reversed(range (int(len/2), len)):
    for j in range (len):
        if ((j - center)**2 + (i - center)**2) <= (center)**2:

```

```

[] max_y=0#移動後の円の最も低い位置
for i in reversed(range (int(len/2), len)):
    for j in range (len):
        if ((j - center)**2 + (i - center)**2) <= (center)**2:
            # 中心からの距離と偏角を計算
            dx = j - center
            dy = i - center
            r = np.sqrt(dx**2 + dy**2)
            theta = np.degrees(np.arctan2(dy, dx))

            # 元のrをlで割ってnを計算
            n = r / l

            # 新しいrを計算
            new_r = calculate_new_r(n, k, R)
            # 新しい極座標から直交座標に変換
            x = int(center + new_r * np.cos(np.radians(theta)))
            y = int(center + new_r * np.sin(np.radians(theta)))
            img2[x][y]=pixel[j][i]
            if(max_y<y):
                max_y=y
img2 = cv2.circle(img2, (center,center),max_y - center , (255, 255, 255), 5, lineType=cv2.LINE_AA)
cv2.imshow(img2)

```

投影したい画像をプログラムに通した後、投影する

このとき、投影する画像は 360 度の情報を持っている必要がある… (魚眼レンズを用いる理由)



図 9. 図 10 をプログラムに通す前

図 10



図 11. 投影した様子

球面上に現実世界のような三次元空間内での視界を再現することができた。一方で画像の端がぼやけていたり、画像の解像度がスクリーンに写したときに落ちたりもした。

#### 4. 考察

画像の解像度が落ちた原因として、半球型のスクリーンの端に行くほど光源からの距離が遠くなり、画像の拡大率が上がってしまったことが挙げられる。その対策として、複数のプロジェクターで多方向から投射することが考えられる。

また、球の奥行きを変えても正射影の面積は変わらないため、より体積を小さくできるので本研究に適していると考えられる。

#### 5. 結論

球面に歪みなく画像を投影することで、視野角の広い VR を作ることができた。

#### 6. 参考文献

[魚眼レンズってどういう仕組み？レンズの特徴と使い方 | FOTORIA 出張撮影](#)

# Micro:bit で歩数計を作ろう

## 1. 目的

私達は身近にあるスマートフォンの歩数計や市販の歩数計の歩数を数える仕組みに興味を抱きました。そこで歩数計の仕組みを調べたところ、加速度センサー（様々な種類がある）で測定した加速度を応用してプログラミングし、歩数を数えていることが分かりました。しかし、加速度とプログラミングをどのように活用しているかが分からなかったため、その活用方法を自分たちで考えて実際に歩数計を作ってみようと思いました。

