大手前数リンピック　第一集

大阪府立大手前高等学校

まえがき

平成 20 年（2008 年）4 月に大手前高校は文部科学省により，スーパーサイエンスハイスクール（SSH）の指定を受けました。SSH 事業では，その一環としてプレ・サイエンス探究のとりくみを実施しています。

この冊子は，平成 19 年度（2007 年度）および平成 20 年度（2008 年度）の 2 年間，大手前高校で実施した「大手前数リンピック」に応募してきた生徒の皆さんの解答例と，それに対する講評とをまとめたものです。「大手前数リンピック」の問題は，世界各地で行われている数学コンテストの問題などの中から選びました。

毎回，応募者の答案には優れたものが多く，提出された答案に若干の表現上の手直しをしただけで講評としたこともしばしばでした。それらの中には，その一問を解くためだけに用いられた特殊な考えかたというよりも，むしろ，数学の問題を考える上で広く用いられる一般性の高い考え方といえるものが数多く含まれています。そこで，これらの問題と講評をまとめて読めるようにすることに意味があると考え，「大手前数リンピック　第一集」を編むことにしました。

解答例と講評を読む前に自分で考える楽しみを味わいたいという人のために，第一章には問題だけを集めました。第二章に，改めて問題と講評をまとめています。ぜひ，まずは自分で考えてみて，その後に解答例と講評を読んでください。

この冊子がこれからの若い人たちの数学へのとりくみに役立つことを願っています。

問題の出典

使用した問題は，世界各地で行われている数学コンテストの問題を，以下の文献・ウェブサイトから入手したもの（改題したものを含む），および一部国内の大学入試問題の中から選びました。

[1] 数学オリンピック財団編「数学オリンピック 1990〜1994」，日本評論社（1995）．

[2] T.Andreescu and Z.Feng, *eds.*, *Mathematical Olympiads Problems and Solutions From Around the World 1998-1999*, The Mathematical Association of America（2000）．

[3] G．ポーヤ「自然科学における数学的方法」シュプリンガー数学リーディングス，シュプリンガー・ジャパン（2007）．

[4] 公庄庸三「清風高校数学オリンピック」，清風学園紀要（抜刷）（1994）．

[5] 深川久「土曜講座『豊中高校数学セミナー 2003』実践報告」，大阪高等学校数学教育会会誌第 45 号（2004）．

[6] Oklahoma State University High School Math Contest
http://www.math.okstate.edu/hsc/

[7] INPUI/Rouche Diagnostics High School Math Contest
http://www.math.iupui.edu/news/contest/

[8] The Harvard-MIT Mathematics Tournament
http://web.mit.edu/hmmt/www/

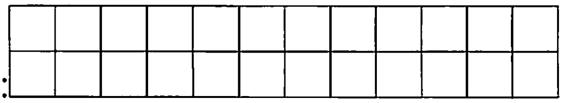
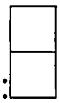
[9] Stanford Math Tournament
http://sumo.stanford.edu/smt/

[10] The Rice University Mathematics Tournament
http://www.ruf.rice.edu/ eulers/RMT.html

目 次

第1章　問題編

問題1 下図のような 2×12 の長方形Aに，1×2 の長方形Bを12個詰め込むとき，その詰め込み方は何通りあるでしょうか。ここで，長方形Bは縦向き・横向きどちらの向きで詰め込んでもよいものとします。

長方形A:  ，長方形B: 

問題2 A，Bの2人が次のようなゲームをした。2人が交互に1以上6以下の数をひとつ自分で選ぶ。1つの数が選ばれるたびに，それまでに選ばれた数の合計が計算される。合計がちょうど22になるような数を選んだ方の勝ちとなる。たとえば，

Aが2を選んだ。合計は2
Bが6を選んだ。合計は8
Aが3を選んだ。合計は11
Bが6を選んだ。合計は17
Aが5を選んだ。合計は22　よってAの勝ち。

Aが先手とするとき，Aの必勝戦略が存在すること，すなわち，先に数を選んだ方が必ず勝てることを示せ。また，必ず勝つためには，最初にAはどの数を選ばなければならないか。

問題3 図の配列の中にある25個の数から5個の数を選ぶ。このとき，図の配列において，その5個の数のどの2つも同じ行にはなく，またどの2つも同じ列にもないとき，このような5個の数の組を「良い5個組」と呼ぶことにする。たとえば，$\{1, 8, 10, 17, 25\}$ は良い5個組であり，$\{2, 6, 12, 20, 22\}$ は良い

5個組ではない。良い5個組のそれぞれについて，5個のうちの最大数が決まる。このとき，この最大数の，良い5個組全体にわたっての最小値を求めよ。

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

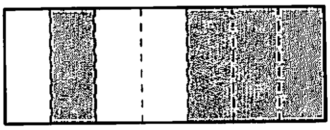
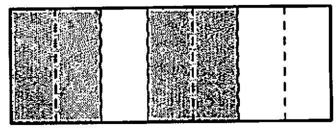
問題4 立方体の頂点にそれぞれ赤または緑の色を塗る。さらに，この立方体の各面の中心に次の規則にしたがって色を塗る：その面の4頂点のうち緑の頂点が奇数個であれば面の中心に緑を塗り，それ以外の場合には面の中心には赤を塗る。結局，14点に色が塗られる。このとき，赤い点の個数と緑の点の個数は決して同じ個数にはならないことを示せ。

問題5 大相撲で同じ勝星の力士がA，B，Cの3人いたので，優勝決定戦のともえ戦を行なうことになった。まずAとBとが対戦し，次には勝った方とCとが対戦する。同じ力士が2番続けて勝てば優勝となるが，もし1つ前に勝った力士が負ければ，そのときの勝者と1つ前に負けた力士とが対戦し，これを繰り返す。ただし，合計7戦してまだ優勝者が決まらないときには，そこで打ち切り優勝者なしとする。A，B，Cの3人ともが実力が同じで，どの対戦でも一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ ずつとするとき，第1回目に負けた力士が優勝する確率を求めよ。

問題6 3辺の長さが2，3，5の直方体がたくさんある。1辺の長さが90の立方体の中に，この直方体を同じ向きに，きちんと並べて，いっぱいになるまで積み重ねる。このとき，大きい立方体の1つの対角線が貫通する小さい直方体の個数を求めよ。

問題7 連続する n 個の枠を左から順に白と黒に塗り分けたものを，n 枠のバーコードという。黒く塗った枠の一続きをバーといい，白く塗った枠の一続きをスペースという。

下の図は，2個のスペースと2個のバーからなる7枠のバーコードのうち，(a) はスペースで始まる例であり，(b) はバーから始まる例を示している。

(a)  (b) 

(1) 7枠のバーコードを考える。このうち，2個のスペースと2個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数を求めよ。

(2) n 枠のバーコードを考える。k をうまく選んで，k 個のスペースと k 個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数が，100を超えるようにしたい。このことができる最小の n の値を求めよ。また，そのときの k の値を求めよ。

問題 8 半径1の球に内接する正12面体がある。この正12面体のすべての頂点間の距離の2乗の和を求めよ。

問題 9 正8面体の8つの面に1から8までの数を1回ずつ書いてさいころを作る。このようなさいころは何通りできるか。ただし，回転して数の配置が同じになるものは同じさいころとみなす。

問題 10 球面 S の5本の直径 $l_1, \cdots, l_5$ が与えられていて，これらの直径はどの3本も同一平面上にないものとする。直径 $l_1, \cdots, l_5$ のそれぞれからどちらかの端点を選ぶ。5個の端点の選び方32通りのうち，5点を含む半球面が存在するものは何通りあるか。

問題 11 20円以上の任意の値段分の切手は5円切手と6円切手の組み合わせとして買えることを示してください。

問題 12 トランプのダイヤのカード13枚をよく切った後，1枚ずつめくって机の上に左から右へ一列に並べてゆく。ただし，めくったカードがそのときの右端にあるカードより小さいときは，めくったカードは捨てる。並べ終わったとき，7が机の上の列に残っている確率を求めよ。

問題 13 白石180個と黒石181個の合わせて361個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

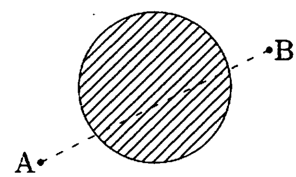
条件 その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

問題 14　一辺の長さが 1 の正方形 ABCD 内の任意の 2 点を P，Q とするとき，

$$AP + BP + PQ + CQ + DQ$$

の最小値を求めよ。

問題 15　右図は 2 つの町 A,B とその間にそびえる岩山（斜線部）を表している。今，町 A，B を直線道路で結べるように，岩山にトンネルを掘ることになった。岩山の A 側と B 側のそれぞれからトンネルを掘り進め，途中でぴったりトンネルが繋がるように，掘り進める方向を定めたい。ただし，A と B の一方から他方を直接見通す事はできず，したがって直接方向を定めることはできない。また，AB 間の距離を直接測ることもできない。平面上の 2 点を結ぶ線分が岩山にぶつからない場合に限り，その 2 点間の距離を直接測ることも，また一方から他方を見通す方角を直接決定することもできる。この条件のもとで次の方法を考え，説明せよ。



(1) 岩山の A 側および B 側のどの地点からどの方角へトンネルを掘り進めればよいかを決定する方法

(2) トンネルの長さを求める方法。

問題 16　N = 123456789 とする。N の各位に現れる数字のうち，1 と 4 を入れ替えると 423156789 となり，この数は 11 の倍数であることがわかる。この例のように，N の各位に現れる数字のうち，ちょうど 2 つを入れ替えてできる 11 の倍数を全部あげよ。

問題 17　ある王が遺書を金庫に保管した。王は，金庫にいくつかの錠前をとりつけ，それぞれの錠につき，その錠を開けることのできる鍵を複数作った。彼は，次の条件を満たすように 5 人の息子に鍵を分け与えたという。その条件

とは，5人のうち3人が揃えば（どの3人であっても）すべての錠を開けて金庫の中を見ることができるが，2人では（どの2人であっても）足りない鍵があって金庫の中を見ることができない，というものである。この条件を満たす為には，金庫に最低いくつの錠前を取り付けなければならないか。

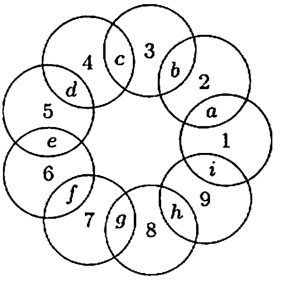
問題18 この問題のためだけに，減少数という用語を，2桁以上の整数でそれぞれの位の数字が左から右へと真に減少しているような数，と定義する。

(1) 3桁の減少数はいくつあるか。

(2) 減少数の桁数は最大何桁になりうるか。

(3) 減少数は全部でいくつあるか。

問題19 下図において、a,b,c,d,e,f,g,h,i は、1,2,3,4,5,6,7,8,9 の9つの数字を並べ替えたものである。9つの円それぞれの中に書いてある3つの数字を足すことにより、9つの和を得る。これら9つの和がすべて一致するとき、$a+d+g$ の値を求めてください。



問題20 立方体の各辺の中点のうち，少なくとも3個を通る平面は全部でいくつあるでしょうか。(1991年日本数学オリンピック予選からの出題)

問題21 ある国には、巨大な円周上に n 箇所の空港が配置されているという。ある年の元日，それぞれの空港にはただ1機だけ飛行機があった。その後毎日，国中の飛行機のうちちょうど2機が空港から飛び立ち，隣接する空港の一方へと移動するという。このとき，何日か後に，すべての飛行機がただ1つの空港に集まってくるというようなことは起こり得るだろうか? (IUPUI 2006年高校数学コンテストからの出題，IUPUIはインディアナ大学パデュー大学インディアナポリスの略称)

問題22 半径2の円板を半径1の円板7枚で覆うことができるということを，できるだけ明解に説明せよ。

問題 23 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とするとき，$\sqrt{2}$ をできるだけ次数の低い a の有理数係数多項式で表せ。（第4回日本数学オリンピック予選，1994年）

問題 24 4人の海賊が 2008 枚の金貨を分配することにした。4人の海賊には，一番偉い海賊から一番下っ端の海賊まで序列がついている。序列の高い海賊から順に，この金貨をそれぞれに何枚ずつ分けるかを提案し，そのときいる海賊の少なくとも半分が賛成すれば，その提案が実行されるものとする。もし，賛成者が半分よりも少なければ，提案した海賊は除外され，海賊の人数は1人減る。このとき，最上位の海賊は何枚の金貨を獲得することができるか。ただし，海賊は完全に論理的に考えることができると同時に，完全に利己的であるとする。すなわち，ある提案を拒否することによって自分がよりたくさんの金貨を得る可能性がある場合には，かならず提案を拒否する。

問題 25 △ABC の辺 AB，AC 上の点を D，E とし，BE，CD の交点を P とする。△ADE，△BPD，△CEP の面積がそれぞれ 5,8,3 のとき，△ABC の面積を求めよ。

問題 26 4桁の数を ABCD（ここで A は千の位の数，B は百の位の数，...）と表す。次の条件のうち少なくとも一つが成り立つとき,「特徴のある」自然数と呼ぶことにする。

(1) A, B, C, D がすべて偶数である。

(2) A, B, C, D がすべて奇数である。

(3) A > B > C > D

(4) A < B < C < D

(5) A = B = C = D

このとき,「特徴のある」4桁の自然数はいくつあるか。

問題 27 a, b, c を奇数とするとき，$ax^2+bx+c=0$ は有理数の解をもたないことを証明せよ。

問題 28 ある動物の集団では，集団に属する動物たちは必ず2頭または3頭でグループを作って行動するという。外からやってきてその集団に加わった新参の動物は，集団内のいずれかのグループを無作為に選んで加わる。もし選ん

だグループが2頭からなる場合，新参の1頭を加えて3頭でグループを作る。もし選んだグループが3頭からなる場合，新参の1頭を加えると4頭になるので，2頭ずつ2つのグループに分裂する。今，この動物5頭からなる集団があり，そこに1度に1頭ずつ順に新参の動物がやってきて集団に加わるとする。このとき，4番目にやってきた動物が2頭のグループを選ぶことになる確率はいくらか。

問題29 A，B，C，Dを平面上の4点とする。線分ABを直径とする円の周および内部を領域P，線分CDを直径とする円の周及び内部を領域Qとする。A，BはQに属さずC，DはPに属さない。このとき，線分ABと線分CDは共有点を持たないことを証明せよ。

問題30 ある病気の患者さんが治療のために入院すると，退院までに以下のような様々な医療行為等が必要であり，それぞれ下記の日数が必要である。

- 細菌検査（以下，作業Aとする） 3日
- X線画像検査 (B) 5日
- 内視鏡検査 (C) 1日
- 病床の準備 (D) 3日
- 手術および手術部での回復 (E) 2日
- 病床での回復 (F) 3日

当然，これらの作業をすべて同時に着手することはできない。ある作業は別の作業が完了していないと着手できない。以下にその前提を示す。

- A, Bは前提がなく，早速着手できる。
- C, DはAが完了していないと着手できない。
- EはB, Cが両方とも完了していないと着手できない。
- FはD, Eが両方とも完了していないと着手できない。

これらの前提を満たす限り，複数の作業を並行しておこなうことができる。休日はないものとする。入院は，朝おこなわれ，すぐに作業に着手できる。すべての作業が終了すれば，その日のうちに退院する。このとき，以下の質問に答えよ。(入院日を第1日目と数える。)