そこで（実際に歩いた歩数）= a、（作った歩数計の数えた歩数）= b、

$s = (a - b) / b$  とすると、この s の値は歩数計の誤差の割合に相当するため、s が 0 に近い、すなわち b が a に近いほど、実際に歩いた歩数に対して正確な歩数計だということがいえます。

市販の歩数計で計ると s は、 $-0.03 \leq s \leq 0.03$  となり、まず目標として、

$-0.05 \leq s \leq 0.05$  ①となる方法を見つけることを目的としました。

また歩数計を作るにあたって、歩数の計測とプログラミングが簡単になるように、プログラミング可能な小型コンピューターの micro:bit を使用しました。

## 2. 前提条件、仮定、実験手順

・ micro:bit の内部の加速度センサーは piezo 抵抗式の加速度センサーが使われていると仮定します。

piezo 抵抗式…加速度センサーの種類の一つです。

加速度センサーの中心に球があり、  
上下左右前後にバネがついています。（図 1）  
球の位置で加速度を検知しています。

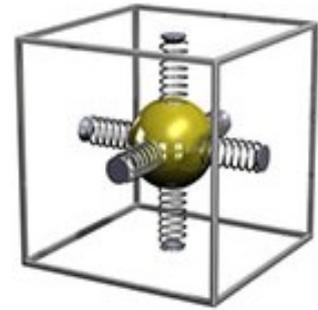


図 1 piezo 抵抗式の加速度センサー

・ micro:bit は図 2 のようにつけると、鉛直下向きが x 軸の正の向き、水平前方向が y 軸の正の方向、水平右方向が z 軸の正の方向です。

・ micro:bit は加速度を計測し、ある時刻の加速度をパソコンに有線で接続すると、パソコン上に記録することができます。

・ 市販の歩数計は段差があっても歩数を計測できるため、鉛直方向すなわち x 軸方向の加速度の値を応用することにしました。



図 2 micro:bit を右足につけた図

・ 加速度を 2 つの micro:bit を無線で繋いで歩いている時の加速度を計測したところ、表 1 のようになりました。表 1 より micro:bit は一定の時間間隔で加速度を計測していないことが分かりました。そこで私たちは micro:bit が加速度を 25 ミリ秒に 1 回計測していると仮定して研究を進めました。

表 1

時間[s]	加速度[cm/s <sup>2</sup> ]	時間間隔[s]
0. 1 2 9	8 9 2	
0. 1 5 8	8 8 8	0. 0 2 5
0. 1 7 8	8 8 4	0. 0 2 4
0. 2 0 1	8 8 8	0. 0 2 3
0. 2 2 7	8 8 4	0. 0 2 6
0. 2 4 9	8 9 2	0. 0 2 2
0. 2 9 8	8 9 2	0. 0 2 1
0. 3 2 1	8 8 8	0. 0 2 3
0. 3 4 5	8 9 2	0. 0 2 4
0. 3 7 1	8 8 8	0. 0 2 6
0. 3 9 7	8 9 2	0. 0 2 6
0. 4 1 8	8 8 4	0. 0 2 1
0. 4 4 6	8 9 2	0. 0 2 8

- ・まず平坦な道を歩いた時の s が①を満たすような仕組みを考え、その仕組みに曲がった時や段差を上り下りした時の歩数を数えるプログラミングをつけ加えていく計画で研究を進めました。
- ・実際に自分たちで歩数計を作るため、その仕組みを何通りか考えました。

### 3. 実験内容

平坦でまっすぐ歩いて壁にぶつからないほど十分に長さのある廊下をまっすぐ10歩歩きました。

### 4. 実験結果

X軸方向の加速度の推移は図3のようになりました。なお、何度か加速度を計測して図3とグラフの形が類似していたため、このグラフを用いて、以降説明します。

### 5. 考察①

図3よりグラフの似た形(図3

の点線で囲まれた部分)が5つ見られたため、この形が1つ見られると実際に2歩歩いたと考えられます。

またこの点線で囲まれた部分1つの概形は図4のようになると考えられます。