(1) 手術を開始することができるのは，最短で何日目か。

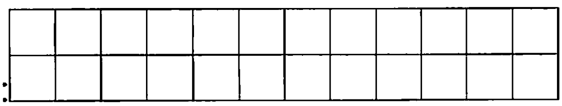
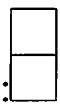
(2) 最短で，何日目に退院することができるか。

(3) 作業 C, E, F を短縮することはできないが，職員の採用によって A, B, D をどれか一つだけ，1 日短縮することができる。最短の入院日数を上記 (2) の解答より 1 日短縮するためには，どのようにすればよいか。

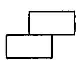
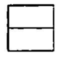
(4) 作業 B の所要日数を x $(3 \leqq x \leqq 5)$, 作業 D の所要日数を y $(3 \leqq y \leqq 5)$ とする。x, y はともに整数である。他の作業は上記のとおり固定とする。x, y の値によって，最短の入院日数がどのように変化するか，示せ。

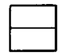
第2章　解答と講評編

問題1　下図のような 2×12 の長方形Aに，1×2 の長方形Bを12個詰め込むとき，その詰め込み方は何通りあるでしょうか。ここで，長方形Bは縦向き・横向きどちらの向きで詰め込んでもよいものとします。

長方形A:，長方形B:

講評1　今回は13名の提出がありました。このうち，正しい結果を導いていた人は以下の8人です：1組K君，S君，M君，2組Tさん，K君，Y君，3組Y君，7組N君。これら8人の正解者は，基本的に皆，同じ方針にもとづいています。ここでは，S君の答案に基づいて解いてみます。

> 長方形Bを横向きに使うとき，上段と下段でのようにずれた置き方をすると，この置き方をした2個のBより左側にある部分，および右側にある部分の升（ます）の個数がともに奇数になるため，Bをどのように置いてもAをちょうど覆うように詰めることはできない。したがって，長方形Bを使うときは必ずのように上下の位置が揃った形で使うことになる。このとき，長方形Aに長方形Bを詰め込む方法の数は，1×12 の長方形に□と▭を詰め込む方法の数に等しい。
> ▭の個数を n とすると，$0\leqq n\leqq 6$ であり，このとき□の個数は $12-2n$ である。これらの並べ方は，同じものを含む順列の考え方を用いて，
>
> $$\frac{(12-n)!}{n!(12-2n)!}\ (\text{通り}),\ 0\leqq n\leqq 6$$
>
> となる。したがって，求める場合の数は，
>
> $$\frac{12!}{0!12!}+\frac{11!}{1!10!}+\frac{10!}{2!8!}+\frac{9!}{3!6!}+\frac{8!}{4!4!}+\frac{7!}{5!2!}+\frac{6!}{6!0!}=233\ (\text{通り})$$

S君の解答の良いところは，Bの横向きの使い方が  しかないということの理由を明確に記述している点です。ほとんどの人は，これを当然のこととして説明抜きに述べて利用していました。奇数という言葉一つ出すだけで，不可能性が明確に表現できますね。なお，最後の計算式は，${}_{12}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{9}C_3 + {}_{8}C_4 + {}_{7}C_5 + {}_{6}C_6$ でもかまいません。

さて，最後に一つだけ要望します。与えられた問題が解けたら，次に，問題を一般化したり，少しだけ条件を変えたりして，自分で問題自体を発展させてみてください。この問題の場合，長方形Aを $2 \times n$ とすると詰め込み方は何通りになるでしょうか。ここで，n を1から順に $2, 3, 4, \ldots$ と変化させてみると，その結果として現れる数にはなにか規則性がないでしょうか。そこからまた様々に考えを発展させて，何か発見したらレポートにまとめて見せてください。また，この通信で紹介したいと思います。

問題2 A，Bの2人が次のようなゲームをした。2人が交互に1以上6以下の数をひとつ自分で選ぶ。1つの数が選ばれるたびに，それまでに選ばれた数の合計が計算される。合計がちょうど22になるような数を選んだ方の勝ちとなる。たとえば，

Aが2を選んだ。合計は2
Bが6を選んだ。合計は8
Aが3を選んだ。合計は11
Bが6を選んだ。合計は17
Aが5を選んだ。合計は22　よってAの勝ち。

Aが先手とするとき，Aの必勝戦略が存在すること，すなわち，先に数を選んだ方が必ず勝てることを示せ。また，必ず勝つためには，最初にAはどの数を選ばなければならないか。

講評2 今回は14名と1グループからの提出がありました。提出者はいずれも，Aが最初に1を選べば必ず勝てるという正しい結論に達していました。内訳は以下の通りです。1組：I君，K君，K君，K君，S君，S君，Y君，2組：Nさん，Y君，3組：T君，A君，Y君，7組：N君，8組：Cさん，そして「すーがく愛しすぎてる4人組!!♡」(7組H・H・N・K) さん。

解答は，大きく分けて3通りのタイプがありました。後ろからさかのぼるタイプ，前から後ろへと進めて行くタイプ，そして，いったん最初から最後まで

を見渡した上で，A が最初に選ぶべき数について考えているタイプです。これらについて，順に見て行きましょう。

一番多かったのが後ろからさかのぼるタイプでした。ここでは，8 組の C さんの解答を紹介します。

1 以上 6 以下の数を足して 22 になる数は，21，20，19，18，17，16 である。よって，A が数を選んだときの合計が 15 になれば B は合計を 16，17，18，19，20，21 のうちのどれかにしかできないので，A は勝つ。A が合計を 15 にするためには，それまでの合計が 14，13，12，11，10，9 である必要がある。B が合計をこれらの数にしかできないようにするには，その前の合計が 8 である必要がある。A が合計を 8 にするには，それまでの合計が 7，6，5，4，3，2 である必要がある。B が合計をこれらの数にしかできないようにするには，A は最初に 1 を選ぶ必要がある。 □

次に，前から後ろへ進めていくタイプの解答の代表として，3 組の Y 君の解答を紹介します。

最初に A が 1 を選ぶとする。次に B が a という数を選んだとすると，A は $a+l=7$ となるように l を選ぶようにする。次に B が b という数を選んだとすると，A は $b+m=7$ となるように m を選ぶようにする。次に B が c という数を選んだとすると，A は $c+n=7$ となるように n を選ぶようにする。ここで，

$$1+a+l+b+m+c+n=1+7+7+7=21$$

よって，A には必勝戦略が存在する。
また，必ず勝つためには，最初に 1 を選ばなければならない。 □

最後に，全体を見渡した後に最初に選ぶ数を指摘するタイプの解答の代表として，3 組の A 君の解答を紹介します。

まず，$22=1+7+7+7$ である。この 7 は，B がどの数字を選んでも A が (7 − B が選んだ数) を選ぶことでそのターンの合計を 7 にすることを表し，これだけが絶対に可能なことである。1 つのターンの (B が選んだ数) + (A が選んだ数) を 7 にして合計をちょうど 22 にするには，初めに A が 1 を選んでから (B が選んだ数) + (A が選んだ数) = 7 を 3 回繰り返す。これが，最初の等式の表している内容であり，A が初めに選ぶ数字は 1 である。 □

ここに掲載した答案は，それぞれのタイプの中でも読みやすく，解答者の考えがはっきりと伝わってくるものばかりです。もちろん，他にも良い答案はたくさんありました。

さて，ここで14名と1グループすべての答案に対して改善点を指摘します。それは，問題文の末尾「必ず勝つためには，最初にAはどの数を選ばなければならないか」に対する解答を，答案の中でもっと明確に打ち出したほうが良いという点です。いずれの答案も，「1を選べば勝てる」ことにはしっかりと理由を書いていましたが，「1を選ばなければならない，言い換えれば，1以外の数を選んでしまうとBが正しく応じれば負けてしまう」ことの理由が明確に記述されていませんでした。

上に紹介した第一の答案では，「Aは最初に1を選ぶ必要がある」と書いてあり，この「必要である」という言葉が「1を選ばなければならない」ということを表現していると読めますが，しかし，そこまでの過程を仔細に見ると，「Aが数を選んだときの合計が15になればBは合計を16，17，18，19，20，21のうちのどれかにしかできないので，Aは勝つ」という所では，「Aが合計15をとれば必ず勝つ」ことは指摘されていても「Aが必ず勝つためには合計15になる数をAが選ぶ必要がある」ことは指摘されていないようです。また，第2の答案では末尾に「また，必ず勝つためには，最初に1を選ばなければならない」とは明記してありますが，その理由が書いてありません。第3の答案も，「これだけが絶対に可能なことである」という表現の中に，他の数を選んだら勝てないというニュアンスを読み取ることもできますが，やはり明確さには欠けるようです。

1を選べば勝てることを示した後，「Aが最初に2以上6以下の数を選んだ場合，次にBが6以下の数を選んで合計8にすることができるので，その時点でBが必勝となりAは勝てない。したがって，Aが必ず勝つためには最初に1を選ばなければならない」と明記しておけば，より良い答案となったでしょう。

問題3 図の配列の中にある25個の数から5個の数を選ぶ。このとき，図の配列において，その5個の数のどの2つも同じ行にはなく，またどの2つも同じ列にもないとき，このような5個の数の組を「良い5個組」と呼ぶことにする。たとえば，$\{1,8,10,17,25\}$は良い5個組であり，$\{2,6,12,20,22\}$は良い5個組ではない。良い5個組のそれぞれについて，5個のうちの最大数が決まる。このとき，この最大数の，良い5個組全体にわたっての最小値を求めよ。

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

講評 3 今回は，水泳訓練と時期が重なったためか，提出者は 10 名でした。このうち 9 名が，正しい最小値 17 を得ていました。内訳は，1 組：S 君，Y 君，2 組：N さん，匿名さん，3 組：A 君，5 組：O 君，7 組：N 君，8 組：S 君，です。

さて，S 君の解答を紹介します。

> まず，最大数が必ず 17 以上であることを示す。そのために，17 から 25 までの数が良い 5 個組みに少なくとも 1 つ含まれることを証明する。
>
> 1，2，3，4，5 の数は同じ行にあるので，この中の数は 1 つしか含まれない。同様に，5，6，7，8，9 の中の数も 9，10，11，12，13 の数も，13，14，15，16，1 の中の数もそれぞれ 1 つしか含まれない。よって，1 から 16 までの数は最大で 4 つしか含まれない。ゆえに，少なくとも 1 つは 17 以上の数を含む。
>
> また，$\{3,7,10,14,17\}$，$\{4,8,11,15,17\}$ などのように 5 個組を定めると最大数が 17 である良い 5 個組が得られる。これらから，良い 5 個組の最大数の最小値は 17 である。

解答のポイントは 2 点あります。第 1 点は，1 以上 16 以下の数だけでよい 5 個組を作ることはできない，ということを理由と共に示してある事。第 2 点は，最大数が 17 であるような良い 5 個組が実際に存在する，ということを明確に示している事。

何人かの答案では，「1 以上 16 以下の数だけを用いて良い 5 個組をつくることはできないので，」と書いてあるだけで，不可能である理由を説得力を持って記述することがなされていませんでした。また何人かの答案では，16 以下の数だけを用いて良い 5 個組みを作ることができないことを示しただけでただちに「よって最大数の最小値は 17 である」という結論を導いていたり，理由なく「17 を選べば他の 4 つは 16 以下の数から選ぶことができる」と書くだけで終わっていました。

上記2点を理由と共に記述して始めて「最大数の最小値は17である」という結論が書けるという事を理解してください。ここに示したS君の答案では，その両者がしっかりと述べられており，ここに紹介するにあたってほぼ原文のまま手直しをする必要がありませんでした。

さて,「1以上16以下の数だけでよい5個組を作ることはできない」理由として，1組のY君，2組の匿名さんは，上に紹介した解答と同じ理由を挙げていました。

別解として，2組のNさん，3組のA君，5組のO君の考えた理由を紹介します。

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

図において，影をつけた部分を含む中央3列に注目すると，その中で影のない部分は3列に対して2行しかないから，この3列から列・行が重ならないように3つの数を選ぶためには影をつけた部分から少なくとも1つの数を選ばなければならない。したがって，1以上16以下の数だけでよい5個組を作ることはできない。

表現はそれぞれ違いますが，3人とも原理的には同じ根拠に基づいていました。

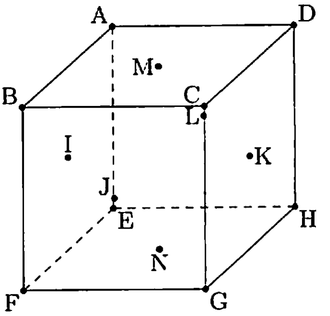
今回の問題では,「良い5個組」というここだけの言葉を問題の中で定義していたり,「最大数の最小値」を求めるなど，問題文の意味を正確に把握することが必要でした。この点については，ほとんどの答案提出者が正しく把握できていました。それに対して，前回・今回とも,「AならばBである。また，BであるためにはAでなければならない」の両方を示すことが必要なときに片方だけですませていたり,「16以下では不可能である。17では，実際に構成できる」の両方が必要なときに後半がおろそかになるなど，論理的な詰めが甘い答案が目立ちました。これは，夏休み以後「数学A」で学ぶ「論理」や「必要条件・十分条件」という項目に関わる事項です。このような事にも意識を向けながら，論理的に正確な文が書けるよう心がけてください。

問題4　立方体の頂点にそれぞれ赤または緑の色を塗る。さらに，この立方

体の各面の中心に次の規則にしたがって色を塗る：その面の4頂点のうち緑の頂点が奇数個であれば面の中心に緑を塗り，それ以外の場合には面の中心には赤を塗る。結局，14点に色が塗られる。このとき，赤い点の個数と緑の点の個数は決して同じ個数にはならないことを示せ。

講評4 今回は，1組S君，Y君，3組Y君，7組N君の4名から提出がありました。少し難しかったでしょうか。頭の中ではわかっていても，文章に表現する部分で苦労したかも知れません。

図を描いておきます。立方体ABCD-EFGHの各面の中心に，I,J,K,L,M,Nと名前をつけました。



さて，方針の異なる2人の解答を紹介しましょう。まず，1組S君の解答です。

1つの面の緑の個数について，4頂点に奇数個緑があれば中心が緑より，偶数個。4頂点に偶数個緑があれば中心が赤より，この場合も偶数個。

立方体の頂点にAからHの点を定め，立方体ABCD-EFGHとおくと，面ABCDと面EFGHに共通する点はない。面ABCD，EFGHの中の緑の点の数はそれぞれ$2m$個，$2n$個とおける。面ABCD，EFGHに属さない点は面ABFE，BCGF，CDHG，DAEHのそれぞれの中心の4点。この4点の緑の個数を考える。

点A，Eの2つのうち緑の個数をa，同様にB，Fのうちの個数をb，点C，Gのうちの個数をc，点D，Hのうちの個数をdとおく。$a+b$が奇数のとき面ABFEの中心は緑，偶数のときは赤，$b+c$，$c+d$，$d+a$でも同様のことが言える。

$a+b$，$b+c$，$c+d$，$d+a$の中の奇数の個数が4点の緑の数。

$$(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)=2(a+b+c+d)$$

$(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)$ は偶数より，4つのうち奇数は偶数個。よって，4点のうちの緑の個数は $2l$ 個とおける。

立方体全体の緑の個数は $2m+2n+2l=2(l+m+n)$ 個。$l+m+n$ は整数より，$2(l+m+n)$ は偶数。赤と緑の個数が同じになるとすると，個数はともに7個。7は奇数より，緑の個数が7にないので題意は示された。