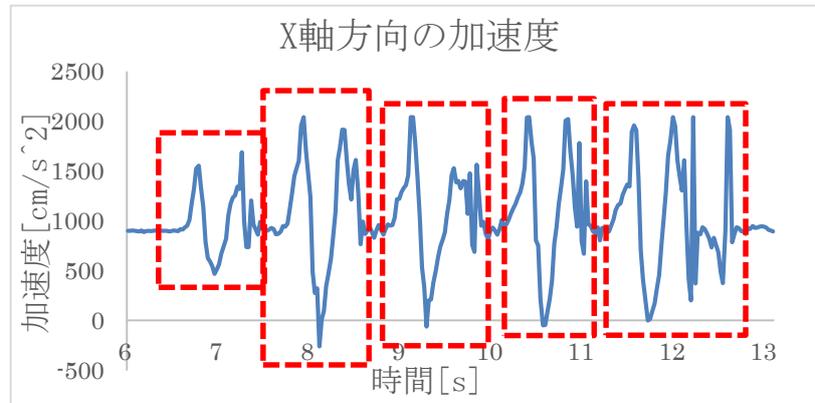


図3 x軸方向の加速度の推移



図4 x軸方向の加速度のグラフの概形

## 6. 考察②

2歩歩いた時にグラフが図4のように変化するため、micro:bitが歩数を数えるためには図4のように加速度が変化したら歩数を2加えるプログラムが必要です。そこでこのグラフの概形と右足の動きを対応させて、micro:bitが1歩を認識できるようなプログラムを考えます。

micro:bitの加速度センサーがピエゾ抵抗式のものである、という仮定と加速度センサーの中心の球にかかる慣性力を考慮した結果、図5のような対応関係になると考えられます。

図5から加速度の値が約2000になってから約500になった時に2歩数えるというプログラムを考えました。

その結果、sは何回か試しておよそ $-0.20 \leq s \leq 0.20$ になりました。したがって、このプログラムは目的には不適だと考えられます。

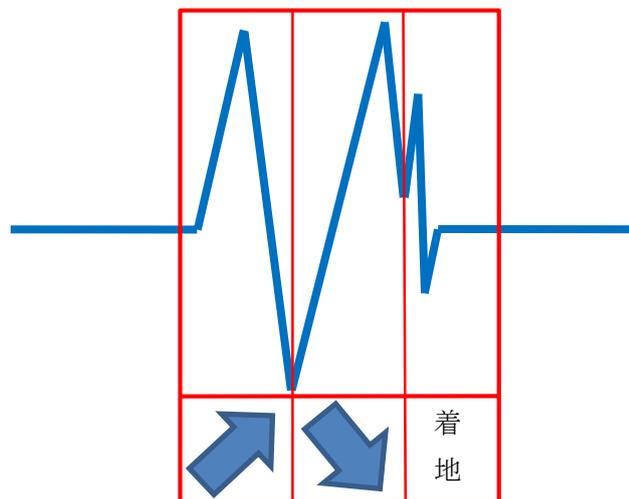


図5 x軸方向の加速度と右足の動きの対応

## 7. 考察③

加速度を積分して速度を考えました。加速度のグラフを関数化することはできなかったため、区分求積法で考えました。ある時刻における隣接する20個のx軸方向の加速度の値で積分を求めます。長方形の横幅は0.025で、縦幅は各加速度の値です。隣接する20個のうち、最初の1個目の加速度が

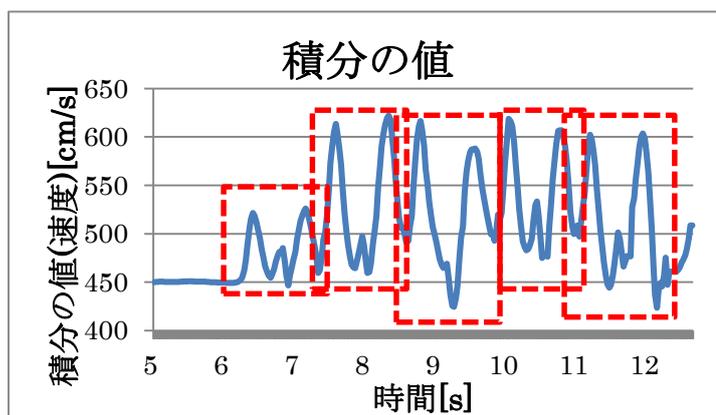


図6 隣接する20個のx軸方向の加速度を使って区分求積法で求めた積分の値の推移  
検知された時刻をx1、求めた積分の値をy1として、点(x1, y1)の軌跡を座標平面上に入力し、点同士を直線で結びました。その結果が図6です。図3と同様に、図6は似たような形が5つ見られます(点線で囲まれた部分)。よって考察①と同様に考えると点線で囲まれた部分1つが2歩分に相当すると考えられます。この部分を見ると、積分の値が600から500に下がって再び600以上に戻る、という流れが1秒以内に行われていることが分かります。しかし、そもそもこの積分の値は区分求積法で求めたもので、時間間隔も0.025秒と仮定しているため、実際の速度からずれている可能性があり、この方法から変えることにしました。

### 8. 考察④

加速度の分散を考えます。考察③の積分の各値と同様に隣接する20個の加速度の値を用いて分散の値を求めました。その結果が図7です。図7は図3と同様、似た形が5つあります(点線で囲まれた部分)。よって考察①と同様に考えるとこの点線で囲まれた部分1つは2歩分に相当すると考えられます。

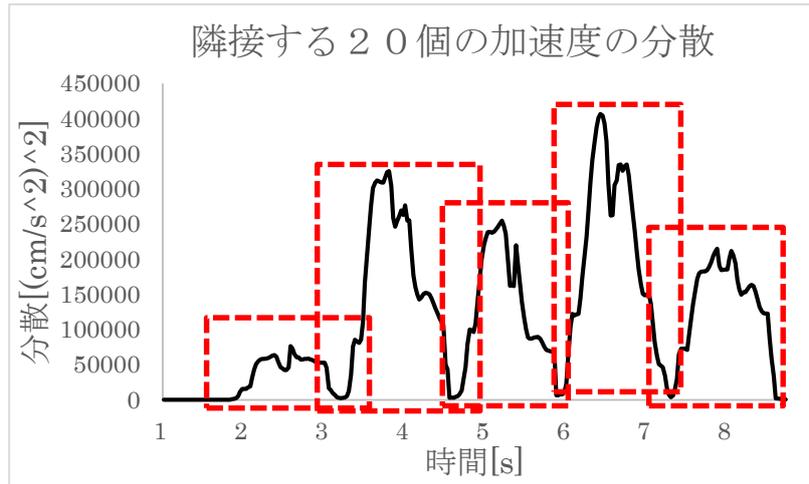


図7 隣接する20個のx軸方向の加速度を使って求めた分散の値の推移したがって、図7のグラフより分散の値が250000以上になった時に歩数を2歩数えるというプログラムを考えました。そのプログラムでsを求めたところ、 $-0.05 \leq s \leq 0.05$ となりました。

### 9. 結論

考察①、②、③、④より、分散を使うと $-0.05 \leq s \leq 0.05$ とすることが出来ました。したがって、sを $-0.03 \leq s \leq 0.03$ にするには分散の値を250000以上から275000以上にする、歩数を数えてから何ミリ秒か一時停止してから条件を満たした時に歩数を数える、などの歩数を数える条件を狭めたらよいと考えられます。

# 倒立振子で AI の行動分析

## 1. 緒言

ほうきを手のひらに乗せてほうきを直立させる遊びから、コンピューターが PC 上で同じようにバランスを取れるのかどうか考えた。そこで、AI に学習させて出来るのか検証し、その遊び(倒立振子問題)の学習から、どのように AI が学習しているのかを研究した。

## 2. 実験手順

倒立振子問題とは、重心が支点より高い位置にある振子を台を動かし棒が直立するように AI に学習させることである。

図 1 のようなラグランジュの運動方程式が用いられている仮想環境を用いて学習させた。

$X$ : 台の位置  $V$ : 台の速度  $\theta$ : 棒の角度  $\omega$ : 棒の角速度  
の 4 つの情報 (パラメータ) で倒立振子の制御を行う。

また、ラグランジュの運動方程式は

$L$ : ラグランジアン,  $T$ : 運動エネルギー,  $V$ : ポテンシャルエネルギー、  
 $\theta$ : 振子の角度,  $\dot{\theta}$ : 角速度,  $g$ : 重力加速度 とすると、

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad V = mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{となり}$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{となる。}$$

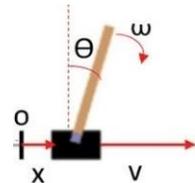


図 1 台車上の倒立振子



図 2 ある一定の傾斜を与えた場合

- ① 4 つのパラメータを乱数で初期値として設定。
- ②  $\theta$  が  $\pm 12^\circ$  以内で傾くと速度  $V$  の値を変化させて台を動かし、 $X$  は  $\pm 2.4$  の範囲内で動作させる。(  $\theta$  または  $X$  が範囲外になったら①に戻る)
- ①と②を繰り返すことで棒を直立させるための最適な動き方を AI が学習していく。

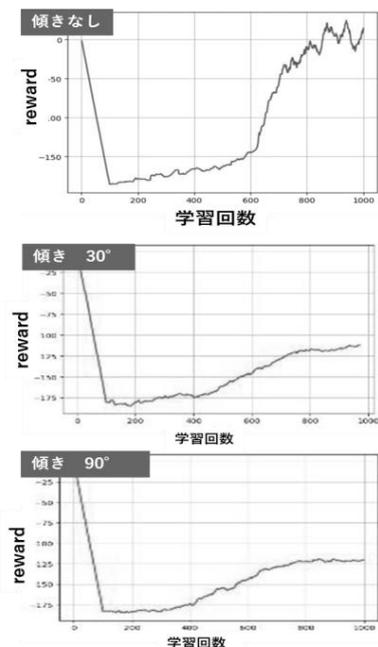
この学習を評価する値としては、reward というものを用いた。

reward とは元々 -200 の数が与えられており、AI の一度の動作で①の範囲内であれば +1 を与える。そしてそれを 200 回繰り返させ、200 回目のときの reward の値を学習回数一回分の reward とする。すなわち、学習によって倒立ができていれば reward の値が高く、できていなければ低くなる。

今回は複雑な条件として台が動く平面に傾斜を加えた (図 2)。傾斜に関しては、傾斜を考慮した倒立振子にはたらく重力を定義し、上記のラグランジュ運動方程式に適応させた。

そして、傾斜を加えた時と加えない時を比較して、AI の分析を行う。

### 3. 実験結果



傾斜を加えた時と加えない時を比較すると、傾きを与えた時のほうが reward は低くなっているが、傾きの大きさ（条件の厳しさ）での reward の推移に大きな差はない。

### 4. 考察

傾斜をつけると学習が上手くいかなく、傾斜の値が何であっても学習結果はほぼ変わらない。また、試行回数がどの場合でも約 600 回まではほとんど同じ reward の動き方であることから、AI は初めは棒の動き方を学習し、その後傾斜を考慮して棒が直立するように学習していると考察した。

### 5. 結論

学習の仕方は学習回数の量だけでなく、用いられる式や情報の複雑化により変化するとわかった。また、結果のグラフから学習回数が 600 までは傾斜の有無に関係なく同じ reward の取り方をしていたと考えられる。よって、学習の際には与えられた課題に対して大まかな部分(今回は棒の動き方のみ)を学習した後、複雑な条件(今回は傾きという条件)も加味して学習しているのではないと考えた。