説明しにくい状況を，頂点をうまくグループ分けして的確に表現しています。7組N君の解答。

立方体のそれぞれの色を塗る場所に図のようにA〜Nと名前ををつける（前頁の図）。面ABCDと面EFGHに分けて考える。頂点がすべて緑のとき（$\cdots$P），中心点はすべて赤となり，緑が8個，赤が6個となる。次に，頂点の緑を1個減らしてみる。仮に点Cを赤にすると，中心点M, J，Kは属する面の4頂点のうち緑のものが奇数個となり，全体として緑10個，赤4個になる。最初の状態から辺の両端にある2頂点を赤にすると，その辺に接した4面（辺をBCとすると，左図では中心がI,J,K,Mの4面）の中心点は緑2つ，赤2つとなり，全体としては緑8個，赤6個となる。

このように，Pの状態から赤の点を増やしていくとき，その頂点を含む面の数が3つだから，緑点の数が奇数になることはない。赤と緑の点の個数が同じになるには，それぞれが7個ずつになる必要があるが，そのような事はありえない。

基本的なアイディアは次のようなものです。どのように色が塗られた状態も，すべての頂点が緑の状態から始めて1個ずつ緑の頂点を赤に変えるという操作を繰り返すことにより到達できる。各ステップにおいて，1個の頂点の色を変えると，全体として4点の色が変わることになる。4点の色が逆転したときに，緑の個数の変化は常に偶数個であり（ここがポイント），初期状態で緑の点の個数が偶数であることから，どのような状態においても常に緑の点の個数は偶数となる。

S君，N君それぞれに違った発想で解決しています。じっくりと味わってほしいと思います。

問題5 大相撲で同じ勝星の力士がA，B，Cの3人いたので，優勝決定戦のともえ戦を行なうことになった。まずAとBとが対戦し，次には勝った方

とCとが対戦する。同じ力士が2番続けて勝てば優勝となるが，もし1つ前に勝った力士が負ければ，そのときの勝者と1つ前に負けた力士とが対戦し，これを繰り返す。ただし，合計7戦してまだ優勝者が決まらないときには，そこで打ち切り優勝者なしとする。A，B，Cの3人ともが実力が同じで，どの対戦でも一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ ずつとするとき，第1回目に負けた力士が優勝する確率を求めよ。

講評5 今回の提出者は，1組S君，Y君，6組K君，7組N君，8組S君，組名前未記載のペンネーム“ロバチェフスキー”さんの6名で，いずれも正しい結果 $\frac{9}{64}$ を導いていました。

ここでは，Y君の解答を紹介しましょう。

初戦で勝った力士をA，負けた力士をB，残りの力士をCとする。右図のように，Bが優勝するには第3戦と第4戦を勝つか，第6戦と第7戦を勝つしかないので，

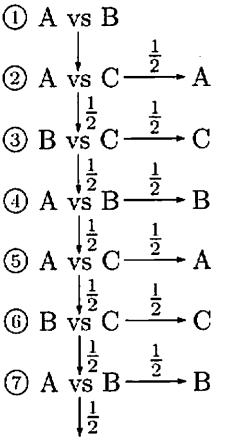
(i) 第3戦と第4戦を勝つとき

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(ii) 第6戦と第7戦を勝つとき

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{64}$$

(i) (ii) より，$\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=\frac{9}{64}$



□

Y君は問題に答えた後，もし，合計7戦してまだ優勝者が決まらないときにはそこで打ち切るというルールがなく，さらに試合を続けるとしたらどうなるか，という点について考えを進めています。初戦で負けたBが第 $3n+1$ 戦目までに優勝する確率を，上の解答で使用した図をさらに延長することにより，次のように求めていました。

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{3k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8^k}$$

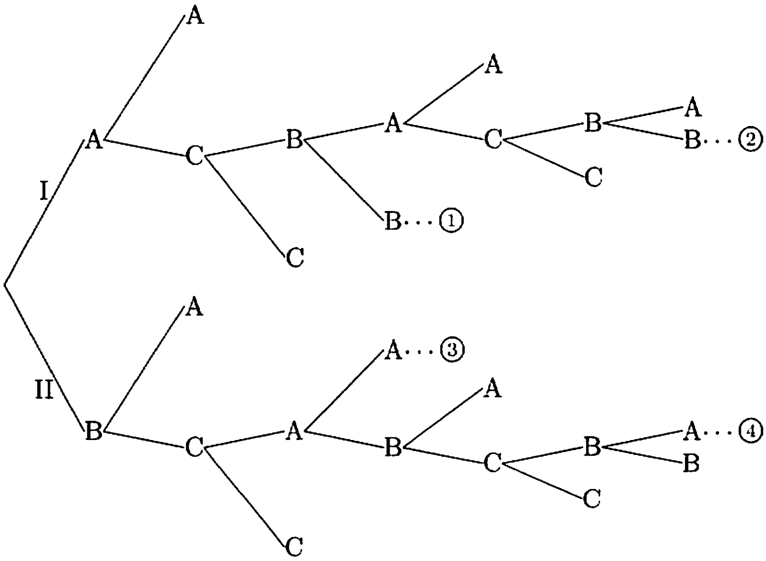
ここで，$\sum$ というのは数学Bの「数列」のところで出てくる和の記号です。じつは，これは等比数列というものの和になっており，数列について学べ

ば最終的には $\sum$ を使わない（かつ，$\cdots$ による省略も使わない）形に書き表すことができます。このあたりの詳しい話は授業で扱うまで待っていてください。いずれにしても，ある問題が解けたら，少し条件を変えてみたり一般化したりして，問題自体を作り変えたときに何が起こるかを考えてみるのはとても良いことです。

さて，上のＹ君の解答は，１試合目が終わったものとして，そこで負けた力士（ＡとしてもＢとしても同じだから，仮にＢとして）が勝つ確率を求めています。１組のＳ君，６組のＫ君もこの考え方にもとづいています。

一方，７組のＮ君，８組のＳ君，匿名の“ロバチェフスキー”さんの３人は，まだ１試合も行なわれていない時点にいるものとして，「1 試合目でＡが負けて最終的にＡが勝つ」場合と「1 試合目でＢが負けて最終的にＢが勝つ」場合の両方を考えて確率を求めています。この解法の答案の中では，樹形図を書いて説明していた“ロバチェフスキー”さんの答案が分かりやすく書かれていました。以下に紹介します。

勝った力士を樹形図を用いて表す。



まず，上の図のようにＩ，IIグループに分ける。
Ｉグループでは第１回目に負けた力士はＢ

①で優勝するとき　第 4 戦で優勝が決まるので，確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}$

②で優勝するとき　第 7 戦で優勝が決まるので，確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^7}$

II グループでは第 1 回目に負けた力士は A あとは I グループのときと同様に，

③で優勝する確率は $\frac{1}{2^4}$，④で優勝する確率は $\frac{1}{2^7}$ である。

よって，求める確率は，$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}=\frac{9}{64}$ □

実は，“ロバチェフスキー” さんの解答では 1 箇所「独立」という言葉を間違って使っているところがあったのですが，上に掲げた解答ではその部分は修正してあります。

問題 6 3 辺の長さが 2，3，5 の直方体がたくさんある。1 辺の長さが 90 の立方体の中に，この直方体を同じ向きに，きちんと並べて，いっぱいになるまで積み重ねる。このとき，大きい立方体の 1 つの対角線が貫通する小さい直方体の個数を求めよ。

講評 6 今回の提出者は 4 名でした。そのうち，正解は 1 組の S 君と S 君の 2 名です。S 君の解答を紹介します。

直方体は縦に 45 個，横に 30 個，上に 18 個並ぶ。対角線は縦の方向に 44 回，横の方向に 29 回，上の方向に 17 回直方体の面を通過する。ただし，始点，終点を含まない。

対角線が面を 1 つ通過するごとに貫通する直方体が 1 つ増えるので，最初の 1 つから 44 個，29 個，17 個増えて，$1+44+29+17=91$ 個と考えられる。しかし，次の 2 つの場合がある。

i)　対角線が辺を貫通するとき

2 つの面を同時に通るので，面を 2 つ通過しても直方体の増加は 1 つのみ。

ii) 対角線が頂点を貫通するとき

3 つの面を同時に通るので，面を 3 つ通過しても直方体の増加は 1 つのみ。

ii) について 45 と 30 と 18 の最大公約数は 3 であり，これは通過する頂点の数である。ただし，この 3 点には終点が含まれているので，これを除く

と，2 点である。

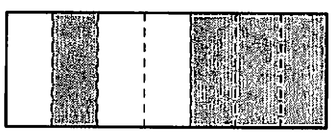
i) について，縦の面と横の面でできる辺を通過するのは，45 と 30 の最大公約数の 15 本であるが，この中には終点と ii) の 2 点とが含まれているので，これを除くと 12 本である。同様に，残り（横の面と上の面，上の面と縦の面）は 3 本と 6 本なので，全体で 21 本である。

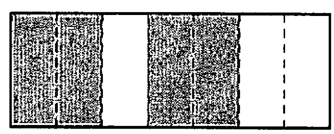
i) のとき増える直方体の数が 1 つ減り，ii) のとき増える直方体の数が 2 つ減るので，求める数は $91-21-2\times 2=66$（個）

S 君の解答も，本質的には同様の考え方に基づいていました。また，S 君は，2，3，5 の最小公倍数が 30 であることに注目し，直方体を 1 辺の長さが 30 の立方体に詰め込んだときに立方体の対角線が直方体を幾つ貫通するかを求めてそれを 3 倍すればよいことを指摘して，利用しています。

問題 7　連続する n 個の枠を左から順に白と黒に塗り分けたものを，n 枠のバーコードという。黒く塗った枠の一続きをバーといい，白く塗った枠の一続きをスペースという。

下の図は，2 個のスペースと 2 個のバーからなる 7 枠のバーコードのうち，(a) はスペースで始まる例であり，(b) はバーから始まる例を示している。

(a)


(b)


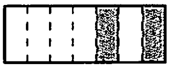
(1) 7 枠のバーコードを考える。このうち，2 個のスペースと 2 個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数を求めよ。

(2) n 枠のバーコードを考える。k をうまく選んで，k 個のスペースと k 個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数が，100 を超えるようにしたい。このことができる最小の n の値を求めよ。また，そのときの k の値を求めよ。

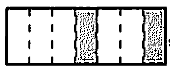
講評 7　提出者は 2 名。正解者は，(1) は 7 組の H さん一人，(2) はなしでした。まず，H さんがどのように考えて解いていったか，出だしの部分をそのまま紹介します。

条件より，必ず右端はバーになります。
私は，左端のスペースがいくつの枠からなるのか，右端のバーがいくつの枠からなるのか，に視点をおいて考えます。
まず，スペースがいくつの枠からなるのかだけを考えると，次の4つの場合があります。

i) 左端のスペースが4つの枠からなる場合
ii) 左端のスペースが3つの枠からなる場合
iii) 左端のスペースが2つの枠からなる場合
iv) 左端のスペースが1つの枠からなる場合

i) のとき 

左端のスペースの右隣は少なくとも1つは黒に塗られ，右端は必ずバーになるので，この1通りしかありません。
ii)，iii)，iv) では，さらに右端のバーがいくつの枠からなるかを考えます。

ii)(A) 右端のバーが1つの枠 , 

ii)(B) 右端のバーが2つの枠 

よって，ii) のときは3通りあります。
［以下省略するが，このようにして丁寧に数え上げながら，「20通り」という結果を導いている。］

数え上げの問題では，「もらさず，重複せず」数えること，そのためにはやみくもに数えるのではなく分類の基準を明確にして規則的な数え上げをすることが大切です。この解答は，数え上げの第一歩がしっかりと押さえられています。その上で，特別な場合には計算で簡単に個数が求められることがあり，実はこの問題もある見方をすれば容易に結果が求まります。不正解だったもう一人の提出者は，計算で簡単に結果を出す方法はわかっていたのですが，問題文の「スペースで始まるバーコードの総数」を単に「バーコードの総数」と早とちりして，バーで始まるものも含めてしまったため，結果が2倍の値になっていました。

計算で求める方法を説明します。2個のスペースと2個のバーからなる7桁のバーコードには，隣り合う枠の境界線6本の中に，スペースからバーへ，あるいはバーからスペースへと色が切り替わる境界線が3本あります。また，逆に，隣り合う枠の境界線6本の中から色の切り替わる境界線を3本選べば，スペースから始まるという条件の下では，2個のスペースと2個のバーからなる

7 桁のバーコードが唯 1 つ決まります。従って，求めるバーコードの個数は，6 本の線から 3 本を選ぶ選び方の総数 ${}_6C_3 = 20$ 個です。
(2)　すぐ上に書いた方法を用いれば，n 枠のバーコードで k 個のスペースと k 個のバーからなるものの個数は ${}_{n-1}C_{2k-1}$ であることがわかります。n を決めたとき，組み合わせの値

$$ {}_{n-1}C_0, {}_{n-1}C_1, {}_{n-1}C_2, \cdots, {}_{n-1}C_{n-1} $$

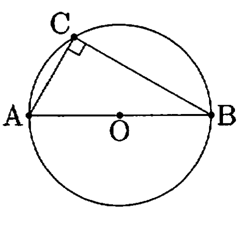
は，パスカルの三角形を思い浮かべてみればこの並び方で中央にあるものほど大きく，両端にあるものほど小さいことが予想されます。このことを考慮し，初めて 100 を超えるところを探すと，${}_8C_3 = 56$，${}_9C_5 = 126$ より，答は $n = 10$，$k = 3$ であることがわかります。きちんとした証明にするには埋めなければならない部分がありますが，核心部分はこれだけです。

問題 8　半径 1 の球に内接する正 12 面体がある。この正 12 面体のすべての頂点間の距離の 2 乗の和を求めよ。

講評 8　提出者は S 君のみ。解答を転記します。

正 12 面体の 20 個の頂点のうち 1 つを A とし，A と正反対の位置にある点を B とする。正 12 面体に外接する球の中心を O とすると，O，A，B は一直線上にある。

正 12 面体の頂点のうち A，B ではない頂点のうち 1 つを C とする。O，A，B，C は同一平面上にある。球を，O，A，B，C を通る平面で切断すると，切断面は図のようになる。



AB は直径であるから，$\angle ACB = 90^\circ$ より $AC^2 + BC^2 = (2AO)^2 = 4$
$A = C$ のときや $B = C$ のときも $AC^2 + BC^2 = 4$ であるから，C を 20 個の頂点のうちどれに定めても $AC^2 + BC^2$ は 4 で一定である。このことから，点 A からのすべての頂点までの距離の 2 乗の和と，点 B からのすべ

ての頂点までの距離の 2 乗の和の合計は $4 \times 20 = 80$ である。点 A，B のような正反対の位置関係にある頂点は 10 組あるので，$80 \times 10 = 800$。ただし，これは 2 つの頂点間の距離の 2 乗を 2 回足してしまっているので，求める数は $800 \div 2 = 400$ □

正解です。ところで，この結果を見ると，正 12 面体の頂点の個数の平方になっています。

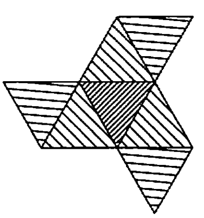
半径 1 の球に内接する正 12 面体の頂点間の距離の 2 乗の総和は $20^2 = 400$

これは偶然ではありません。一般に，半径 1 の球に内接する正多面体の頂点間の距離の 2 乗の総和は，頂点の個数の 2 乗になります。空間内の正多面体に限らず，平面においても，半径 1 の円に内接する正多角形の頂点間の距離の 2 乗の総和は頂点の個数の 2 乗です。正 n 角形で，n が偶数の場合には，頂点全体の集合は原点に関して対称だから S 君の議論がそのまま使えます。しかし，n が奇数の場合には，1 つの頂点 A に対して原点に関して対称な点 B は頂点ではなくなってしまいます。それでも，結果は正しいのです。なぜでしょうか？

問題 9 正 8 面体の 8 つの面に 1 から 8 までの数を 1 回ずつ書いてさいころを作る。このようなさいころは何通りできるか。ただし，回転して数の配置が同じになるものは同じさいころとみなす。

講評 9 提出者 3 名中，正解者は 1 組の K 君と 8 組の匿名さんの 2 人でした。まず，8 組の匿名さんの解答を紹介します。

$\boxed{\text{解その 1}}$ 1 を書いた面を固定し，残りの面への数字の書き方を数える。固定した面を除いた残りの部分の展開図は次のようになる。

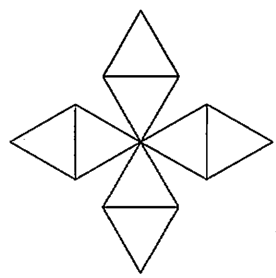


中心のに書く数の選び方は 7 通り。その外側のに書く数の決め方は，残り 6 つの数から 3 つ選んで円順列を作るので，${}_6C_3(3-1)! = 40$

通り。もう回転して同じになることはないので，さらに外側の  に書く数の決め方は $3! = 6$ 通り。よって，$7 \times 40 \times 6 = 1680$ 通り。

さらに，別解を与えて確認してありました。

解その2　正多面体は，向かい合う2頂点を通る軸に関して対称である。1つの頂点から次のように展開する。



内側の4面への数字の書き入れ方は ${}_8C_4(4-1)! = 420$ 通り。次に，外側の4面への数の書き入れ方は $4! = 24$ 通り。頂点は6個あるから，$420 \times 24/6 = 1680$ 通り。

次に，K君の解答を少し整理して紹介します。

解その3　すべての面を区別すると，8つの面への数字の書き入れ方は $8!$ 通り。この数え方の中で，回転して数の配置が同じになるものが幾つ分に数えられているかを考える。特定の面ABCに注目すると，回転によって，この面がどの面に重なるかが8通りあり，重ねる面を決めたときに正三角形をどのように重ねるかが3通りづつあるから，全部で $8 \times 3 = 24$ 通りの回転の仕方がある。これは，回転によって同じ配置となる数の書き入れ方を区別しなければ1通りと数えられるものが，区別したときには24通りに数えられていることを表すから，さいころの作り方は，$\dfrac{8!}{24} = 1680$ 通りある。

さて，第10回チャレンジ・コース問題には，4名の提出がありましたが，残念ながら正解者がいませんでした。少しヒントを出します。引き続き，この問

題については解答を受け付けますので，できた人はレポート用紙に書いて提出してください。

問題 10 球面Sの5本の直径 l_1，…，l_5 が与えられていて，これらの直径はどの3本も同一平面上にないものとする。直径 l_1，…，l_5 のそれぞれからどちらかの端点を選ぶ。5個の端点の選び方32通りのうち，5点を含む半球面が存在するものは何通りあるか。

ヒント 球の中心を通る平面と球面との共通部分を大円といいます。球面上の2点A，Bを通る大円は2点A，Bによって2つの弧に分けられますが，このうち短い方の弧（ただしA，Bが直径の両端の場合は同じ長さの弧）の長さをA，Bの球面距離と呼ぶことにします。球の半径を r とするとき，球面上の点Pを中心とする半球面とは，Pからの球面距離が $\frac{\pi r}{2}$ 以下の球面上の点全体からなる集合と言い表すことができます。

ここで，球面Sの5本の直径 l_1，…，l_5 のそれぞれからどちらかの端点を選んだものを a_1，…，a_5 とするとき，距離の対称性（AからBまでの距離とBからAまでの距離は同じ）から次の言いかえができます。

a_1，…，a_5 が球面上の点Pを中心とする半球面に含まれる

$\Longleftrightarrow$ Pが a_1，…，a_5 のそれぞれを中心とする半球面の共通部分に含まれる

これがヒントです。続きを考えてみてください。

問題 11 20円以上の任意の値段分の切手は5円切手と6円切手の組み合わせとして買えることを示してください。

講評 11 5人と1組（2人組）の応募がありました。正解者は，1組：S君，S君，2組：I君，Y君，8組：Tさんです。

ここでは，一番すっきりと解答をまとめているY君の答案を紹介します。

20円から24円までは，次のように5円切手と6円切手で買える。

20円	5円 × 4枚 + 6円 × 0枚
21円	5円 × 3枚 + 6円 × 1枚
22円	5円 × 2枚 + 6円 × 2枚
23円	5円 × 1枚 + 6円 × 3枚
24円	5円 × 0枚 + 6円 × 4枚

25円以上は，20円から24円のいずれかに5円切手を増やすことにより必ず買える。よって，20円以上の任意の値段分の切手は5円切手と6円切手の組合せとして買える。 □

5で割った余りは0，1，2，3，4のいずれかであることに注目したわかりやすい解答です。

問題12 トランプのダイヤのカード13枚をよく切った後，1枚ずつめくって机の上に左から右へ一列に並べてゆく。ただし，めくったカードがそのときの右端にあるカードより小さいときは，めくったカードは捨てる。並べ終わったとき，7が机の上の列に残っている確率を求めよ。

講評12 応募は5名，そのうち正解者は，1組：S君，2組：I君，Y君，5組：Y君です。ここでは，Y君の解答を紹介します。

1枚づつ大小を比較しながら並べる方法と，13枚並べてから左から大小比較していく方法とは，同じ結果を与える。7以上の数のカードを○（7枚），7未満の数のカードを△（6枚）とする。13枚を並べてみると，7が残る条件は7未満のカード（△）の位置にかかわらず，7以上のカード（○）の中で7が最も左側にあることである。（下図参照）

△△○△○○○△○△○○△（これは一例）
　　↑
ここが7でなければ7は残らない。

7枚ある7以上のカードのうちどれが左端に来るかは等確率だから，求める確率は $\dfrac{1}{7}$ である。 □

たくさんの計算をして正しい結果にたどり着いている答案もありましたが，上の考え方がもっともすっきりとしてシンプルでしょう。

問題13 白石180個と黒石181個の合わせて361個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

条件 その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

講評 13 この問題への解答者は1組のS君のみで，正解でした。S君の答案を紹介します。

次の2つの場合について考える。

(1) 左端が黒石のとき

その黒石が条件を満たす。($\because$ 碁石は1つも残らない)

(2) 左端が白石のとき

左端から白石と黒石の数を数えていく。左端の石1つのみを数えると，白石1個，黒石0個と白石が多く，すべての石を数えると白石180個，黒石181個と黒石が多いことから，k を2以上360以下の偶数として左から k 番目の石までの白石と黒石の個数が一致し，左から $k+1$ 番目の石まで数えると黒石が白石より1つ多くなる k が存在する。このとき，$k+1$ 番目の石は黒石で，その黒石が条件を満たす。

よって，すべての場合において条件を満たす黒石が存在することが示された。 □

左端から順に石の色をカウントしていったときに，最初は白が多く，最後には黒が多くなっているのだから，どこかで黒が白を追い越すはずだ。はじめて黒の個数が白の個数を上回るところを左から $k+1$ 番目とすると，確かに「左から k 番目の石までの白石と黒石の個数が一致し，左から $k+1$ 番目の石まで数えると黒石が白石より1つ多くなる」という条件を満たしています。1個数える石を増やすと，黒石と白石の個数の差は1づつ変化することから，この論法が成立します。

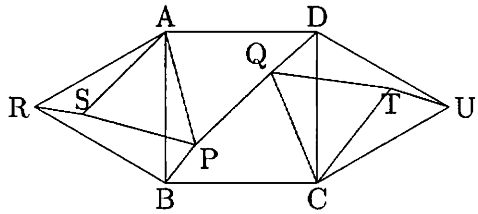
問題 14 一辺の長さが1の正方形ABCD内の任意の2点をP，Qとするとき，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{CQ}+\mathrm{DQ}$$

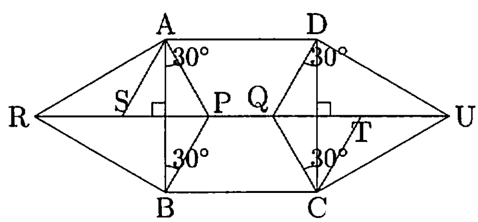
の最小値を求めよ。

講評 14 解答者は2名，そのうち正解者は1組のS君のみでした。答案を紹介します。

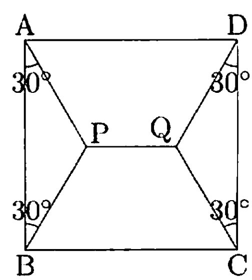
図のように，点R，S，T，Uを△ABR，△APS，△CQT，△CDUがすべて三角形になるようにとる。



このとき，$\triangle$ABP と $\triangle$ARS において $\mathrm{AP} = \mathrm{AS}$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AR}$，
$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{PAS} - \angle\mathrm{BAS} = \angle\mathrm{BAR} - \angle\mathrm{BAS} = \angle\mathrm{RAS}$（$\because \angle\mathrm{PAS} = \angle\mathrm{BAR} = 60^\circ$）
$\therefore \triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ARS}$（$\because$ 二辺夾角相等）　よって，$\mathrm{BP} = \mathrm{RS}$
また，$\mathrm{AP} = \mathrm{SP}$ より，$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} = \mathrm{RS} + \mathrm{SD}$
同様にして，$\mathrm{CQ} + \mathrm{QD} = \mathrm{QT} + \mathrm{TU}$
したがって，$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DQ} = \mathrm{RS} + \mathrm{SP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QT} + \mathrm{TU}$
点R，U は定点であり，線分 RU の長さは一定である。RS+SP+PQ+QT+TU は点 R と U の間を折れ線で結んだ各線分の長さの総和であるから，6 点 P，Q，R，S，T，U が同一直線上にあるとき RS+SP+PQ+QT+TU = RU で最小である。下図のようになるとき，6 点 P，Q，R，S，T，U は一直線上に並ぶ。



よって，$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DQ}$ は点 P，Q を次図のようにとったとき最小値 $\sqrt{3} + 1$ をとる。

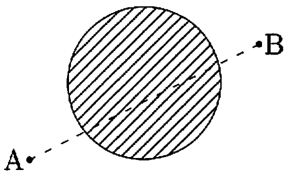


□

枝分かれした線分の長さの和を，2 点を結ぶ枝分かれのない折れ線の長さに

とりかえることによって解いています。とても巧妙なうまい方法です。

問題 15 右図は2つの町 A,B とその間にそびえる岩山（斜線部）を表している。今，町 A，B を直線道路で結べるように，岩山にトンネルを掘ることになった。岩山の A 側と B 側のそれぞれからトンネルを掘り進め，途中でぴったりトンネルが繋がるように，掘り進める方向を定めたい。ただし，A と B の一方から他方を直接見通す事はできず，したがって直接方向を定めることはできない。また，AB 間の距離を直接測ることもできない。平面上の2点を結ぶ線分が岩山にぶつからない場合に限り，その2点間の距離を直接測ることも，また一方から他方を見通す方角を直接決定することもできる。この条件のもとで次の方法を考え，説明せよ。

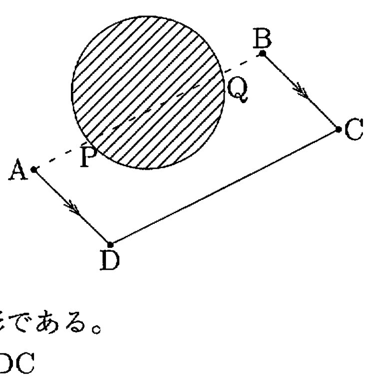


(1) 岩山の A 側および B 側のどの地点からどの方角へトンネルを掘り進めればよいかを決定する方法

(2) トンネルの長さを求める方法。

講評 15 3名の提出がありました。1名が準正解，1名が正解，1名は答案の中に穴があり，正解とはいえないのですが，よく工夫して考えています。まず，5組の Y 君の答案を検討しましょう。

(1) A,B からそれぞれ 同じ方角① で，かつ距離が等しい地点 C，D を定める（この時，平面上の線分 BC，CD，DA が岩山にぶつからないようにする）と平面図は下図のようになる。図において四角形 ABCD について，仮定より BC // AD② である。また，BC = AD。よって一組の対辺が平行でかつ長さが等しいので，四角形 ABCD は平行四辺形である。



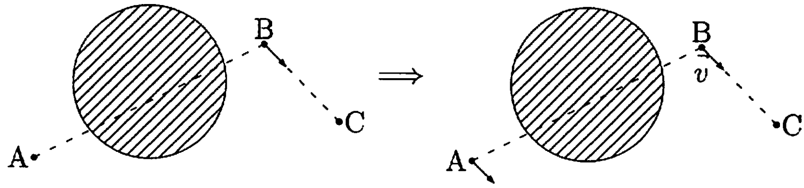
$$\therefore \mathrm{AB} \,//\, \mathrm{DC},\ \mathrm{BC} = \mathrm{DC}$$

A から B への方角と D から C への方角は同じなので，掘り進める地点と方角が定まった。

(2) 図より，DCの距離からAP，BQの距離を引けばよい。

まず，下線部①について考えてみましょう。「平面上の2点を結ぶ線分が岩山にぶつからない場合に限り，その2点間の距離を直接測ることも，また一方から他方を見通す方角を直接決定することもできる」というのが問題の条件でした。この条件から「A,Bからそれぞれ同じ方角」を定める事ができれば，この答案の方法はうまく機能します。

ところで，「一方から他方を見通す方角を直接決定することもできる」ということの意味を詳しく見てみます。



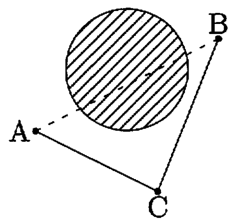
上図において，線分BCが岩山とぶつからないとき，仮定によりBからCを見通す方角が定まります。これは，言い換えれば，Bにいながらにして図の短い有向線分（矢印）$\vec{v}$がかけるといってもよいでしょう。ここでさらに，「Aからも同じ方角の直線が引ける」というためには，この有向線分$\vec{v}$をAを始点とした位置に移す（Aを始点として$\vec{v}$と平行なベクトルがかける）ことが必要です。現実的な意味づけをした問題設定をしているので，たとえば「方位磁石で方角を決定して他の位置に移す」というのも考えられないわけではありませんが，ここでは磁気現象を利用するのではなく，数学の問題として考えて見ましょう。

答案の中でも，「同じ方角」であるという事を後で利用する際には，②のように，「BC // AD」として利用しています。上の説明でもわかるように，結局のところ「直線ACと直線外の一点Bが与えられたときに，Bを通りACに平行な直線が引ける」ことがきちんと言えれば上で指摘した問題は解消します。岩山を避けながら，このような平行線が引けるということを言えば，完全になるでしょう。

続いて，S君の答案です。出題者が想定していた解答は実はこの方法によるものでした。今授業で扱っている三角比を利用して，掘り進める方角を決定す

る筋道を簡潔に説明しています。

(1) A，B 両方から見える地点を 1 つとり，C とする。AC 間の距離，BC 間の距離と角 C が計測できる。$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおく。余弦定理より，$c^2-a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$。$a$，$b$，C は値がわかっているので，$c$ の値も計算できる。



また，

$$\cos\mathrm{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos\mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

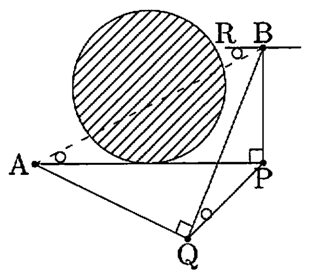
より，A，B の値も分かる。A，B の値から，トンネルを掘り進める方角を決定できる。

(2) c の値が分かっているから，図のように D，E をとったときの AD，BE の長さが求められれば計算できる。A から見た D の方角は分かり，A から D は見通せるので点 D は求まり，AD の長さも求められる。BE についても同様である。AB − AD − BE の値を求めれば，これがトンネルの長さである。

次に，1 組の Y 君の答案のうち，(1) の部分を検討します。

右図で，上方を北とする。A，B の両方から見通すことができ，∠APB，∠AQB が直角となる点 P，Q をとる。①

四角形 ABPQ は円に内接するので，



$$\angle\mathrm{PQB}=\angle\mathrm{PAB}$$

また，B から PA に平行な直線をとる ② と，

$$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{ABR}\ \text{(平行線の錯角)}$$

よって，

$$\angle\mathrm{PQB}=\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{ABR}$$

したがって，点 A からは AP に対して北に ∠PQB の角度，点 B からは BR に対して南に ∠PQB の角度で掘ればよい。

平面幾何の知識をうまく使って，A，B 両地点から掘り進める方向を表す角を岩山を避けて離れた所に移そうとしています。工夫のあとが伺えますが，下線部の①や②について,「～となる点をとる」「～となる直線をとる」といったときには,「本当にそのような点や直線がとれるのか」を常に考える習慣をつけてください。また，図を利用する際にも，問題に一例として書いてある図の上に書き込んでとれそうだというだけではなく，一般に A，B が問題の設定を満たすどのような位置にあっても，答案にあるような P，Q がとれるのかどうか，を考えておくことが大切です。実は，この問題の場合，A,B が岩山に非常に近いときには，上の性質をもつような 2 点 P，Q をとることができません。

以上，いくつかの問題点はありましたが，今回は三人三様さまざまなアプローチが現れました。それぞれ工夫を凝らして考えている様子が伺え，興味深く読むことができました。

問題 16　$N = 123456789$ とする。N の各位に現れる数字のうち，1 と 4 を入れ替えると 423156789 となり，この数は 11 の倍数であることがわかる。この例のように，N の各位に現れる数字のうち，ちょうど 2 つを入れ替えてできる 11 の倍数を全部あげよ。

講評 16　提出者 3 人（前問と同じ，Y 君，S 君，Y 君）とも正解でした。最初の提出者である Y 君の解答を紹介しましょう。

ある数が 11 の倍数であるかどうかは，次のように判定できる。

数 N が 11 の倍数である $\Longleftrightarrow$ 1 桁おきの各位の数の和の差が 11 の倍数である

今の場合，$N = 123456789$ であり，1 桁おきの各位の数の和は $1+3+5+7+9=25$ と $2+4+6+8=20$ である。従って，その差は 5。

各位の数の合計は 45 なので，一桁おきの各位の数の和の差が偶数（0 も含む）になることはない。また，1 桁おきの各位の数の差が最も大きく変化するのは，1 と 8，2 と 9 を入れ替えたときで，その時の差は 5 ± 14 だから，とりうる差の値は -9 以上 19 以下の奇数である。

この間の 11 の倍数で奇数であるものは 11 のみだから，差を 11 にするような入れ替えを考えればよい。2 数を入れ替えて一桁おきの各位の数の和の差が 11 になるのは，もとの状態よりも差が 6 だけ増えたときだから，1 と 4，3 と 6，5 と 8 を入れ替えたときである。よって，求める数は 423156789, 126453789, 123486759 の 3 つである。

この答案の中の，ある整数が 11 の倍数であるための判定法を，S 君と Y 君は答案中で証明していました。次に紹介するのは，この部分の S 君による証明です。

補題 正の整数 n について，奇数桁の数の総和を a，偶数桁の数の総和を b とするとき，n が 11 の倍数であることと，$a-b$ が 11 の倍数であることとは同値である。

証明 整数 n の m 桁目の数を n_m（m は正の整数）と表す。このとき，

$$n = n_1 \times 10^0 + n_2 \times 10^1 + n_3 \times 10^2 + n_4 \times 10^3 + n_5 \times 10^4 + \cdots$$

と表される。このとき，

$$\begin{aligned} n &= n_1 + (11-1)n_2 + (11 \times 9 + 1)n_3 + (11 \times 91 - 1)n_4 \\ &\quad + (11 \times 909 + 1)n_5 + \cdots \\ &= 11(n_2 + 9n_3 + 91n_4 + 909n_5 + 9091n_6 + \cdots) \\ &\quad + (n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 + \cdots) \end{aligned}$$

$n_2 + 9n_3 + 91n_4 + 909n_5 + 9091n_6 + \cdots$ は整数より，n が 11 の倍数ならば $n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 + \cdots$ も 11 の倍数であり，逆に，$n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 + \cdots$ が 11 の倍数のとき n も 11 の倍数である。 □

Y 君は，合同式の記法を用いて答案を書いていました。ここで，整数 a, b, p に対して $a \equiv b \pmod{p}$ とは，「$a-b$ が p で割り切れる」ことを意味します。

$\mathrm{N} = a_1 \times 10^8 + a_2 \times 10^7 + a_3 \times 10^6 + \cdots + a_8 \times 10 + a_9$ とすると，

$$\mathrm{N} \equiv 0 \pmod{11} \iff \mathrm{N}\text{ が 11 の倍数}$$

である。ここで，

$10^8 \equiv 10^6 \equiv 10^4 \equiv 10^2 \equiv 10^0 \equiv 1 \pmod{11}$，$10^7 \equiv 10^5 \equiv 10^3 \equiv 10^1 \equiv -1 \pmod{11}$

だから，

$\mathrm{N} \equiv a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_9 \equiv (a_1+a_3+a_5+a_7+a_9) - (a_2+a_4+a_6+a_8)$

したがって，N が 11 の倍数であるための必要十分条件は，

$$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) \equiv 0 \pmod{11}$$

となること，すなわち，$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$ が 11 の倍数となることである。 □

今回は力作揃いで，講評者もタイプをするのに力尽きました。第14号分の2問はまた後日。

問題17 ある王が遺書を金庫に保管した。王は，金庫にいくつかの錠前をとりつけ，それぞれの錠につき，その錠を開けることのできる鍵を複数作った。彼は，次の条件を満たすように5人の息子に鍵を分け与えたという。その条件とは，5人のうち3人が揃えば（どの3人であっても）すべての錠を開けて金庫の中を見ることができるが，2人では（どの2人であっても）足りない鍵があって金庫の中を見ることができない，というものである。この条件を満たす為には，金庫に最低いくつの錠前を取り付けなければならないか

講評17 まず，3人の答案をもとにした解答を紹介します。主としてY君の答案がベースになっています。

5人の息子をA，B，C，D，Eとする。AとBの2人に足りない鍵と，BとCの2人に足りない鍵が同一のものであるとすると，AとBとCの3人が揃ったとしても全ての錠前を開けることができず，条件と矛盾する。AとB，CとDに足りない鍵が同一である場合も同様である。よって，異なる2人組のそれぞれにとって足りない鍵は，別の種類のものでなければならない。

5人から異なる2人を選ぶ方法は${}_5C_2 = 10$通りだから，すくなくとも10本の異なる種類の錠前が必要である。

逆に，10種類の錠前があれば，別表のようにその鍵を5人に分配すればどの2人でも金庫を開くことは出来ず，どの3人でも金庫を開くことが出来る。ここで，表の中の1から10までの数字は10種類の異なる鍵を表している。

A	B	C	D	E
1	1	1		
2	2		2	
3	3			3
4		4	4	
5		5		5
6			6	6
	7	7	7	
	8	8		8
	9		9	9
		10	10	10

したがって，条件を満たすためには金庫に錠前を最低10個つけなければならない。 □

まず，少なくとも 10 種類は必要であることを示し，次に，10 種類あれば実際に可能であることを具体例を作って見せています。この 2 段階の手順を踏むことによって,「10 種類」というのが問題の条件を満たすための必要十分条件であることを明確に示しています。この手法は，これまでの力自慢の中でも何度か出会ったもので，もうおなじみですね。3 人とも，この両方をしっかりと書き込んで答案を作成していました。

問題 18 この問題のためだけに，減少数という用語を，2 桁以上の整数でそれぞれの位の数字が左から右へと真に減少しているような数，と定義する。

(1) 3 桁の減少数はいくつあるか。

(2) 減少数の桁数は最大何桁になりうるか。

(3) 減少数は全部でいくつあるか。

講評 18 主として S 君の答案をベースにした解答です。

(1) 0 から 9 までの数から異なる 3 つを選ぶと，左から順に大きい数から小さい数へと並べて 3 桁の減少数が作れる。選んだ 3 つの数に対して，減少数となる並べ方はこのような並べ方ただ 1 つである。よって，異なる 3 つの数の選び方の総数が減少数の総数であり，${}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$（個）。

(2) 左端の数が同じ場合，左から右へと 1 ずつ数が減少するとき最も桁数が大きくなる。また，左から右へと 1 ずつ数が減少する場合，左端の数が最大のときに桁数も最大になる。したがって，左端が 9 で左から右へと 1 ずつ数が減少するときに桁数最大の減少数ができる。これは 9876543210 であり，10 桁

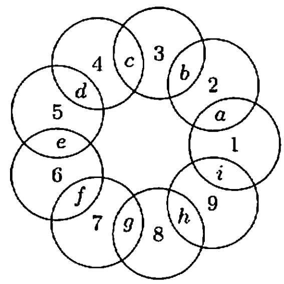
(3) (2) より，減少数は 2 桁から 10 桁まで存在し，n 桁の減少数は (1) と同様に考えて ${}_{10}\mathrm{C}_n$ 個あるので，

$$
\begin{aligned}
&{}_{10}\mathrm{C}_2 + {}_{10}\mathrm{C}_3 + {}_{10}\mathrm{C}_4 + {}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_6 + {}_{10}\mathrm{C}_7 + {}_{10}\mathrm{C}_8 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \\
&= {}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 + {}_{10}\mathrm{C}_3 + {}_{10}\mathrm{C}_4 + {}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_6 + {}_{10}\mathrm{C}_7 + {}_{10}\mathrm{C}_8 + {}_{10}\mathrm{C}_9 \\
&\quad + {}_{10}\mathrm{C}_{10} - ({}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\
&= (1+1)^{10} - ({}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\
&= 2^{10} - 11 \\
&= 1013\ (\text{個})
\end{aligned}
$$

□

数字を並べてできる整数の桁数を考える問題では，通常最高位の数が0にならないようにという事が気をつけるべき点ですが，この問題では「それぞれの位の数字が左から右へと真に減少している」という条件より，選んだ2個以上の数を並べる際に0が最高位にくることはありません。したがって，実は非常に単純な問題になっています。(3) の計算では上のように二項定理を利用すると計算が簡単になりますね。

問題 19　下図において、a,b,c,d,e,f,g,h,i は、1,2,3,4,5,6,7,8,9 の9つの数字を並べ替えたものである。9つの円それぞれの中に書いてある3つの数字を足すことにより、9つの和を得る。これら9つの和がすべて一致するとき、$a+d+g$ の値を求めてください。



講評 19　今回の問題の出典は，サウスカロライナ大学主催高校数学コンテスト（2003年2月実施分）です。30題出題されている中から，1年生でも取り組みやすく，また図が入っていて目を引くものを選びました。

応募者数は，1年生22名，2年生20名，学年不詳3名の計45名でした。対象学年を2学年に広げたため，過去最大の応募人数です。

答案は，大きく分けて，a，d，g の表す数値を求めてから $a+d+g$ を計算する方法と，a，d，g それぞれの値を具体的に求めることなく $a+d+g$ の値を出す方法との2通りのものがありました。

前者の代表として，1年8組K君の答案を紹介します。

仮定より，$a+i+1=h+i+9$．$\therefore a=h+8$

ところで，$a \leqq 9$，$h \geqq 1$ から，明らかに $a=9$，$h=1$ となる。

また，$a+b+2=b+c+3$　　$9+2=c+3$　　$\therefore c=3$

同様にしていくと，$e=7$，$g=6$．

このとき，1つの円の中の数の和は，$g+h+8=6+1+8=15$ となる。

$\therefore d=15-8-4=3$

よって，$a+d+g=9+3+6=18$。

〈確認〉ところで，d と同じように b，f，i を求めると，$b=4$，$f=2$，$i=5$ となる。

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} = \{9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5\}$$

これらの値は問題にあっている。 □

必要なことが書かれ，無駄なことが書かれていないという意味で，優れた答案になっています。なお，最後の確認のところにある等式の両辺は集合を現す記号が使われているので，あくまでも集合として等しい（両辺の集合に含まれる要素は一致する）ことを表しています。順序まで含めて $a = 9$，$b = 4$，$\cdots$ となっていることを表している書き方ではありません。

次に後者（a，d，g それぞれの値を具体的に求めることなく $a + d + g$ の値を出す方法）の代表として 2 年 4 組 N 君の答案を紹介します。

円の中の数の和を，9 つの円にわたる総和を T をおくと，

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= (i + 1 + a) + (a + 2 + b) + \cdots + (h + 9 + i) \\ &= 2(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 45 \\ &= 2 \cdot 45 + 45 \\ &= 135 \end{aligned}$$

ここで $a \sim i$ は $1 \sim 9$ の並べ替えであることを用いた。9 つの円それぞれの中の数の和は一致するので，1 つの円の中の数の和は $135 \div 9 = 15$.

よって，

$$\begin{cases} a = 14 - i \\ a = 13 - b \end{cases}, \begin{cases} d = 11 - c \\ d = 10 - e \end{cases}, \begin{cases} g = 8 - f \\ g = 7 - h \end{cases}$$

これら 6 つの式の辺々をそれぞれ足すと，

$$2a + 2d + 2g = 63 - (b + c + e + f + h + i)$$

両辺に $-(a + d + g)$ を加えると，

$$\begin{aligned} a + d + g &= 63 - (a + b + c + d + e + f + g + g + i) \\ &= 63 - 45 \\ &= 18 \end{aligned}$$

□

a，d，g のところで重なる円に注目し，必要な情報を手際よく引き出して解いています。

全体としては，前者のようにそれぞれの文字の表す値を具体的に求めてから $a+d+g$ の値を出す答案が多数を占めました。それぞれの文字の表す値を求める方法としては，他に次のようなものがありました。

9つの円の中にある数字の和がすべて一致するので，

$i+a > a+b > b+c > c+d > d+e > e+f > f+g > g+h > h+i$

が成り立つ。したがって，

$$a > c > e > g > i > b > d > f > h$$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ の9つの数字を並べ替えたものなので，

$$a = 9, b = 4, c = 8, d = 3, e = 7, f = 2, g = 6, h = 1, i = 5$$

である。よって，$a+d+g = 9+3+6 = 18$ □

この答案のアイディアは1年2組Sさんのものです。惜しいことに，Sさんは最後の段階で文字に数値をあてる際に大小を逆に書いてしまい，結果が違ってしまいました。しかし，ほとんどの答案が連立方程式を立ててそれぞれの文字の値を決定している中で，大小関係による順序を決定することにより値が定まるという発想は目を引きました。

また，2年4組のY君は，たとえば a は $a+2+b = a+1+i = 15$ というように和が15になる3数として2通りの表し方の中で使われているということを，魔方陣と結びつけて考えていました。下図の魔方陣では，縦・横・斜めのどの3つの升に書かれた数字の和も，すべて15になっています。このような発想の飛躍は，たとえ100回中99回無駄になっても，残りの1回で新しい視点の発見につながる可能性を秘めています。そういう意味で印象に残る答案でした。

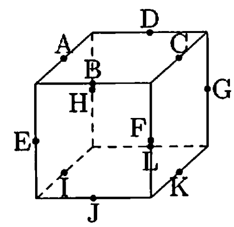
2	9	4
7	5	3
6	1	8

問題20 立方体の各辺の中点のうち，少なくとも3個を通る平面は全部でいくつあるでしょうか。(1991年日本数学オリンピック予選からの出題)

講評 20 今回の応募者は 13 名でした。そのうち正解者は，1 年 5 組 F 君，2 年 7 組 S 君，M 君，Y 君，2 年 8 組 S 君の 5 名でした。ここでは，F 君の答案を紹介します。

立方体の各辺の中点をそれぞれ

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$$



とおく。平面は，一直線上にない 3 点により決まる。これらの点の中に一直線上にくる 3 点はないので，12 個の点 A～L から 3 点を選ぶとそれらを通る平面が一つできる。このような選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 通り。しかし，この中には 4 点以上を含む平面を重複して数えたものが含まれている。

(i) 4 点を含む場合
一つの平面を ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ 回数えている。実際は 1 つのみだから，3 回多く数えている。4 点を通る平面は 21 個あるので，余分に数えた回数は $3 \times 21 = 63$

(ii) 6 点を含む場合
一つの平面を ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 回数えている。実際は 1 つのみだから，19 回多く数えている。6 点を通る平面は 4 個あるので，余分に数えた回数は $19 \times 4 = 76$

(i) (ii) より，重複して数えていた回数は $63 + 76 = 139$
よって，求める平面の個数は $220 - 139 = 81$ □

12 個の辺の中点から 3 点を取る組み合わせの数を求めておき，そこから数えすぎた分を引いて真の値を求めるという基本に忠実な解答です。S 君，M 君，Y 君も同じ考え方に基づいていました。なお，上の解答では「4 点を通る平面は 21 個ある」「6 点を通る平面は 4 個ある」という部分があっさりと結果だけ述べられています。S 君の答案ではこの部分をもう少し詳しく書いてありました。

まず，S 君は n 点ちょうどを通る平面の数を a_n と表し，n 点から 3 点を選ぶ組み合わせの数 ${}_n\mathrm{C}_3$ では一つの平面を ${}_n\mathrm{C}_3 - 1$ 回数えすぎていることから，求める数が

$$220 - \sum_{k=4}^{\infty}({}_n\mathrm{C}_3 - 1)a_k$$

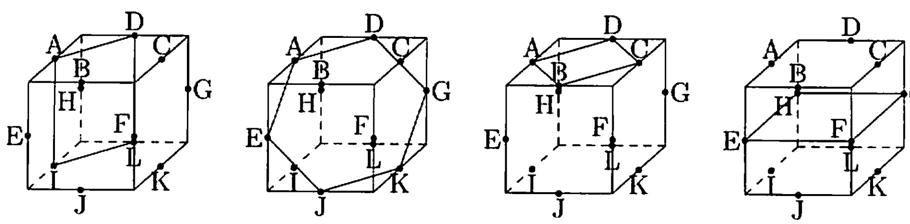
と表せることを指摘し，その上で次のように書いていました。(点を表す記号は上図に合わせて変えてあります。)

(前半部略)
4点以上の点を通るのは，
① A,D,L,I を通る平面と，それと同じ通りかたのもの 12 個
② A,D,G,K,J,E を通る平面と，それと同じ通りかたのもの 4 個
③ A,D,C,B を通る平面とそれと同じ通りかたのもの 6 個
④ E,F,G,H を通る平面とそれと同じ通りかたのもの 3 個

よって，$a_k = \begin{cases} 21\ (n=4) \\ 4\ (n=6) \\ 0\ (n \neq \text{かつ}\ n \neq 6) \end{cases}$

したがって，求める数は，$220 - {}_4C_3 \cdot 21 - {}_6C_3 \cdot 4 = 81$ (個) □

数列の記号や和の記号 $\sum$ を使うかどうかは別にして，4点以上の点を通る平面の数はいきなり結果だけ出すのではなく，この答案のような説明が必要でしょう。なお，これら①～④の図は次のようになります。



ここに図示したような状態を把握し，重複して数えた回数を正しく求めることができたかどうかが成否を決めたようです。なお，S君は他の4人の方針とは異なり，「ちょうど3点を通る平面」「ちょうど4点を通る平面」「ちょうど6点を通る平面」の個数をそれぞれ求めていき，それらの和をとるという方針で正しい値を出していました。

問題 21 ある国には、巨大な円周上に n 箇所の空港が配置されているという。ある年の元日，それぞれの空港にはただ1機だけ飛行機があった。その後毎日，国中の飛行機のうちちょうど2機が空港から飛び立ち，隣接する空港の一方へと移動するという。このとき，何日か後に，すべての飛行機がただ1つの空港に集まってくるというようなことは起こり得るだろうか? (IUPUI 2006

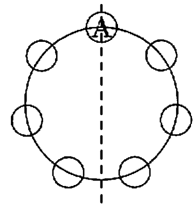
年高校数学コンテストからの出題，IUPUI はインディアナ大学パデュー大学インディアナポリスの略称)

講評 21 応募答案は 9 通。そのうち，1 年 4 組の A 君，1 年 7 組の S さん，1 年 8 組の K 君，T 君，2 年 4 組の Y 君，2 年 7 組の S 君，2 年 8 組の I 君の 7 名が正しい結果に到達していました。ただし，結果を導く論証に関しては A^+ から C まで完成度に大きな開きがありました。

S 君の答案（A^+）を紹介します。

飛行機が 2 機以上あることから，n は 2 以上の整数である。

(i) n が奇数のとき



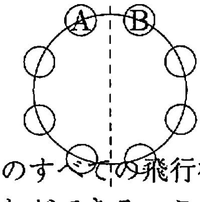
1 つの空港を A とおき，A を境として円周を左右に分割する。このとき，左右に含まれる空港の数は一致するようにしておく。(図は $n=7$ のときの例）このとき，A を除く左右それぞれの空港の数は $\frac{n-1}{2}$ である。

1 日に両側から左右対称の位置にある飛行機を 1 機づつ A に近づくように移動させることを繰り返せば，すべての飛行機を A に集めることができる。このとき，左側について数えると，A のとなりからは 1 日，2 つ隣からは 2 日，$\cdots$，$\frac{n-1}{2}$ だけ離れた空港からは $\frac{n-1}{2}$ 日かかって A に集まるので，

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k = \frac{n^2-1}{8} \text{日}$$

で A に集まる。右側も同じように動いているので，$\frac{n^2-1}{8}$ 日以後，1 つの空港に集まり得る。

(ii) n が 4 の倍数のとき



隣り合う 2 つの空港をそれぞれ A，B とおき，A，B の間を境として (i) と同様に左右に分ける。(図は $n=8$ のとき）このとき左右の空港の数はそれぞれ $\frac{n}{2}$ で，これは偶数である。(i) と同様の方法で A に左側のすべての飛行機を集め，同時に B に右側のすべての飛行機を集めることができる。ここ

まで，最小で

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k = \frac{n(n-2)}{8}\text{日}$$

かかる。このとき，A，B には $\frac{n}{2}$ 機の飛行機がある。$\frac{n}{2}$ は偶数なので，B から毎日 2 機づつ $\frac{n}{4}$ 日かけてすべての飛行機を A に移動させることができる。よって，

$$\frac{n(n-2)}{8} + \frac{n}{4} = \frac{n^2}{8}\text{日}$$

以後，1 つの空港に集まり得る。

(iii) $n \equiv 2 \mod 4$ のとき（すなわち，n が 4 で割って 2 余る数のとき）

ある空港 A_1 を基準とし，右回りに空港を $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_n$ と定める。m 日後に奇数番目の空港にある飛行機の数を a_m，偶数番目にある飛行機の数を b_m とおく。$a_0 = b_0 = \frac{n}{2}$ であり，$\frac{n}{2}$ は奇数である。

奇数番目の空港から飛んだ飛行機は偶数番目の空港に行き，偶数番目の空港から飛んだ飛行機は奇数番目の空港に行く。よって，$n+1$ 日目に，

① 奇数番目の空港から 2 機飛び立つとき，

$$a_{m+1} = a_m - 2,\, b_{m+1} = b_m + 2$$

② 両方から 1 機ずつ飛び立つとき，

$$a_{m+1} = a_m,\, b_{m+1} = b_m$$

③ 偶数番目の空港から 2 機飛び立つとき，

$$a_{m+1} = a_m + 2,\, b_{m+1} = b_m - 2$$

である。a_m について，$a_0 \equiv 1 \mod 2$ であり，上の等式より $a_{m+1} \equiv a_m \mod 2$ であるから，$a_{m+1} \equiv a_m \mod 2$。よって，0 以上の整数 m すべてについて $a_m \equiv 1 \mod 2$。よって，$a_m \neq 0$。同様に，$b_m \neq 0$。よって，何日経過しても 1 つの空港には集まり得ない。 □

1 年生のために少し補足します。$\sum$ は和の記号で，シグマと読みます。この記号の意味は，たとえば

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

というように，$\sum$ の後ろに続く式（今の例では k）に，$k=1$，$k=2$，と順に $k=5$ までの自然数を代入した値の和を表しています。上の答案のなかでは，1つの空港に集まる日数を表すために使っています。もとの問題では「集まり得るかどうか」を問うているので，$\sum$ を使わなくても答案を書くことはできます。また，$a \equiv b \mod 2$ という書き方は，$a-b$ が2で割り切れることを表しており，「a と b は2を法として合同である」と読みます。別の言い方をすれば，a と b の偶奇が一致するということと同じです。これも，この記号を使わずに答案を書くことはできます。

S君の答案の優れているところは，このような記号を駆使していることではなく，n が奇数または4の倍数のときには1っ箇所に集まり得る事と，n が4で割って2余る数の時には決して一箇所に集まり得ないことのすべてに対してきちんと「証明」を与えているところです。そのために，「集まり得る」ことを示す際には具体的な手順を与え，「集まり得ない」ことを示す際には偶数番目・奇数番目それぞれの空港にいる飛行機の総数の偶奇性に注目し，1日の飛行機の移動でその偶奇が変わらないことに注目して（すなわち不変量を構成して）証明しています。「可能」の証明と「不可能」の証明で適切な手法を選びながら証明を仕上げており，最も完成度の高い答案でした。

他の応募者の答案について，何点か講評します。

K君は，最終的に集まってくる空港を固定し，それぞれの飛行機がこの空港に達するまでに必要な飛行回数を「F回数」(flightの頭文字でしょうか）と呼んで，毎回2機の飛行機が移動することから1箇所に集まることができるためには「総F回数（各飛行機のF回数の，飛行機全体にわたる総和）が偶数でなければならない」と結論し，以下総F回数が偶数になるような n を調べる，という方針をとり，最終的に正しい結論に達しています。厳密には，「1箇所に集まるならば，総F回数が偶数」であることだけではなく，逆に，「総F回数が偶数ならば，1箇所に集まり得る」ことを言わなければなりません。この両方向きが言えて初めて，「総F回数が偶数になるような n についての条件を求めること」が，「やがて1箇所に集まり得るような n についての条件を求めること」と同じであるということができます。これは，1年生はこれから授業で取り上げることになる「必要条件」「十分条件」をはっきりと示す，ということにあたります。このような改善点はありますが，アイディアには見るべきものがあり，単に偶数・奇数という程度ではなく「n が4で割って2余る自然数のときだけ不可能」という結論に達していること自体は高く評価でき

ます。T君，Y君の答案も，基本的に同じアイディアにもとづいていました。

I君の答案は，n が偶数のときと奇数のときに場合を分け，具体的な手順を与えながら，n が奇数ならば1つの空港に集まり得ること，n が偶数ならば隣接する2つの空港に半分ずつの飛行機を集めてくることができることを示しています。その上で，n が偶数の場合をさらに $n/2$ が偶数の場合と奇数の場合に分け，前者の場合には隣接2空港から一方の空港にすべての飛行機を移すことができることを示し，また後者の場合には隣接2空港から片方の空港に集めることができないことを示しています。この方針では，たしかに「この方法（いったん隣接する2空港に集めてから一方から他方へと移していくという方法）では不可能」であることが示せていますが，「どんな方法でも不可能なのか」という疑問には答え切れていません。可能であることの証明はしっかりしていますが，不可能性の証明の方に改善すべき点が残りました。

一般に，「可能」の証明に重点を置いた答案は「不可能」の証明が甘く，「不可能」の証明に重点を置いた答案は「可能」の証明が甘くなっているようです。その意味でも，証明の手法を使い分けながらどちらにもしっかりとした論証を与えたS君の答案は優れたものといえます。

問題22 半径2の円板を半径1の円板7枚で覆うことができるということを，できるだけ明解に説明せよ。

講評22 「できるだけ明解に」という点がポイントです。1年5組F君，1年8組T君，2年7組Y君，2年7組S君，2年7組M君，ほかに匿名で1年7組1名，2年6組2名，無記載1名からの提出がありました。ここでは，T君の答案を紹介します。

半径2の円をOとし，中心を点Oとおく。円Oに内接する正六角形を書き，各頂点と中心とを結ぶ。さらに，各辺の中点をとり，隣り合う辺の中点を結ぶ。これにより円板が1辺1の正三角形24個と，斜線で表した弓形の部分と同じものが6個できる。これらすべてを埋めることができれば，円Oを覆えたといってよい。（図1）・・・★

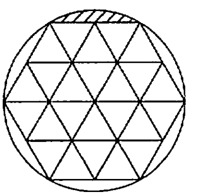


図1

半径1の円をそれぞれ円 O_1〜O_7 とし，中心を同じ記号で O_1〜O_7 とおく。中心Oと O_1 を重ねると，まず図2の斜線部が覆える。次に，内接六角形の各辺の中点と重なるように中心 O_2〜O_7 を置く。すると，残りの三

角形はすべて覆われた状態になる。また，円 O と円 O_2 を抜き出してみると，最初に斜線を引いて表した弓形の部分は重なっている。(図 4) 円 O_3〜O_7 についても同様である。

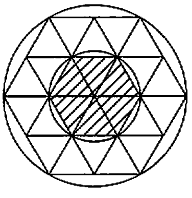


図 2

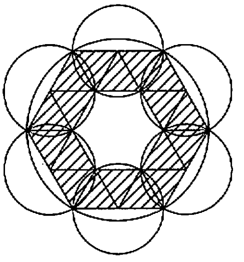


図 3

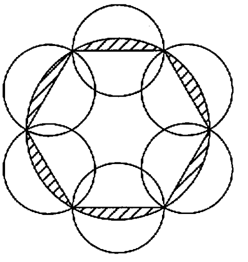


図 4

以上から，★ で示したすべての図形の部分を埋めることができたので，円 O を覆うことができたことになる。わかりやすく明解に示した図が図 5 である。

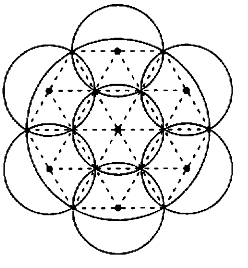


図 5

□

提出者はいずれも，何らかの形で正六角形を利用していました。

問題 23 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とするとき，$\sqrt{2}$ をできるだけ次数の低い a の有理数係数多項式で表せ。(第 4 回日本数学オリンピック予選，1994 年)

講評 23 この問題の答案を提出した人は 7 名です。うち 2 名は，「有理数係数多項式」の意味を取り違え，$\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})$ のように分母に a が現れる形 (有理式) で答えを書いていました。この問題は「多項式で表せ」という問題です。$\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})$ は多項式ではありません。

残り 5 名は，正しい結果 $\frac{1}{2}a^3-\frac{9}{2}a$ を書いていました。1 年 5 組 F 君，1 年 8 組 T 君，2 年 7 組 S 君，M 君，Y 君です。このうち，2 年生の S 君，M 君，Y 君 3 名は，単にこの式を求めただけではなくそれが確かに最も次数の低い

表現であること，すなわち2次以下の有理数係数多項式で表すことができないことの証明をしています。ここまで示せば,「できるだけ次数の低い」という問題の要求に対して完全に答えた事になります。

ここでは，Y君の解答を紹介します。

$a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ より，

$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \\ a^3 &= (5 + 2\sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{2} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 a + \mathrm{C}_2 a^2$ ($\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1; \mathrm{C}_2$ は有理数）と表せたとすると，

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \mathrm{C}_0 + \sqrt{2}\mathrm{C}_1 + \sqrt{3}\mathrm{C}_1 + 5\mathrm{C}_2 + \sqrt{6}\mathrm{C}_2 \\ &= (\mathrm{C}_0 + 5\mathrm{C}_2) + \sqrt{2}\mathrm{C}_1 + \sqrt{3}\mathrm{C}_1 + \sqrt{6}\mathrm{C}_2 \end{aligned}$$

両辺の係数を比較（注1）すると，

$$\begin{cases} \mathrm{C}_0 + 5\mathrm{C}_2 = 0 \\ \mathrm{C}_1 = 1 \\ \mathrm{C}_1 = 0 \\ \mathrm{C}_2 = 0 \end{cases}$$

となり，これを満たす有理数 C_0，C_1，C_2 は存在しない。よって，a の最高次数は3次以上になる。$\cdots$①

$a^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ より，$\sqrt{3} = \frac{1}{9}a^3 - \frac{11}{9}\sqrt{2}$。よって，

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= a - \sqrt{3} \\ &= a - (\frac{1}{9}a^3 - \frac{11}{9}\sqrt{2}) \\ &= -\frac{1}{9}a^3 + a + \frac{11}{9}\sqrt{2} \end{aligned}$$

これを整理して，$\sqrt{2} = \frac{1}{2}a^3 - \frac{9}{2}a$ となる。これは3次式だから，①より，一番次数が低い表し方であり，条件を満たす。よって，

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}a^3 - \frac{9}{2}a$$

□

2次以下の有理数係数多項式では表せないことを一般的に証明し，3次なら表せることを実際に作ってみせる。2年生にはもうおなじみの手順ですね。

さて,（注1）において両辺の係数比較をしています。こういうことをしてもよい，ということは，次の性質によって保障されます。これは，すでに1年生も同様の問題を見たことがあるでしょう。

補題1

a, b, c, d を有理数とするとき，次が成り立つ。

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 \text{ ならば}, a=b=c=d=0 \text{ である。}$$

証明は自分で考えてみてください。ここから，次の補題が導けます。これが，係数比較できるという根拠を与えています。

補題2

a, b, c, d, e, f, g, h を有理数とするとき，

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=e+f\sqrt{2}+g\sqrt{3}+h\sqrt{6}$$

ならば，

$$a=e \text{ かつ } b=f \text{ かつ } c=g \text{ かつ } d=h$$

である。

問題24 4人の海賊が2008枚の金貨を分配することにした。4人の海賊には，一番偉い海賊から一番下っ端の海賊まで序列がついている。序列の高い海賊から順に，この金貨をそれぞれに何枚ずつ分けるかを提案し，そのときいる海賊の少なくとも半分が賛成すれば，その提案が実行されるものとする。もし，賛成者が半分よりも少なければ，提案した海賊は除外され，海賊の人数は1人減る。このとき，最上位の海賊は何枚の金貨を獲得することができるか。ただし，海賊は完全に論理的に考えることができると同時に，完全に利己的であるとする。すなわち，ある提案を拒否することによって自分がよりたくさんの金貨を得る可能性がある場合には，かならず提案を拒否する。

講評24 第1問の答案を提出した人は6名，そのうち，正解者は2年7組のＹ君と，学年組無記載の匿名1名の計2名でした。この問題は，後ろから

さかのぼって考えると考えやすくなる問題の典型といえます。Y君の答案を紹介します。

> 海賊を，偉い順にA，B，C，Dとする。最後の段階から考えていく。C，Dの2人が残った状態になると，Cが「Cに2008枚，Dに0枚」と提案すれば残った人数の半数が賛成したことになりDは1枚ももらえなくなる。そうならないためには，Dは1つ前のBがいるうちに，Bの提案に賛成しなければならない。
>
> Bは，1枚でもDに与えれば確実にDの賛成が得られるから，「Bに2007枚，Dに1枚」という提案をし，Dの賛成を得て2007枚の金貨を得る。このように，B，C，Dの3人になってしまうとCは1枚も金貨をもらえなくなるから，Cがそれを避けようと思えば，Aがいるうちに Aの提案に賛成しなければならない。
>
> AはCに1枚でも与えれば確実にCの賛成を得ることができるから，「Aに2007枚，Cに1枚」という提案をする。先に述べた理由でCは賛成するので，B，Dが反対しても半分の人数が賛成したことになってこの案は採用される。結局，Aは2007枚の金貨を得る。

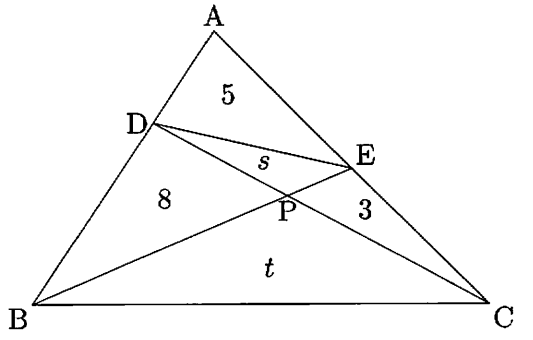
ある種の力関係の中ではナンバー2よりも下のランクのものがナンバー1のおこぼれをほんのわずかにもらってナンバー2以上の小さな得をする，という現象の最も単純なモデルになっています。

問題25　△ABCの辺AB，AC上の点をD，Eとし，BE，CDの交点をPとする。△ADE，△BPD，△CEPの面積がそれぞれ5,8,3のとき，△ABCの面積を求めよ。

講評25　こちらの問題は8人が提出し，全員が正解を得ていました。正解者は1年1組のT君，1年2組の匿名1名，1年3組のU君，1年5組のF君，2年7組のS君，Y君，2年8組のS君，学年組無記載の匿名1名です。

このうち6名は，細かな違いはあるものの，線分の長さの比を面積比として2通りに表して方程式を立てることにより未知の部分の三角形の面積を求めています。また2名は，メネラウスの定理を用いて方程式を立てるか，あるいは面積比の利用とメネラウスの定理を併用しています。ここでは，前者の方法に基づき，正解者の答案を総合して整理した解答を示します。

左図のように，$\triangle$PDE，$\triangle$PBCの面積をそれぞれ s，t とおく。高さが共通の２つの三角形の面積比は，底辺の長さの比に等しいことから，$\triangle$BAE と $\triangle$BCE に注目して，



$$\begin{aligned}\mathrm{AE}:\mathrm{EC} &= \triangle\mathrm{BAE}:\triangle\mathrm{BCE}\\ &= s+13:t+3\end{aligned}$$

$\triangle$DAE と $\triangle$DCE に注目して，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EC} = \triangle\mathrm{DAE}:\triangle\mathrm{DCE} = 5:s+3$$

これらは同じ AE : EC を２通りに表したものだから，

$s+13:t+3=5:s+3$，したがって，$(s+13)(s+3)=5(t+3)\cdots$①

DP : PC を同じように２通りに表すと，

$$\mathrm{DP}:\mathrm{PC} = \triangle\mathrm{EDP}:\triangle\mathrm{EPC} = s:3$$

$$\mathrm{DP}:\mathrm{PC} = \triangle\mathrm{BDP}:\triangle\mathrm{BPC} = 8:t$$

これらより，

$s:3=8:t$，したがって，$st=24\cdots$②

$s\neq 0$ より $t=24/s$ を①に代入して整理すると，$s^3+16s^2+24s-120=0$ となる。これを解くと，$(s-2)(s^2+18s+60)=0$ より $s=2,-9\pm\sqrt{21}$ となるが，$s>0$ より $s=2$ を得る。このとき，$t=12$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}=5+8+3+2+12=30$ である。 □

ここで使われた**同じものを２通りに表し，それらが一致することから方程式を立てる**というのも数学の常套手段の一つですね。

問題26 ４桁の数を ABCD（ここで A は千の位の数，B は百の位の数，$\cdots$）と表す。次の条件のうち少なくとも一つが成り立つとき，「特徴のある」自然数と呼ぶことにする。

(1) A, B, C, D がすべて偶数である。

(2) A, B, C, D がすべて奇数である。

(3) $A > B > C > D$

(4) $A < B < C < D$

(5) $A = B = C = D$

このとき,「特徴のある」4桁の自然数はいくつあるか。

講評26 第1問の答案を記載して提出した人は12名，そのうち，正解者は2年生7組のI君，M君，S君，Y君，Y君，2年生8組のS君の6名でした。

最初に言葉の定義を再確認しておきます。整数 $(\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を2で割った余りで分類すると，余り0になるものと余り1になるものとに分けられます。このとき，余り0になる整数を偶数といい，余り1になる整数を奇数といいます。すべての整数は偶数か奇数かのいずれか一方になります。この定義に基づけば，**0は偶数**です。

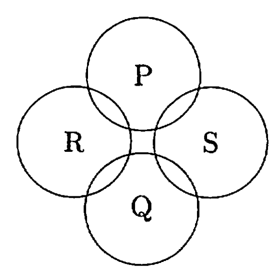
次に，問題の条件を吟味しておきましょう。条件 (5) を見てください。4つの位の数がすべて同じという条件です。このとき，その同じ数が偶数ならば，条件 (1) を満たしていることになるし，また，その同じ数が奇数ならば，条件 (2) を満たしていることになります。このことから，次がわかります。

$$
\begin{aligned}
&(1) \sim (5)\quad \text{のうち少なくとも1つがなりたつ}\\
&\qquad\iff (1) \sim (4)\ \text{のうち少なくとも1つが成り立つ}
\end{aligned}
$$

したがって,(このことを指摘しておけば) 問題を解くにあたっては (5) を考慮しなくてもよいことになります。

条件 (5) の処理の仕方によって答案の簡潔さに違いが出ますが，基本的な考え方は正解者6名とも同じでした。それらを整理したものを示します。

答案 条件 (5) を満たす4桁の自然数は，条件 (1) または (2) の一方を満たすから，条件 (1) から (5) までのうち少なくとも1つを満たすことと，条件 (1) から (4) までのうち少なくとも1つを満たすこととは同値 (必要十分) である。



条件 (1), (2), (3), (4) を満たす4桁の自然数の集合をそれぞれP，Q，R，Sとおく。こ

のとき，集合 P と Q には共通部分がなく，集合 R と S には共通部分がない。この様子を図示すると右図のようになる。

集合 X の要素の個数を $n(\mathrm{X})$ と表すことにすると，求める数は以下のように表される。

$$n(\mathrm{P})+n(\mathrm{Q})+n(\mathrm{R})+n(\mathrm{S})-n(\mathrm{P}\cap\mathrm{R})-n(\mathrm{P}\cap\mathrm{S})-n(\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})-n(\mathrm{Q}\cap\mathrm{S})$$

4 桁の自然数が条件（1）を満たすための必要十分条件は，千の位が 2, 4, 6, 8 のいずれか，他の 3 つの位がそれぞれ 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかであることだから，$n(\mathrm{P})=4\cdot 5^3=500$ である。

4 桁の自然数が条件（2）を満たすための必要十分条件は，各位の数が 1, 3, 5, 7, 9 のいずれかであることだから，$n(\mathrm{Q})=5^4=625$ である。

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 10 個の数から 4 個を選べば，それらを大きいものから順に千の位，百の位，十の位，一の位とすることにより条件（3）を満たす 4 桁の自然数が 1 つ定まる。ここで，選んだ 4 つの数の中に 0 が含まれていても，大きいものから順に高い位に並べるため，千の位に 0 がくることはない。逆に，条件（3）を満たす 4 桁の自然数に対し，各位の数は 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 10 個の数の中の異なる 4 個となっている。したがって，$n(\mathrm{R})={}_{10}\mathrm{C}_4=210$

1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 9 個の数から 4 個を選べば，それらを小さいものから順に千の位，百の位，十の位，一の位とすることにより条件（4）を満たす 4 桁の自然数が 1 つ定まる。逆に，条件（4）を満たす 4 桁の自然数に対し，各位の数は 1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 9 個の数の中の異なる 4 個となっている。ここで 0 が表れないのは，各位の数のうち最小のものが千の位であることによる。したがって，$n(\mathrm{S})={}_9\mathrm{C}_4=126$

0,2,4,6,8 の 5 個の数から 4 個を選べば，それらを大きいものから順に並べて条件（1）と（3）をともに満たす 4 桁の自然数ができる。逆に，条件（1）と（3）をともに満たす数から各位の数を取り出すと，0,2,4,6,8 の 5 個の中の異なる 4 個の数を得る。したがって，$n(\mathrm{P}\cap\mathrm{R})={}_5\mathrm{C}_4=5$

条件（1）と（4）をともに満たす数は 2468 しかない。よって，$n(\mathrm{P}\cap\mathrm{S})=1$

1,3,5,7,9 の 5 個の数から 4 個を選べば，それらを大きいものから順に並べて条件（2）と（3）をともに満たす 4 桁の自然数ができる。逆に，条件（2）と（3）をともに満たす数から各位の数を取り出すと，1,3,5,7,9 の 5 個の数の中の異なる 4 個の数を得る。したがって，$n(\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})={}_5\mathrm{C}_4=5$。また選んだ 4 個の数を小さいものから順にならべると（2）と（4）をとも

に満たす 4 桁の自然数ができ，(2) と (4) をともに満たす数から各位の数を取り出すと，1,3,5,7,9 の 5 個の数の中の異なる 4 個の数を得るから，$n(\mathrm{Q} \cap \mathrm{S}) = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$

以上より，求める数は $500 + 625 + 210 + 126 - 5 - 1 - 5 - 5 = 1445$ □

必要十分性の部分など，同様の考え方の繰り返し部分をややくどいくらいに書きました。

問題 27 a, b, c を奇数とするとき，$ax^2 + bx + c = 0$ は有理数の解をもたないことを証明せよ。

講評 27 この問題の正解者は，1 年 3 組 H 君，2 年 4 組 Y 君，N 君，2 年 7 組 S 君，Y 君，2 年 8 組 K 君，S 君です。

解答は 2 つのタイプに分かれました。2 次方程式の解の公式を用いるタイプと，用いないタイプです。出題の時点で想定していた解答は，解の公式を用いない方法ですが，提出された答案はほとんどが解の公式を用いており，正解答案のうち解の公式を用いないものは 1 人だけでした。

正解答案を紹介する前に，不正解だったものの中で気になった点を指摘しておきます。整数と有理数の区別がしっかりできていないために議論がまったく成立しなくなっているものが複数目につきました。具体的には，b を奇数とし，r と s が有理数としておきながら，「$b = rs$ と表されるので r，s は奇数である」と結論付けているというような間違いです。例えば，$b = 3$，$r = 6$，$s = \frac{1}{2}$ などと置いてみればこの議論が間違いであることは明らかです。他にも有理数について，それが「偶数のとき」「奇数のとき」というような言葉遣いをしている答案がありましたが，偶数・奇数という概念は整数に対して用いられるものです。

では，解の公式を用いない解答として，S 君の答案を紹介します。

答案 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解 $x = \frac{q}{p}$ を持つと仮定する。ここで，p は正の整数，q は整数で，p と q は互いに素であるとする。このとき，

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\left(\frac{q}{p}\right) + c = 0$$

が成り立つ。$p \neq 0$ より，

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\left(\frac{q}{p}\right) + c = 0 \iff \frac{aq^2 + bpq + cp^2}{p^2} = 0$$
$$\iff aq^2 + bpq + cp^2 = 0$$

(i)　$q \neq 0$ の場合

p, q がともに偶数とすると p と q が互いに素であることと矛盾する。

p，q のうち一方が奇数，他方が偶数とすると，a, c がともに奇数であることから aq^2，cp^2 のうち一方が奇数，他方が偶数であり，bpq は偶数である。したがって，$aq^2 + bpq + cp^2$ は 2 個の偶数と 1 個の奇数の和だから奇数となり，0 にはならない。

p, q がともに奇数のとき，a, b, c が奇数であることより，aq^2, bpq, cp^2 はすべて奇数となり，$aq^2 + bpq + cp^2$ は 3 つの奇数の和だから奇数である。よって，0 にはならない。

(ii)　$q = 0$ の場合

$aq^2 + bpq + cp^2 = cp^2 \neq 0$（$p \neq 0$ より）

よって，いずれの場合も矛盾が生じるため，有理数解は存在しない。 □

「有理数解が存在したと仮定して矛盾を導く」という背理法による証明です。背理法が身についていればもっとも自然に思い浮かぶ方針です。また,「ある数が x についての方程式の解であるとは，変数 x にその数を代入したときに式が成り立つということ」という**解という言葉の意味を使えるかどうか**，**有理数の間に成り立つ等式の分母を払うことにより整数の間に成り立つ等式に書き換えて考える**という常套手段が使えるかどうか，などに注目して読んでください。

問題28 ある動物の集団では，集団に属する動物たちは必ず 2 頭または 3 頭でグループを作って行動するという。外からやってきてその集団に加わった新参の動物は，集団内のいずれかのグループを無作為に選んで加わる。もし選んだグループが 2 頭からなる場合，新参の 1 頭を加えて 3 頭でグループを作る。もし選んだグループが 3 頭からなる場合，新参の 1 頭を加えると 4 頭になるので，2 頭ずつ 2 つのグループに分裂する。今，この動物 5 頭からなる集団があり，そこに 1 度に 1 頭ずつ順に新参の動物がやってきて集団に加わるとする。このとき，4 番目にやってきた動物が 2 頭のグループを選ぶことになる確率はいくらか。

講評28　今回の応募者は，2年4組N君，Y君，2年7組Y君，2年8組S君の4名で，4名とも正解でした。考え方の基本は，5頭の動物が問題で説明されているようにグループを作っているとすれば，3頭と2頭のグループからなることがわかるので，その状態から出発して新参の動物がどのグループを選んだかによって枝分かれする状態（何頭のグループがいくつあるかという状態）の推移図をつくり，4番目にやってくる動物が2頭のグループを選ぶことになる確率を計算するというものです。

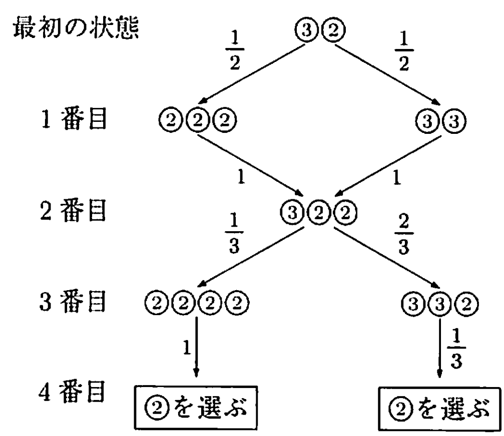
まず，わかりやすく図示されたY君の答案に沿って正解を示します。

答案　動物の集団が何頭ずつのグループに分かれているかという状態と，新参の動物が加わることによってその状態がどう推移するかを図示すると右図のようになる。

図のように，新参の動物が2頭加わった時点では，どのような加わり方をしようと2頭のグループが2つと3頭のグループが1つという状態になる。したがって，3頭目以降を考えればよい。

(i)　3番目に来た動物が2頭のグループに入るとき，2頭のグループが1つ，3頭のグループが2つできる。

(ii)　3番目に来た動物が3頭のグループに入るとき，2頭のグループが4つできる。



よって，4番目に来た動物が2頭のグループを選ぶことになる確率は，

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}=\frac{5}{9}$$

□

Y君，S君は図の上半分も書かずに，7頭を2頭と3頭のグループに分ける仕方は {2頭, 2頭, 3頭} しかないことから，そこまでの経緯を考えることな

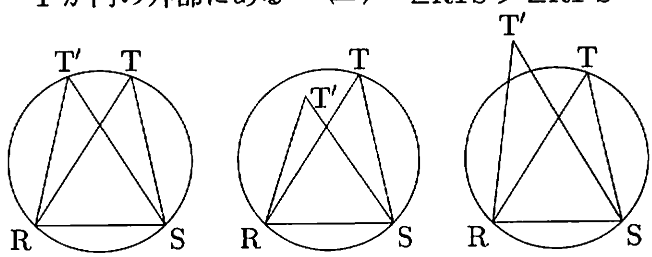
く3番目の動物から後を考えればよいことを指摘して，上と同様に進めていました。この場合にはそれで十分です。

問題29 A，B，C，D を平面上の4点とする。線分 AB を直径とする円の周および内部を領域 P，線分 CD を直径とする円の周及び内部を領域 Q とする。A，B は Q に属さず C，D は P に属さない。このとき，線分 AB と線分 CD は共有点を持たないことを証明せよ。

講評29 この問題への応募答案は3通で，うち2通には不十分な点があり，正解は2年8組のS君のみでした。まず，S君の答案を見てみましょう。

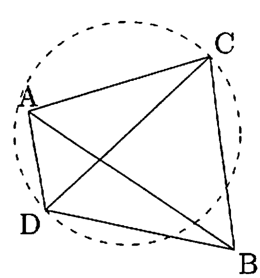
答案 ある円と，その円の弦 RS，および円上の R，S とは異なる点 T が与えられたとする。直線 RS について T と同じ側にある点 T′ について，次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\text{T}'\text{が円周上にある} &&\Longleftrightarrow && \angle\text{RTS} = \angle\text{RT}'\text{S} \\ &\text{T}'\text{が円の内部にある} &&\Longleftrightarrow && \angle\text{RTS} < \angle\text{RT}'\text{S} \\ &\text{T}'\text{が円の外部にある} &&\Longleftrightarrow && \angle\text{RTS} > \angle\text{RT}'\text{S} \end{aligned}$$



（S君はこの命題の証明を与えていますが，ここでは省略します。）
線分 AB と線分 CD が共有点を持つならば，A,B のいずれかが Q に属するか，または，C,D のいずれかが P に属することを示す。

共有点が A,B,C,D のいずれかであるとき，例えば，点 A が CD 上の点でもあるとき，線分 CD 上の点は領域 Q に属するから点 A も領域 Q に属する。したがってこれらの場合には主張が成り立つ。



共有点が A,B,C,D のいずれでもないとき，四角形 ACBD を考えると，∠ACB＋∠CBD＋

$\angle BDA + \angle DAC = 360°$ であるから，これら4つの内角のうちに $90°$ 以上の角が少なくとも一つ存在する。ここで $\angle DAC \geqq 90°$ としても一般性を失わない。このとき，CDを直径とする円において，直径CDに対する円周角は $90°$ であるから，直線CD上にない点Eについて，Eが領域Qに属することと $\angle CED \geqq 90°$ であることとは同値である。(上に準備した補題より。）よって点Aは領域Qに属する。

したがって，線分ABと線分CDが共有点を持つならば，A,Bのいずれかが Q に属するか，または，C,DのいずれかがPに属する。この対偶をとれば証明が終わる。 □

ある点が円の内部にあるか，円周上にあるか，それとも円の外部にあるかを示すために使える平面幾何の定理として，この問題に最も適切なものを使った見事な証明です。

問題30 ある病気の患者さんが治療のために入院すると，退院までに以下のような様々な医療行為等が必要であり，それぞれ下記の日数が必要である。

- 細菌検査（以下，作業Aとする） 3日
- X線画像検査 (B) 5日
- 内視鏡検査 (C) 1日
- 病床の準備 (D) 3日
- 手術および手術部での回復 (E) 2日
- 病床での回復 (F) 3日

当然，これらの作業をすべて同時に着手することはできない。ある作業は別の作業が完了していないと着手できない。以下にその前提を示す。

- A, Bは前提がなく，早速着手できる。
- C, DはAが完了していないと着手できない。
- EはB, Cが両方とも完了していないと着手できない。
- FはD, Eが両方とも完了していないと着手できない。

これらの前提を満たす限り，複数の作業を並行しておこなうことができる。休日はないものとする。入院は，朝おこなわれ，すぐに作業に着手できる。すべての作業が終了すれば，その日のうちに退院する。このとき，以下の質問に答えよ。(入院日を第1日目と数える。)

(1) 手術を開始することができるのは，最短で何日目か。

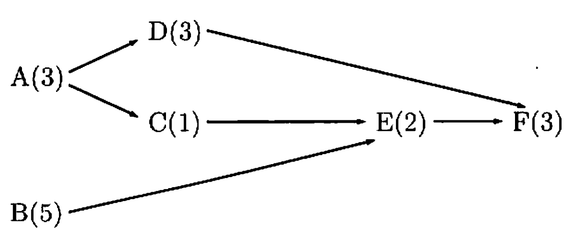
(2) 最短で，何日目に退院することができるか。

(3) 作業 C, E, F を短縮することはできないが，職員の採用によって A, B, D をどれか一つだけ，1 日短縮することができる。最短の入院日数を上記 (2) の解答より 1 日短縮するためには，どのようにすればよいか。

(4) 作業 B の所要日数を x $(3 \leqq x \leqq 5)$, 作業 D の所要日数を y $(3 \leqq y \leqq 5)$ とする。x, y はともに整数である。他の作業は上記のとおり固定とする。x, y の値によって，最短の入院日数がどのように変化するか，示せ。

講評 30 今回の答案提出者は 5 人。完全な正解者は 1 名でした。不正解としたもののほとんどは,「作業を開始できるのは何日目か」という問いの,「何日目」の解釈によるものです。作業 E 以前にしなければならない作業に 5 日かかるとき，作業 E を開始できるのは「6 日目から」となります。ここを「5 日目から」と書いてしまったものがたくさんありました。その点を除けば，基本的な考え方は正しい方向を向いていたといえます。1 年生 3 組の I 君，4 組の N さん，および無記名 1 名は，図を描いて作業工程をわかりやすく示していました。I 君は, (3) の解答を表の形にして見やすく整理していました。2 年 4 組の N 君も説明の中で図を利用しています。上の (1) の解釈まで含めた完全な正解は 2 年 8 組の S 君です。記述は完全ですが，図が一つもないため，読みやすさという点では図示を取り入れたほうがよいでしょう。以下に，それぞれの答案の良いところを取り入れ，必要に応じて修正した解答を示します。

答案 作業の順序についての条件と，各作業にかかる日数とは，以下のように図示することができる。



各矢印について，矢印の元の作業が終わらなければ，矢印の先にある作業を開始できない。また，括弧内の数はその作業にかかる日数を表す。

(1) 作業Eが開始できるのは，A(3) → C(1) の作業（4日かかる）と，B(5) の作業（5日かかる）が共に終わってからである。A(3) → C(1) と B(5) とは並行して行えるので，E の開始以前の作業に必要な日数は両者の多い方の日数，すなわち5日である。よって，作業 E は最短で6日目から開始できる。

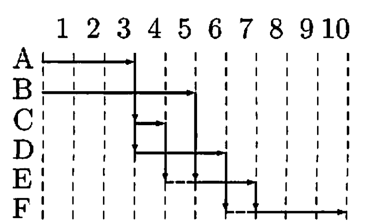
(2) F が終わるまでのルートは，A(3) → D(3) → F(3)，A(3) → C(1) → E(2) → F(3)，B(5) → E(2) → F(3) の3つあり，それぞれ9日，9日，10日かかる。したがってすべての作業が終わるまでには，一番日数の多い B(5) → E(2) → F(3) のために10日かかる。退院は作業が終わった日のうちにできるので，10日目。

(3) 退院までの日数は B(5) → E(2) → F(3) により決まった。他の2つのルートはともに9日で終えることができる。そこで，B，E，F のうち唯一短縮可能な作業である B の作業を1日縮めれば，全体として入院日数が1日縮む。これ以外の A，D の作業を短縮しても，入院日数は縮まない。よって，B。

(4) x，y を決めるごとに，「A(3) → D(y) → F(3)」「A(3) → C(1) → E(2) → F(3)」「B(x) → E(2) → F(3)」のそれぞれにかかる日数の最大値，すなわち，$y+6$，9，$x+5$ のうちの最大値が求める日数である。$y \geqq 3$ より $y+6 \geqq 9$ だから，$x+5$，$y+6$ のうちの大きい方が求める日数と言ってもよい。表にすると以下の通り。

$x \backslash y$	3	4	5
3	9	10	11
4	9	10	11
5	10	10	11

□



提出された答案には，右図のような図が描いてありました。実際には一番上の行に書いた日数を表す数字を点線の真上に書き，そのため前の作業の最終日と次の作業の第1日とを同じ日に重ねて考えてしまっているケースが目立ちました。この図から必要なことを読み取ることもできますが，この問題の場合には答案例に示したような図が簡潔でかつ目的にもかなっているでしょう。

あとがき

「大手前数リンピック」では，およそ月1回程度，問題を1，2年生全員に配布し，約一週間後に設定した締切日までに教務室（職員室）付近に設置した箱に応募答案を提出してもらいました。その後，提出された答案を読み，優れた答案やあらかじめ用意した解答をもとに講評を書き，再び1，2年生全員に配布しました。

全員に対して講評を配布したのは，それらを読むことにより，より多くの人に優れたアイディアを共有してほしいと願ったからです。実際，講評を配布した際には熱心に読みふける皆さんの姿を見ることができました。

「大手前数リンピック」は次年度も継続して実施する予定です。在校生の皆さんはぜひ問題にチャレンジし，創意工夫に満ちた解答を応募してください。皆さんの優れた答案が十分に蓄積されたとき，第二集を発行したいと考えています。

大手前数リンピック第一集

平成21年（2009年）3月15日　初版第1刷

発行　大阪府立大手前高等学校
大阪市中央区大手前 2-1-11
電話　06(6941)0051
FAX　06(6941)3163